

Migration barycentrique

La technique du « morphing » ou « migration » consiste à transformer, par une animation, un objet géométrique en un autre objet géométrique. Elle est utilisée par exemple sur des écrans d'ordinateur pour obtenir des écrans de veille. Le problème proposé consiste à étudier quelques effets de migration dans des cas très simples.

Le cadre est celui d'un plan affine P dont on notera éventuellement Π le plan vectoriel associé.

On rappelle une caractérisation d'un segment $[AB]$ du plan : le segment $[AB]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients positifs.

Ce segment est aussi l'ensemble des points M du plan affine tels que : $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$, $0 \leq \lambda \leq 1$

1. Le sujet

0. Préliminaire. Migration d'un point vers un autre point.

A et A' sont deux points distincts donnés du plan. Soit k un nombre réel donné de l'intervalle $[0, 1]$. On lui associe le point M_k barycentre du système : $\{(A, 1-k); (A', k)\}$.

0.1. Exprimer $\overrightarrow{AM_k}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$

0.2. Préciser les points $M_0, M_1, M_{\frac{1}{2}}$

0.3. Montrer que l'ensemble des points M_k lorsque k décrit $[0, 1]$ est le segment $[AA']$.

On dit que lorsque k varie de 0 à 1 ce point M_k « migre » de A vers A' .

On peut en effet, à l'aide d'une animation, faire visualiser sur un écran d'ordinateur ou de calculatrice le déplacement du point M_k de A vers A' .

Partie 1. Migration d'un segment vers un autre segment.

On se donne deux segments $[AB]$ et $[A'B']$ (où A et B sont distincts, de même que A' et B').

À tout réel k de l'intervalle $[0, 1]$, on associe :

- Le point M_k barycentre de $\{(A, 1-k); (A', k)\}$
- Le point N_k barycentre de $\{(B, 1-k); (B', k)\}$
- Le segment $[M_k N_k]$

1. Identifier les points $M_0, N_0; M_1, N_1; M_{\frac{1}{2}}, N_{\frac{1}{2}}$

2. On pose : $\vec{u}_0 = \overrightarrow{AB}$; $\vec{u}_1 = \overrightarrow{A'B'}$ et $\vec{u}(k) = \overrightarrow{M_k N_k}$. Exprimer $\vec{u}(k)$ en fonction de $\vec{u}_0 = \overrightarrow{AB}$ et de $\vec{u}_1 = \overrightarrow{A'B'}$.

3. Donner des conditions, portant sur A, B, A', B' pour qu'il existe une valeur k de $]0, 1[$ telle que $M_k = N_k$

3.1. Montrer que, si (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, alors pour tout k tel que $M_k \neq N_k$ la droite $(M_k N_k)$ leur est parallèle.

3.2. Montrer que réciproquement, s'il existe un réel k , non nul et distinct de 1 tel que $(M_k N_k)$ soit parallèle à l'une des droites (AB) ou $(A'B')$, alors (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

4.1. On note I_k le milieu gju2016 de $[M_k N_k]$. Quel est l'ensemble des points I_k lorsque k décrit $[0, 1]$?

4.2. Plus généralement, soit t un réel fixé de $[0, 1]$. Pour tout réel k de $[0, 1]$, on note T_k le barycentre de $(M_k, 1-t)$ et (N_k, t) . Quel est l'ensemble des points T_k lorsque k décrit $[0, 1]$?

Partie 2. Deux exemples de migration d'un quadrilatère vers un autre quadrilatère.

On se donne deux quadrilatères $ABCD$ noté Q et $A'B'C'D'$ noté Q' .

Pour chaque réel k de $[0, 1]$, on désigne par Q_k le quadrilatère $A_k B_k C_k D_k$ où A_k, B_k, C_k, D_k sont les barycentres respectivement des systèmes $\{(A, 1-k), (A', k)\}$; $\{(B, 1-k), (B', k)\}$; $\{(C, 1-k), (C', k)\}$ et $\{(D, 1-k), (D', k)\}$

1. Montrer que, si Q et Q' sont deux parallélogrammes, alors pour tout k de $[0, 1]$ Q_k est un parallélogramme.

2. Dans cette question, on suppose que le plan est euclidien orienté et que Q et Q' sont deux carrés directs. Montrer gju2016 qu'alors pour tout k de $[0, 1]$ Q_k est un carré direct.

