

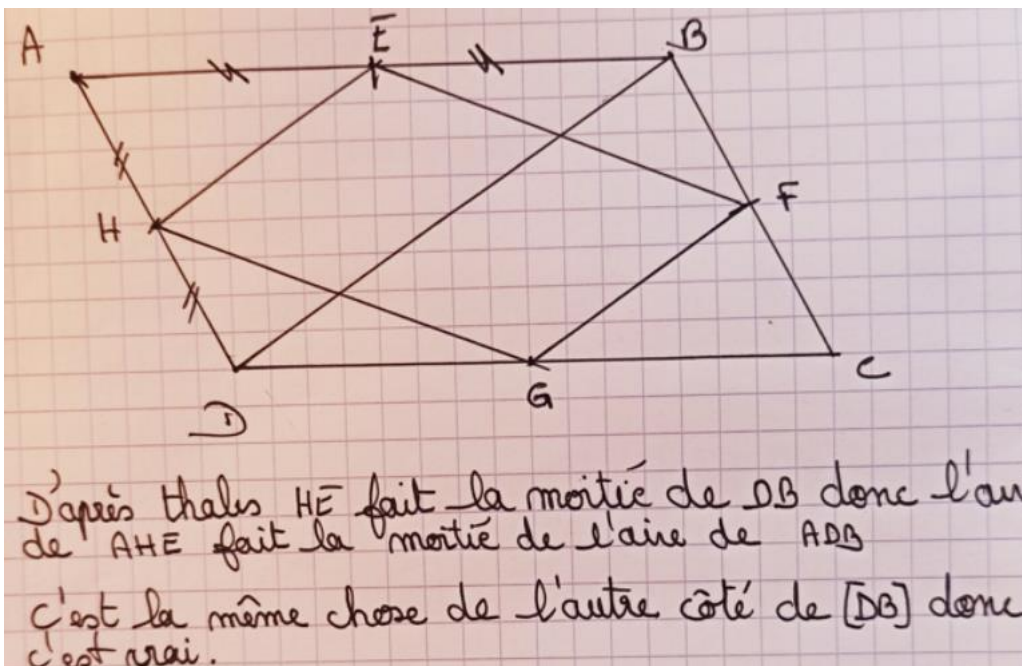
Écrit 2-2023. Quelques éléments de réponse

1

« Toutes les questions de ce sujet ne sont pas corrigées ». Ou aussi bien « Il existe des questions non corrigées ».

I. Aires au collège.

Analyse d'une production d'élèves (annexe 5)



1. Cet élève semble adopter la démarche suivante :

- Le triangle AEH est une réduction du triangle ABD de rapport $\frac{1}{2}$.
- Une symétrie centrale conserve la réduction : le triangle CFG est une réduction du triangle CBD de rapport $\frac{1}{2}$.
- Il utilise un « théorème en acte » qui s'énoncerait ainsi : Une réduction de rapport k multiplie les longueurs par k et les aires aussi ». Donc, selon lui, les aires des triangles ABD et CFG sont celles des triangles ABD et CBD multipliées par $\frac{1}{2}$. Il s'agit du point-cléf de sa démarche.
- Selon lui, la partie complémentaire de $EFGH$ est la réunion de AEH et CFG . Donc, $EFGH$ a bien la même aire que cette réunion.

Bien que sa réponse soit exacte, sa démarche est invalide.

Réussites :

Cet élève a une bonne compréhension de la question posée : il a conscience que la réponse attendue est « oui ».

2

- Il analyse assez bien (réussite partielle) la figure en reconnaissant implicitement certaines caractéristiques géométriques de la figure : le parallélisme de (EH) , (FG) et (AB) et (mais cela demanderait confirmation) le fait qu'un parallélogramme possède un centre de symétrie.
- Il est capable de construire une démarche compatible avec sa vision des choses.

Echecs :

E1. Cet élève ne dispose pas d'un vocabulaire mathématique suffisant :

- « D'après Thalès » est une justification insuffisante (« d'après le théorème de Thalès » aurait été correct).
- Le langage courant « C'est la même chose de l'autre côté » n'est pas suffisant pour décrire la situation ; une transformation est en jeu (la symétrie centrale de centre celui du parallélogramme), encore faut-il la caractériser mathématiquement. Il existe donc une ambiguïté sur le sens à donner à cette remarque.

