Terminale S spécialité Amérique du Nord 2018 : Modèle de Lotka – Volterra, une généralisation

La partie B de l'exercice 4 de ce sujet présente un exemple d'évolution selon un modèle proies / prédateurs. On se propose ici d'étudier quelques aspects d'une approximation de ce modèle.

1. Le modèle discrétisé (Lotka-Volterra)

On s'intéresse à la cohabitation sur un territoire de deux espèces : des proies et leurs prédateurs.
On convient d'une année de référence et on note u_0 le nombre de proies et v_0 le nombre de prédateurs à une certaine date de cette année-là.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de proies et v_n le nombre de prédateurs à la date anniversaire, n années plus tard.

On suppose qu'il existe quatre réels strictement positifs h, m, α, β avec en outre $0<m<1$ tels que pour tout entier naturel n : $\begin{cases} u_{n+1}=(1+h)u_n-\alpha\times u_n\times v_n \\ v_{n+1}=(1-m)v_n+\beta\times u_n\times v_n \end{cases}$

Ces relations ont un sens sous condition de positivité, c'est-à-dire sous condition que $v_n \le \dfrac{1+h}{\alpha}$

Ces relations de récurrence s'écrivent, de façon équivalente pour des populations non nulles :

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=h-\alpha v_n \quad (1) \\ \dfrac{v_{n+1}-v_n}{v_n}=-m+\beta u_n \quad (2) \end{cases}.$$

La relation (1) exprime le taux de variation de la population des proies.

- Le coefficient h est le taux d'accroissement naturel de cette population dû à la natalité en l'absence de prédateurs.
- Le terme $-\alpha v_n$ exprime que le taux de mortalité est proportionnel à la population des prédateurs, le coefficient de proportionnalité étant α.

La relation (2) exprime le taux de variation de la population des prédateurs.

- Le coefficient $-m$ est le taux de mortalité annuel de cette population.
- Le terme βv_n exprime que le taux de natalité est proportionnel à la population des proies, le coefficient de proportionnalité étant β.

1. Montrer qu'il existe un état stable non nul, c'est-à-dire des valeurs de u_0 et v_0 non nulles telles que les suites (u_n) et (v_n) sont stationnaires. On note respectivement u et v ces valeurs non nulles qui rendent stationnaires les deux suites (u_n) et (v_n).

2. On définit deux suites auxiliaires par, pour tout entier naturel n : $\begin{cases} x_n=u_n-u \\ y_n=v_n-v \end{cases}$. Etablir que ces suites auxiliaires satisfont les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{\alpha m}{\beta}y_n-a\,x_n\times y_n \\ y_{n+1}=\dfrac{\beta h}{\alpha}x_n+y_n+\beta\,x_n\times y_n \end{cases}.$$

On se propose d'étudier une approximation de ce qu'il se passe pour des situations proches de l'équilibre.

Pour cela, on ne tient pas compte des termes produit $x_n \times y_n$ dans les relations de récurrence que l'on vient d'établir, en les considérant comme négligeables relativement aux termes linéaires.

On convient de retenir comme relations de récurrence d'approximation les relations :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{\alpha m}{\beta} y_n \\ y_{n+1} = \dfrac{\beta h}{\alpha} x_n + y_n \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire matriciellement : } \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} \underset{gj}{=} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha m}{\beta} \\ \dfrac{\beta h}{\alpha} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

On note A la matrice : $A \underset{gj}{=} \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha m}{\beta} \\ \dfrac{\beta h}{\alpha} & 1 \end{pmatrix}$.

Par une récurrence évidente, il apparaît que pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \underset{gj}{=} A^n \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Un enjeu majeur est de parvenir à calculer A^n.

On pose : $I \underset{gj}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $R \underset{gj}{=} \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\alpha m}{\beta} \\ \dfrac{\beta h}{\alpha} & 0 \end{pmatrix}$. Avec ces notations : $A = I + R$

2. Calcul de la puissance *n*-ième de la matrice *A*, un premier résultat.

2.1. Calculer les matrices R^2 ; R^3 ; R^4.

2.2. Soit k un entier naturel. Exprimer en fonction de *k*, *h* et *m* les matrices : R^{4k} ; R^{4k+1} ; R^{4k+2} ; R^{4k+3}.