Partie 3. Migration d'une courbe vers une autre courbe.

Dans cette partie, on considère deux fonctions f et g définies et dérivables sur un même intervalle fermé borné $[a, b]$ ainsi que leurs courbes représentatives C_f et C_g dans un même repère.

On se propose de construire une « migration » gju2016 de C_f vers C_g dans le cas général et d'étudier un exemple.

Pour cela, on procède de la façon suivante :

- Pour tout réel t appartenant à $[0, 1]$, on considère les gju2016 points F_t de C_f et G_t de C_g de même abscisse $x_t = a(1-t) + bt$.
- On fait migrer chaque point F_t vers le point correspondant G_t comme précisé en préliminaire, c'est-à-dire que, à tout réel k appartenant à $[0, 1]$, on associe le point $M_{k,t}$ barycentre de $\{(F_t, 1-k), (G_t, k)\}$. Pour t fixé, on sait que le point $M_{k,t}$ décrit le segment $[F_t G_t]$ lorsque k décrit l'intervalle $[0, 1]$.

L'intérêt est de savoir ce qu'il se passe pour k fixé, c'est-à-dire de déterminer d'une façon ou d'une autre quel est l'ensemble : $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$.

C'est cette courbe qui migre de C_f vers C_g lorsque k varie de 0 à 1.

1. Déterminer en fonction de x_t et de k les coordonnées du point $M_{k,t}$. En déduire que l'ensemble $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$ est la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto h_k(x) = (1-k)f(x) + k g(x)$ définie sur l'intervalle $[a, b]$.

2. Dans cet exemple on suppose que f est définie sur l'intervalle $[-1, 1]$ par : $f(x) = x^2 - x$ et que g est définie sur le même intervalle $[-1, 1]$ par : $g(x) = 7 - 4x^2$.

On fait migrer l'arc de parabole C_f vers l'arc de parabole C_g .

2.1. Donner une équation cartésienne de la courbe $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$

2.2. Représenter sur un même graphique l'arc de parabole C_f , l'arc de parabole C_g et deux ensembles $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$ de votre choix (autres que Γ_0 et Γ_1)

2.3. Existe-t-il une valeur de k pour laquelle $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$ est un segment de droite ?

2. Pour aller plus loin

On suppose maintenant que f est définie et dérivable sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ tandis que g est définie et dérivable sur un autre intervalle fermé borné $[a', b']$.

Il est possible de construire une migration d'une courbe vers l'autre puis de visualiser cette migration sur un écran d'ordinateur ou de calculatrice :

- Pour tout réel t appartenant à $[0, 1]$, on considère le point F_t de C_f d'abscisse $x_t = a(1-t) + bt$ et le point G_t de C_g d'abscisse $x'_t = a'(1-t) + b't$.
- On fait migrer chaque point F_t vers le point correspondant G_t , c'est-à-dire que, à tout réel k appartenant à $[0, 1]$, on associe le point $M_{k,t}$ barycentre de $\{(F_t, 1-k) ; (G_t, k)\}$ puis on fait varier k .

Déterminer en fonction de t et de k les coordonnées du point $M_{k,t}$. En déduire un système d'équations paramétriques de l'ensemble $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$.

Application : f est définie sur l'intervalle $[-4, 0]$ par : $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x$ et g est définie sur $[-1, 2]$ par : $g(x) = 4 - x^2$. Faire visualiser une migration de l'arc de parabole C_f vers l'arc de parabole C_g sur un ordinateur ou une calculatrice.

3. Eléments de correction

Préliminaire

0.1. De façon immédiate : $\overrightarrow{AM_k} = k \overrightarrow{AA'}$

0.2. $M_0 = A$, $M_1 = A'$, $M_{\frac{1}{2}}$ est le milieu de $[AA']$.