E2. Son analyse de la figure n'est pas complète :

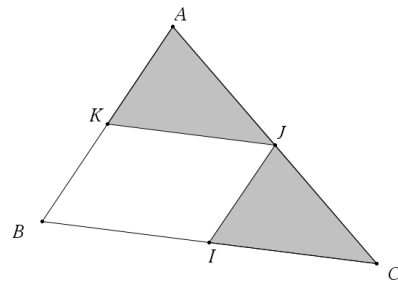
La partie complémentaire du parallélogramme $EFGH$ est la réunion de quatre triangles et non des deux seuls triangles AEH et CFG .

E3. Il utilise des théorèmes incorrects ou inexacts :

- C'est le « théorème des milieux » et non le théorème de Thalès qui est en jeu. Le fait que (EH) soit parallèle à (BD) en est une conséquence, ce n'est pas une hypothèse.
- Le théorème en acte qu'il utilise est inexact. C'est le point-clef sur lequel il faut revenir.

3

2. On peut commencer par mettre en évidence l'incorrection du théorème en acte de l'élève, par exemple à l'aide de la figure ci-contre où I, J, K sont les milieux des côtés du triangle ABC ; Si l'on applique ce théorème, chacun des deux triangles grisés aurait une aire égale à la moitié de celle de ABC , donc leur réunion a une aire égale à celle de ABC . Où donc est passé le quadrilatère $BIJK$??



On énonce alors le théorème correct : « Une réduction de rapport k multiplie les longueurs par k et les aires par k^2 ». On peut justifier ce résultat dans le cas de triangles en remarquant que base et hauteur sont toutes deux multipliées par k .

Dans notre contexte, les aires des triangles AKJ et IJC sont celles des triangles ABD et CBD multipliées par $\frac{1}{4}$ et non pas par $\frac{1}{2}$.

Je laisse au lecteur le soin de choisir sa démarche

Aires au lycée.

2. La réponse correcte est la réponse b. Les deux distracteurs sont :

La réponse c : « L'intégrale d'une fonction est égale à l'aire du domaine situé sous sa courbe représentative et *au-dessus* de l'axe Ox ».

La réponse d : « L'intégrale d'une fonction est égale à l'aire du domaine situé entre sa courbe représentative et l'axe Ox » (quel que soit le signe de la fonction représentée).

La réponse a n'est pas un pur distracteur (elle combine le distracteur d avec une mauvaise lecture des bornes d'intégration).

4

<p>3. Comparer l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en zéro avec l'aire du domaine entre l'axe Ox et la courbe représentative, comme l'exemple ci-contre. Faire calculer l'intégrale de f_1 sur chacun des intervalles $[-1 ; 0]$; $[0 ; 1]$ et $[-1 ; 1]$.</p>	<p>$f_1(x) = x^3 - 4 \cdot x$</p>
<p>On peut ajouter la même comparaison à propos d'une fonction facile à intégrer et changeant de signe. Ici par exemple sur chacun des intervalles $[0 ; 2]$; $[0 ; 1]$ et $[1 ; 2]$.</p>	<p>$f_2(x) = x^2 - 3 \cdot x + 2$</p>

V. Mobilisation de compétences.

2. Compétence calculer : Les calculs effectués par cet élève sont exacts.

Calcul des racines du polynôme $x^2 - 8$: cet élève utilise (correctement) la méthode générale ce qui témoigne d'un manque de vision d'ensemble des méthodes adéquates. D'autre part, cet élève ayant le choix des valeurs numériques, le choix de la valeur 8 n'est pas optimal.

Il ne s'agit pas d'erreurs mais d'un manque d'expertise. Cet élève a une marge de progression en « Exercer l'intelligence du calcul, effectuer des simplifications ».

Calcul de l'intégrale : Les calculs sont corrects et témoignent d'une bonne maîtrise du calcul intégral.

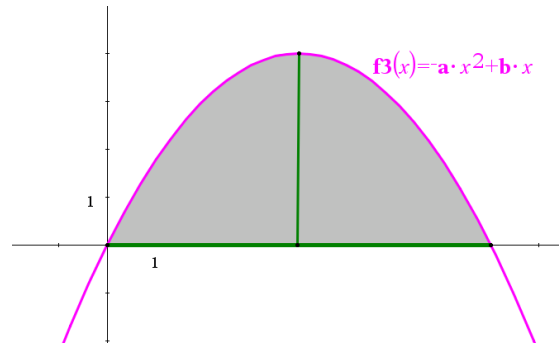
Compétence raisonner : cet élève ne *démontre* pas la propriété mais la *vérifie* sur un exemple. Il a bien conscience qu'il effectue une « vérification » puisqu'il le déclare lui-même mais, dans sa conclusion, ne fait pas la distinction entre « vérification » et « démonstration » puisqu'il généralise à partir de son exemple.