2.3. Montrer que pour tout entier naturel n :

$$A^n = \left(\sum_{0 \le 4k \le n} \binom{n}{4k} h^{2k} m^{2k} - \sum_{2 \le 4k+2 \le n} \binom{n}{4k+2} h^{2k+1} m^{2k+1} \right) I \underset{gj}{+} \left(\sum_{2 \le 4k+2 \le n} \binom{n}{4k+1} h^{2k} m^{2k} - \sum_{3 \le 4k+3 \le n} \binom{n}{4k+3} h^{2k+1} m^{2k+1} \right) R$$

Il reste à condenser ces expressions en sigma.

3. Des expressions condensées des sommes sigma dans un cas plus général.

On rappelle le résultat obtenu dans le problème « renards et campagnols », que l'on ne redémontre pas ici :
« Soit x un nombre réel strictement positif. On considère le nombre complexe : $z = 1 + \mathbf{i}\,x$

Si on pose : $\begin{cases} a_n(x) = \displaystyle\sum_{0 \le 4k \le n} \binom{n}{4k} x^{4k} - \sum_{2 \le 4k+2 \le n} \binom{n}{4k+2} x^{4k+2} \\ b_n(x) = \displaystyle\sum_{2 \le 4k+2 \le n} \binom{n}{4k+1} x^{4k+1} - \sum_{3 \le 4k+3 \le n} \binom{n}{4k+3} x^{4k+3} \end{cases}$ alors : $z^n = a_n(x) + \mathbf{i}\,b_n(x)$ »

3.1. En appliquant ces résultats pour une valeur de x que l'on précisera, exprimer la matrice A^n. (Utiliser la forme trigonométrique, que l'on précisera, de z^n)

3.2. Donner des formules explicites pour x_n et y_n.

3. Eléments de correction

1. S'il existe un état stable $(u\ ;\ v)$, cet état doit être tel que : $\begin{cases} u=(1+h)u-\alpha\times u\times v \\ v=(1-m)v+\beta\times u\times v \end{cases}$ c'est-à-dire tel que $\begin{cases}(h-\alpha v)\times u=0 \\ (\beta u-m)\times v=0\end{cases}$. On obtient un état stable non nul avec : $\left| u=\dfrac{m}{\beta} \quad v=\dfrac{h}{\alpha}\right.$

Les suites des écarts à l'équilibre seront définies par les relations : ${\scriptstyle gilbertjulia2018}\begin{cases} x_n=u_n-\dfrac{m}{\beta} \\ y_n=v_n-\dfrac{h}{\alpha}\end{cases}$

2. Les termes de rangs consécutifs n et $n+1$ des suites auxiliaires vérifient :

$$\begin{cases} x_{n+1}+\dfrac{m}{\beta}=(1+h)\left(x_n+\dfrac{m}{\beta}\right)\underset{gj}{-}\alpha\times\left(x_n+\dfrac{m}{\beta}\right)\times\left(y_n+\dfrac{h}{\alpha}\right) \\ y_{n+1}+\dfrac{h}{\alpha}=(1-m)\left(y_n+\dfrac{h}{\alpha}\right)\underset{gj}{+}\beta\left(x_n+\dfrac{m}{\beta}\right)\times\left(y_n+\dfrac{h}{\alpha}\right)\end{cases}$$

c'est-à-dire les relations : ${\scriptstyle gilbertjulia2018}\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{\alpha m}{\beta}y_n-\alpha x_n\times y_n \\ y_{n+1}=\dfrac{\beta h}{\alpha}x_n+y_n+\beta\, x_n\times y_n\end{cases}$

On retient comme relations de récurrence d'approximation les relations : ${\scriptstyle gilbertjulia2018}\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{\alpha m}{\beta}y_n \\ y_{n+1}=\dfrac{\beta h}{\alpha}x_n+y_n\end{cases}$

C'est-à-dire, matriciellement : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1}\end{pmatrix}\underset{gj}{=}\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha m}{\beta} \\ \dfrac{\beta h}{\alpha} & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} x_n \\ y_n\end{pmatrix}$

On pose $A\underset{gj}{=}\begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{\alpha m}{\beta} \\ \dfrac{\beta h}{\alpha} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -\alpha u \\ \beta v & 1\end{pmatrix}$; $I\underset{gj}{=}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$; $R=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{\alpha m}{\beta} \\ \dfrac{\beta h}{\alpha} & 0\end{pmatrix}\underset{gj}{=}\begin{pmatrix} 0 & -\alpha u \\ \beta v & 0\end{pmatrix}$.