0.3. La relation : $\overrightarrow{AM_k} = k \overrightarrow{AA'}$ implique que M_k appartient à la droite (AA') . De plus, le rapport de colinéarité k appartenant à $]0; 1[$, M_k appartient au segment $[AA']$.

Réciproquement, si un point M du plan appartient au segment $[AA']$, alors il est barycentre des extrémités affectées de deux coefficients positifs (non tous deux nuls cela va de soi) $\{(A, a); (A', a')\}$. Par

homogénéité, il est barycentre de $\left\{ \left(A, 1 - \frac{a'}{a+a'} \right) ; \left(A', \frac{a'}{a+a'} \right) \right\}$. Puisque les deux coefficients sont

positifs, $0 \leq \frac{a}{a+a'} \leq 1$. Le point M est le point M_k lorsque $k = \frac{a}{a+a'}$.

L'ensemble des points M_k est exactement le segment $[AA']$.

Partie 1. migration d'un segment vers un autre.

1. $M_0 = A$, $N_0 = B$; $M_1 = A'$, $N_1 = B'$; $M_{\frac{1}{2}}$, $N_{\frac{1}{2}}$ sont les milieux respectifs de $[AA']$ et $[BB']$.

2. D'après la partie préliminaire : $\overrightarrow{AM_k} = k \overrightarrow{AA'}$; $\overrightarrow{BN_k} = k \overrightarrow{BB'}$. On en déduit :

$$\overrightarrow{M_k N_k} = \overrightarrow{M_k A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN_k} = k \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + k \overrightarrow{BB'} = (1-k) \overrightarrow{AB} + k (\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'})$$

$$\overrightarrow{M_k N_k} = (1-k) \overrightarrow{AB} + k \overrightarrow{A'B'}$$

Ainsi, $\vec{u}_0 = \overrightarrow{AB}$; $\vec{u}_1 = \overrightarrow{A'B'}$ et $\vec{u}(k) = (1-k)\vec{u} + k.\vec{u}'$.

2. Il y aura confusion $M_k = N_k$ si et seulement si il existe une valeur k appartenant à $]0; 1[$ (par hypothèse, la confusion n'a pas lieu ni pour $k = 0$ ni pour $k = 1$) telle que : $(1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{A'B'} = \vec{0}$.

C'est-à-dire telle que : $\overrightarrow{A'B'} = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \overrightarrow{AB}$.

Puisque $0 < k < 1$, $1 - \frac{1}{k} < 0$.

- Une condition nécessaire est que \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ soient colinéaires et de sens opposés.
- Réciproquement, si \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires et de sens opposés, il existe un réel λ strictement positif : $\overrightarrow{A'B'} = -\lambda \overrightarrow{AB}$. Alors : $0 < \frac{1}{1+\lambda} < 1$ et on obtient $M_k = N_k$ lorsque : $k = \frac{1}{1+\lambda}$.

« \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires et de sens opposés » est une CNS pour qu'il y ait une confusion $M_k = N_k$.

3.1. Si les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, alors $\vec{u}_0 = \overrightarrow{AB}$; $\vec{u}_1 = \overrightarrow{A'B'}$ sont colinéaires et il en est de même de toute combinaison linéaire $\vec{u}(k) = (1-k)\vec{u}_0 + k.\vec{u}_1$ de ces deux vecteurs. S'il n'y a pas confusion $M_k = N_k$, la droite $(M_k N_k)$ est parallèle aux droites (AB) et $(A'B')$.

3.2. Réciproquement, la relation vectorielle $\vec{u}(k) = (1-k)\vec{u}_0 + k.\vec{u}_1$ met en jeu trois vecteurs dont les coefficients sont tous non nuls dès lors que k est distinct de 0 et de 1. La colinéarité de deux quelconques

d'entre eux implique celle du troisième avec les deux autres. S'il existe une valeur de k distincte de 0 et de 1 telle que $\vec{u}(k) = (1-k)\vec{u}_0 + k\vec{u}_1$ soit colinéaire à $\vec{u}_0 = \overrightarrow{AB}$ ou à $\vec{u}_1 = \overrightarrow{A'B'}$, alors les trois vecteurs sont tous colinéaires et les trois droites sont parallèles.