5

3. On peut considérer un repère dans lequel l'origine est l'un des deux points d'intersection de la parabole avec l'axe Ox (choisissons celui de plus petite abscisse).

Dans un tel repère, on a affaire à une arche parabolique façon Archimède si et seulement s'il s'agit de la courbe représentative d'une fonction polynôme du deuxième degré de la forme $f(x) = -ax^2 + bx$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Ainsi, la généralité n'est en aucune façon diminuée.



Le deuxième point d'intersection avec Ox est le point d'abscisse $\frac{b}{a}$, ce nombre est aussi la longueur de la base de l'arche. Le sommet est le point d'abscisse $\frac{b}{2a}$ et son ordonnée est égale à : $f\left(\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a}$, ce nombre est aussi la hauteur de l'arche.

L'aire de l'arche, calculée par intégration, est : $\int_0^{b/a} (-ax^2 + bx)dx = \left[-\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2}\right]_0^{b/a} = \frac{b^3}{6a^2}$

L'aire de l'arche calculée selon Archimède est $\frac{2}{3} \times \frac{b}{a} \times \frac{b^2}{4a} = \frac{b^3}{6a^2}$

Les deux résultats sont bien identiques.

Notons cependant que le choix de repère fait par l'élève est très intéressant car il y est possible de bien mettre en évidence les rôles de la hauteur M de l'arche et de sa base (désignons-la par $2d$).

L'arche parabolique en jeu y est représentative de la fonction : $f(x) = M\left(1 - \frac{x^2}{d^2}\right)$, fonction qui permet une démonstration générale de la formule d'Archimède (*laissée au lecteur*). L'obligation de changer de repère imposée par le sujet ne semble pas la plus pertinente.

6

<p>L'élève a fait une erreur d'indentation concernant la ligne « if ... ». Correction ci-contre.</p> <p>Dans le domaine des probabilités et statistiques, le résultat obtenu représente le nombre de succès dans la répétition n fois d'une épreuve de Bernoulli (ce nombre est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale).</p>	<pre>>>> def aire(n): c=0 for k in range(n): x=random() y=random() if y<f(x): c=c+1 return c >>> aire(100000) 34315 >>> aire(1000000) 340898</pre>
--	---

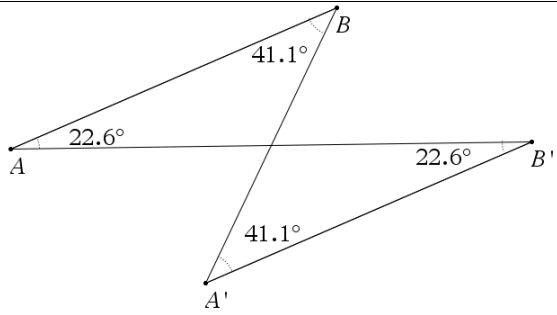
VII - Éléments d'une séquence d'enseignement

1.a. « Si un quadrilatère est un parallélogramme alors ...

- Ses côtés opposés ont la même longueur (fig 1).
- Ses diagonales se coupent en leur milieu (fig 2).
- Ses angles opposés sont égaux (fig 3).

b. Une propriété vérifiée par un quadrilatère caractérise un parallélogramme si la vérification de cette propriété est une *condition nécessaire et suffisante* pour que le quadrilatère en question soit un parallélogramme (c'est-à-dire qu'il y a équivalence entre la propriété énoncée et la définition).

c. La propriété illustrée par la figure 1 n'est pas caractéristique si l'on ne précise pas que le quadrilatère est *non croisé*.

<p>d. La propriété codée par la figure 3 n'est pas caractéristique d'un parallélogramme si on ne précise pas que le quadrilatère est non croisé.</p>	
--	--

e. Présenter une propriété à l'aide d'une figure codée mobilise la mémoire visuelle, donc favorise une reconnaissance visuelle de la propriété en jeu dans une figure complexe. En revanche, les élèves ne vont pas disposer d'un énoncé reconnu par tous. Cette façon de procéder favorise l'analyse d'une figure mais, par rapport à un énoncé reconnu, défavorise une phase de synthèse.

Partie 2 : Initiation au raisonnement

Analyse TE

1. Élève 1



La démarche de cet élève consiste à procéder par « essais et erreurs » après avoir limité judicieusement son champ d’investigation. Il trouve ainsi une solution mais il est curieux qu’il ne propose que celle-là. On peut supposer qu’il a « essayé » au hasard le nombre 42 puis a arrêté sa recherche dès lors qu’une solution était trouvée, conformément au contrat didactique : « Dans un problème, il y a toujours une seule solution ». De ce fait, sa démarche aboutit à obtenir une solution mais non toutes les solutions.