Avec ces notations : $A=I+R$

2. Pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \underset{gj}{=} A^n \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et la question majeure est maintenant d'expliciter $A^n = (I+R)^n$.

2.1. $R^2 = -hm\,I$; $R^3 = -hm\,R$; $R^4 = h^2\,m^2\,I$

2.2. Soit k un entier naturel. Alors : $R^{4k} = \left(R^4\right)^k = \left(h^2\,m^2\,I\right)^k = h^{2k}\,m^{2k}\,I$ et en conséquence :

$R^{4k+1} = h^{2k}\,m^{2k}\,R$; $R^{4k+2} = -h^{2k+1}\,m^{2k+1}\,I$; $R^{4k+3} = -h^{2k+1}\,m^{2k+1}\,R$

2.3. $A^n = (I+R)^n = \sum_{j=0}^{j=n} \binom{n}{j} R^j$ ce qui donne, en ordonnant suivant les valeurs des puissances de R :

$$A^n = \sum_{0\le 4k\le n} \binom{n}{4k} R^{4k} \underset{gj}{+} \sum_{1\le 4k+1\le n} \binom{n}{4k+1} R^{4k+1} - \sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+2} R^{4k+2} - \sum_{3\le 4k+3\le n} \binom{n}{4k+3} R^{4k+3}$$

Compte tenu des valeurs de ces puissances de matrices :

$$A^n = \left(\sum_{0\le 4k\le n} \binom{n}{4k} h^{2k} m^{2k} - \sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+2} h^{2k+1}\,m^{2k+1} \right) I \underset{gj}{+} \left(\sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+1} h^{2k} m^{2k} - \sum_{3\le 4k+3\le n} \binom{n}{4k+3} h^{2k+1}\,m^{2k+1} \right) R$$

3. On applique les formules avec : $x = \sqrt{hm}$:

$$\begin{cases} a_n\left(\sqrt{hm}\right) \underset{gj}{=} \sum_{0\le 4k\le n} \binom{n}{4k} h^{2k} q^{2k} - \sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+2} h^{2k+1} m^{2k+1} \\ b_n\left(\sqrt{hm}\right) = \sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+1} h^{2k} m^{2k} \sqrt{hm} - \sum_{3\le 4k+3\le n} \binom{n}{4k+3} h^{2k+1} m^{2k+1} \sqrt{hm} \end{cases}$$

Alors : $\left(1+\mathbf{i}\sqrt{hm}\right)^n = a_n\left(\sqrt{hm}\right) + \mathbf{i}\,b_n\left(\sqrt{hm}\right)$

On obtient :

$$\sum_{0\le 4k\le n}\binom{n}{4k}h^{2k}m^{2k}-\sum_{2\le 4k+2\le n}\binom{n}{4k+2}h^{2k+1}m^{2k+1}=\mathrm{Re}\left(\left(1+\mathbf{i}\sqrt{h\,m}\right)^{n}\right)$$

$$\sum_{2\le 4k+2\le n}\binom{n}{4k+1}h^{2k}m^{2k}-\sum_{3\le 4k+3\le n}\binom{n}{4k+3}h^{2k+1}m^{2k+1}=\frac{1}{\sqrt{h\,m}}\,\mathrm{Im}\left(\left(1+\mathbf{i}\sqrt{h\,m}\right)^{n}\right)$$

Or le module de z est égal à $\sqrt{1+h\,m}$ et un argument θ est déterminé par ses lignes trigonométriques $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+h\,m}}\\ \sin\theta=\dfrac{\sqrt{h\,m}}{\sqrt{1+h\,m}}\end{cases}$. Le réel $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h\,m}}\right)$ en est un.

Dans ces conditions : $A^n=\left(\sqrt{1+h\,m}\right)^n\left(\cos(n\,\theta)I+\sin(n\,\theta)\dfrac{1}{\sqrt{h\,m}}R\right)$

La matrice A^n est la matrice : $A^n\underset{gj}{=}\left(\sqrt{1+h\,m}\right)^n\begin{pmatrix}\cos(n\theta) & -\dfrac{\alpha}{\beta}\sqrt{\dfrac{m}{h}}\sin(n\theta)\\ \dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\dfrac{h}{m}}\sin(n\theta) & \cos(n\theta)\end{pmatrix}$