(Donc, ou bien de ces trois droites il n'y en a jamais deux parallèles, ou bien elles le sont toujours, sauf cas de confusion des points M_k et N_k)

4.1. Le milieu I_k est le barycentre de $\left\{ \left(M_k, \frac{1}{2} \right), \left(N_k, \frac{1}{2} \right) \right\}$. Or, M_k est barycentre de $\{(A, 1-k), (A', k)\}$ et N_k celui de $\{(B, 1-k), (B', k)\}$. Le point I_k est donc le barycentre du système de quatre points : $\left\{ \left(A, \frac{1}{2}(1-k) \right), \left(A', \frac{1}{2}k \right) ; \left(B, \frac{1}{2}(1-k) \right), \left(B', \frac{1}{2}k \right) \right\}$.

Par le théorème d'associativité, on peut grouper autrement cette barycentration : A avec B , groupement qui donne le point pondéré $(I, 1-k)$ et A' avec B' , groupement qui donne le point pondéré (I', k) , où I est le milieu de $[AB]$ et I' celui de $[A'B']$. Ce même point I_t est aussi barycentre de $\{(I, 1-k), (I', k)\}$. Lorsque t varie, d'après la question préliminaire, I_k décrit le segment $[II']$ joignant les milieux des deux segments.

4.2. Plus généralement, T_k le barycentre de $(M_k, 1-t)$ et (N_k, t) .

Or, M_k est barycentre de $\{(A, 1-k); (A', k)\}$ et N_k celui de $\{(B, 1-k); (B', k)\}$. T_k est le barycentre du système de quatre points : $\{(A, (1-k)(1-t)), (A', k(1-t)) ; (B, (1-k)t), (B', kt)\}$.

Par le théorème d'associativité, on peut grouper autrement la barycentration : A avec B , groupement qui donne le point pondéré $(T_0, 1-k)$ et A' avec B' , groupement qui donne le point pondéré (T_1, k) où T_0 et T_1 sont les barycentres respectifs de $\{(A, (1-t)); (B, t)\}$ et de $\{(A', (1-t)); (B', t)\}$.

T_k est barycentre de $\{(T_0, 1-k); (T_1, k)\}$.

On en conclut que, lorsque k varie dans $[0, 1]$, le point T_k décrit le segment $[T_0T_1]$.

Ainsi, le fait de faire migrer seulement les deux extrémités d'un segment vers les extrémités de l'autre détermine une migration « point par point » d'un segment vers l'autre. Dans la migration d'une courbe vers une autre de la partie suivante, il faudra justement agir « point par point », la migration des extrémités ne suffit plus à déterminer celle de l'arc d'une courbe.

Partie 2

1. D'après les résultats de la première partie : (**Partie 1, question 2**)

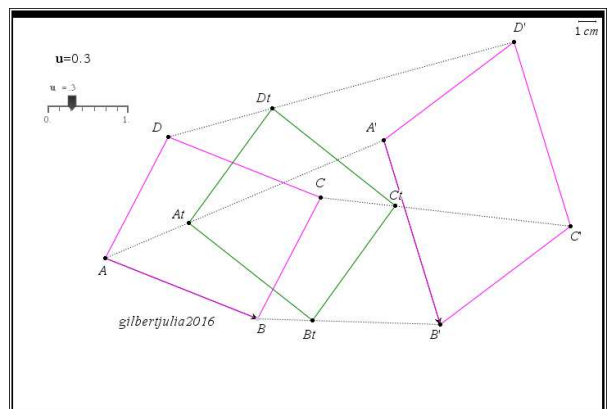
$$\vec{A_k B_k} = (1-k)\vec{AB} + k\vec{A'B'}$$

et de même :

$$\vec{D_k C_k} = (1-k)\vec{DC} + k\vec{D'C'}$$

Mais Si Q et Q' sont deux parallélogrammes, alors $\vec{DC} = \vec{AB}$ et aussi $\vec{D'C'} = \vec{A'B'}$.