- a. La multiplication par 4 permet de se ramener à des coefficients entiers.
- b. En troisième, on se référerait à la numération : le chiffre des unités du nombre $21x + 10y = x + 20x + 10y = x + 10(2x + y)$ est le même que le chiffre des unités de x .
- c. En terminale, on pourrait écrire : $x - 2 = (135 - 2x - y) \times 10$, ce qui prouverait que $x - 2$ est un multiple de 10.

2. Élève 2

- a. Son programme ne teste que les couples d’entiers égaux. Cette erreur est rédhibitoire.

Il faudrait lui demander d’imprimer les couples testés (en changeant l’instruction « != » par l’instruction « < », pour stopper le programme).

<p>b. On cherche les solutions entières naturelles. Pour cela, on commence par déterminer un ensemble fini de couples (x,y) dans lequel on est sûr que toutes les solutions se trouvent.</p> <p>Par exemple dans ce contexte, nous sommes sûr que le nombre des mufliers et des jacinthes sont strictement inférieurs, respectivement, à 70 et à 200.</p>	<pre style="font-family: monospace; font-size: 0.9em;"> >>> def jactul(): for x in range(70): for y in range(200): if 5.25*x+2.5*y==338: print(x, y, x+y) >>> jactul() 2 131 133 12 110 122 22 89 111 32 68 100 42 47 89 52 26 78 62 5 67 </pre>
--	---

3. Élève 3

- a. Cet élève utilise l’algorithme d’Euclide dans l’ensemble des nombres décimaux, donc en dehors de son champ d’application. (D’où l’intérêt de la multiplication par 4)
- b. Inutile de faire appel à l’algorithme d’Euclide, l’équation de Bezout $21x + 10y = 1$ admet dans l’ensemble des entiers relatifs la solution évidente $(x_0 = 1 ; y_0 = -2)$ d’où on déduit que le couple $(x_1 = 1352 ; y_0 = -2704)$ est solution de l’équation proposée dans l’ensemble des entiers relatifs. On en déduit dans ce même ensemble les solutions : $(x = 1352 - 10k ; y = -2704 + 21k)$ avec k entier relatif.

On cherche les entiers k pour lesquels les deux nombres sont des entiers naturels, c'est-à-dire tels que, en même temps : $k \leq 135,2$ et $k \geq \frac{2704}{21}$ (dont une valeur approchée à 0,1 est 128,8).

8

<p>Il nous reste les entiers k tels que $129 \leq k \leq 135$. Nous obtenons ainsi les diverses solutions déjà détectées autrement.</p>	<pre>>>> def diophant(): for k in range(129, 136): print(1352-10*k, 21*k-2704) >>> diophant() 62 5 52 26 42 47 32 68 22 89 12 110 2 131</pre>
---	--

X - Analyse de ressources

1. Exercice de l'annexe 16

a. Cet exercice permet de mettre en défaut une démarche basée sur une étude d'exemples. Ce n'est pas parce qu'une propriété est vraie pour certaines valeurs de n (en particulier « au moins jusqu'à » une certaine valeur) qu'elle est vraie pour toute valeur de n . Il est destiné à contredire des raisonnements style : « On voit que la propriété Tartempion est vraie pour n égal à 1, 2, 3, 4 et 5 donc elle est vraie pour tout n »

b. On peut faire remarquer que la négation d'une propriété telle que « Pour tout entier n , la propriété Tartempion est vraie » est « Il existe une valeur de n pour laquelle la propriété « non Tartempion » est vraie ». En l'occurrence, le fait que l'entier $u(n) = n^2 + n + 41$ ne soit pas un nombre premier lorsque $n = 41$ suffit pour invalider l'assertion proposée.

La vérification d'une propriété pour un certain nombre d'exemples, aussi grand soit-il, ne suffit pas pour la démontrer, alors qu'un seul contre-exemple suffit à l'invalider.

2. Exercice de l'annexe 17 :

L'erreur de raisonnement se trouve dans l'hérédité, qui présuppose que l'urne contient au moins deux boules. Lorsque l'urne ne contient qu'une seule boule, il n'est pas possible d'enlever une première boule, puis une autre différente de la première. L'hérédité ne fonctionne pas.

Il s'agit là d'un exercice-marronnier dont l'intérêt est assez limité. Ce n'est pas là qu'il y a le principal enjeu de la récurrence.