3.2. Si la situation initiale est $\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}$ alors : $\begin{cases}x_n\underset{gj}{=}\left(\sqrt{1+h\,m}\right)^n\left(x_0\cos(n\theta)-\dfrac{\alpha}{\beta}\sqrt{\dfrac{m}{h}}\,y_0\sin(n\theta)\right)\\ y_n\underset{gj}{=}\left(\sqrt{1+h\,m}\right)^n\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\dfrac{h}{m}}\,x_0\sin(n\theta)+y_0\cos(n\theta)\right)\end{cases}$

Il en résulte les relations suivantes pour u_n ; v_n :

$$\begin{cases}u_n=x_n+\dfrac{m}{\beta}\underset{gj}{=}\dfrac{m}{\beta}+\left(\sqrt{1+h\,m}\right)^n\left(\left(u_0-\dfrac{m}{\beta}\right)\cos(n\theta)-\dfrac{\alpha}{\beta}\sqrt{\dfrac{m}{h}}\left(v_0-\dfrac{h}{\alpha}\right)\sin(n\theta)\right)\\ v_n=y_n+\dfrac{h}{\alpha}\underset{gj}{=}\dfrac{h}{\alpha}+\left(\sqrt{1+h\,m}\right)^n\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\dfrac{h}{m}}\left(u_0-\dfrac{m}{\beta}\right)\sin(n\theta)+\left(v_0-\dfrac{h}{\alpha}\right)\cos(n\theta)\right)\end{cases}$$

La présence du terme $\left(\sqrt{1+h\,m}\right)^n$ montre l'instabilité à laquelle on aboutit en discrétisant. Cette modélisation a un sens pour des valeurs initiales proches de l'équilibre, pour un coefficient $1+h\,m$ qui n'est pas beaucoup plus grand que 1, et pour des petites valeurs de n (donc sur un court terme).

4. Un exemple

Supposons : $\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}2\,u_n - 0{,}002 \times u_n \times v_n \\ v_{n+1} = 0{,}75\ v_n + 0{,}0001 \times u_n \times v_n \end{cases}$, soit : $h = 0{,}2$; $m = 0{,}25$; $\alpha = 0{,}002$; $\beta = 0{,}0001$

Dans ce cas, l'état stable est $(u = 2500 \text{ ; } v = 100)$.

Les formules explicites de u_n et de v_n font l'objet de définitions fonctionnelles

Define $f(h,m,a,b,uo,vo,n) = \frac{m}{b} + (1+h\cdot m)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\left(uo - \frac{m}{b}\right) \cdot \cos\left(n \cdot \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+h\cdot m}}\right)\right) - \frac{a}{b} \cdot \sqrt{\frac{m}{h}} \cdot \left(vo - \frac{h}{a}\right) \cdot \right.$ ▸

Terminé

Define $g(h,m,a,b,uo,vo,n) = \frac{h}{a} + (1+h\cdot m)^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\left(vo - \frac{h}{a}\right) \cdot \cos\left(n \cdot \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+h\cdot m}}\right)\right) + \frac{b}{a} \cdot \sqrt{\frac{h}{m}} \cdot \left(uo - \frac{m}{b}\right) \cdot \right.$ ▸

Terminé

Supposons en outre que $\begin{cases} u_0 = 2500 \\ v_0 = 105 \end{cases}$

Les colonnes **ue** et **ve** sont calculées à partir des formules de récurrence exactes. Les colonnes **ua** et **va** sont calculées avec les formules explicites du modèle d'approximation.

	A nn	B ue	C ve	D ua	E va	F	G	H
=	=seq(r			=seq(roun	=seq(max(			
1	0	2500	105	2500.	105.	gilbertjulia2018		
2	1	2475.	105.	2475.	105.			
3	2	2450.	105.	2450.	105.			
4	3	2426.	104.	2426.	104.			
5	4	2407.	103.	2405.	104.			
6	5	2393.	102.	2387.	103.			
7	6	2383.	101.	2375.	101.			
8	7	2378.	100.	2367.	100.			
9	8	2378.	99.	2367.	99.			
10	9	2383.	98.	2372.	98.			
11	10	2393.	97.	2385.	96.			
12	11	2407.	96.	2403.	95.			

D **ua**:=seq(round(max(**f**(0.2,0.25,0.002,1.E-4,2500,105,n),0),0),n,0,25)

Ce qui donne des nuages de points de ce genre (en bleu, avec les relations de récurrence de Volterra, en rouge avec les formules explicites d'approximation). Ici, ceux des proies.