Donc pour tout réel k de $[0, 1]$ $\vec{D_k C_k} = \vec{A_k B_k}$ ce qui prouve que Q_k est aussi un parallélogramme.



2. Q_k est au moins un parallélogramme.

Puisque Q est un carré direct, D est image de A par la rotation r de centre A et d'angle $+\pi/2$.

Puisque Q' est un carré direct, D' est image de A' par la rotation r' de centre A' et d'angle $+\pi/2$.

Ces deux rotations ponctuelles sont associées à la même rotation vectorielle, la rotation d'angle $+\pi/2$ que l'on notera ρ .

Simultanément : $\overrightarrow{AD} = \rho(\overrightarrow{AB})$ et $\overrightarrow{A'D'} = \rho(\overrightarrow{A'B'})$.

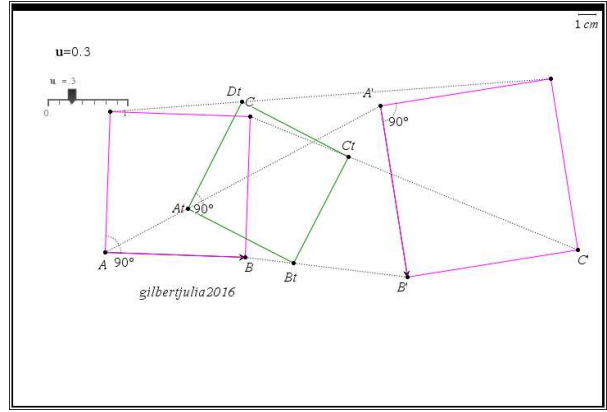
Cette rotation vectorielle est une application linéaire :

$$\overrightarrow{A_k D_k} = (1-k)\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{A'D'} = (1-k)\rho(\overrightarrow{AB}) + k\rho(\overrightarrow{A'B'}) = \rho((1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{A'B'}) = \rho(\overrightarrow{A_k B_k})$$

Quel que soit k appartenant à $[0, 1]$:

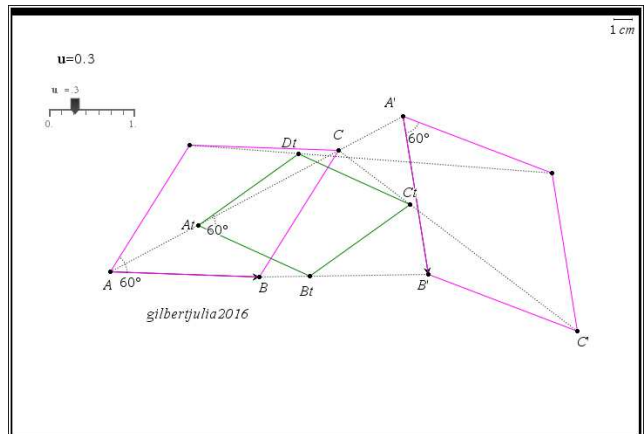
$$\begin{cases} A_k D_k = A_k B_k \\ (\overrightarrow{A_k B_k}, \overrightarrow{A_k D_k}) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{gju2016}$$

Le parallélogramme Q_k est un carré, puisque deux côtés consécutifs sont perpendiculaires et de même longueur. Ce carré est de même sens que $ABCD$.



Cette propriété n'est pas spécifique aux carrés. Ci-contre, $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont deux losanges de même angle orienté au sommet A . Le quadrilatère Q_k est aussi un losange et son angle au sommet A est le même.

La rotation vectorielle associée est maintenant d'angle $\frac{\pi}{3}$.



Partie 3.

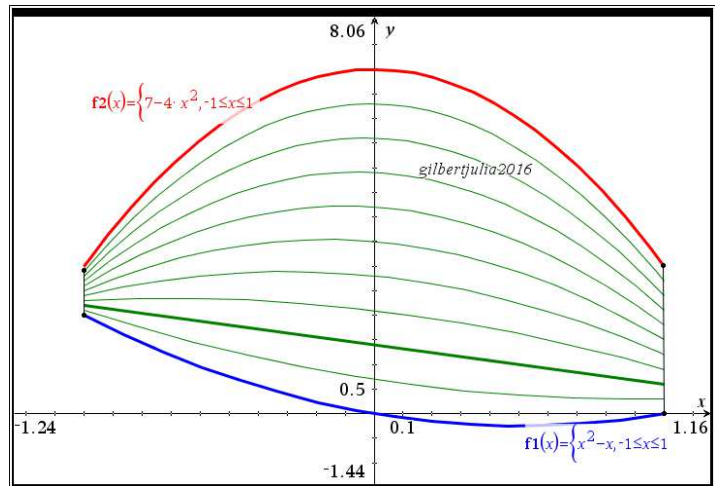
1. Puisque F_t et G_t sont les points de C_f et C_g de même abscisse $x_t = a(1-t) + bt$, leurs ordonnées respectives sont $f(x_t)$ et $g(x_t)$. Le point $M_{k,t}$ a aussi la même abscisse et son ordonnée est :

$$y_{k,t} = (1-k)f(x_t) + k g(x_t).$$

Le réel x_t décrivant exactement l'intervalle $[a, b]$ lorsque t décrit $[0, 1]$, le point $M_{k,t}$ décrit exactement la courbe d'équation $y = (1-t)f(x) + t g(x)$ où $x \in [a, b]$.

2.1. L'ensemble $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$ est ici la courbe représentative de la fonction : $x \mapsto h_k(x) = (1-k)(x^2 - x) + k(7 - 4x^2) = (1-5k)x^2 + (k-1)x + 7k$ définie sur l'intervalle $[-1, 1]$.

2.3. De façon générale, Γ_k est un arc de parabole. Cependant, lorsque $k = \frac{1}{5}$, Γ_k a pour équation : $y = -\frac{4}{5}x + \frac{7}{5}$. Elle représente sur $[-1, 1]$ une fonction affine, c'est un segment de droite (en gras sur la figure ci-contre).



3. Pour aller plus loin

Lorsque les deux fonctions f et g ne sont plus définies sur un même intervalle, on ne peut plus considérer *a priori* que l'ensemble $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$ est la courbe représentative d'une fonction.

Sachant que pour tout réel t de $[0, 1]$ $x_t = a(1-t) + bt$ et $x'_t = a'(1-t) + b't$:

Le point $M_{k,t}$ a pour abscisse : $x_{k,t} = (1-k)x_t + k x'_t$

Son ordonnée est : $y_{k,t} = (1-k)f(x_t) + k g(x'_t)$.

Pour k fixé, l'ensemble $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$ est maintenant déterminé par un système d'équations paramétriques $x_{k,t} = \phi(t) = (1-k)x_t + k x'_t$ et $y_{k,t} = \psi(t) = (1-k)f(x_t) + k g(x'_t)$.

Il n'y a pas lieu d'expliciter davantage. On pourrait écrire :

$x_{k,t} = \phi(t) = t((a-b+a'-b')k - a + a') + (a'-a)k + a$, mais cela ne semble procurer aucun avantage significatif.

2. Dans une page **Calculs**, on définit la fonction de trois variables : $u(a,b,t) = a(1-t) + bt$.

Cette fonction permet de construire d'une part l'abscisse du point $M_{k,t}$:

$x_{k,t} = (1-k)u(a,b,t) + k u(a',b',t)$ qui, pour k fixé, est fonction de la variable t .

Et d'autre part son ordonnée : $y_{k,t} = (1-k)f(u(a,b,t)) + k g(u(a',b',t))$ qui, pour k fixé, est aussi fonction de la variable t .

Définir ensuite la variable k , à l'aide d'une liste pour obtenir plusieurs courbes $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$, ou bien à l'aide d'un curseur pour obtenir une animation et une déformation de $\Gamma_k = \{M_{k,t} ; t \in [0, 1]\}$ lorsqu'on agit sur le curseur.

Il reste à saisir la fonction vectorielle $\begin{cases} x = \phi(t) = x_{k,t} \\ y = \psi(t) = y_{k,t} \end{cases}$ et à la représenter graphiquement.

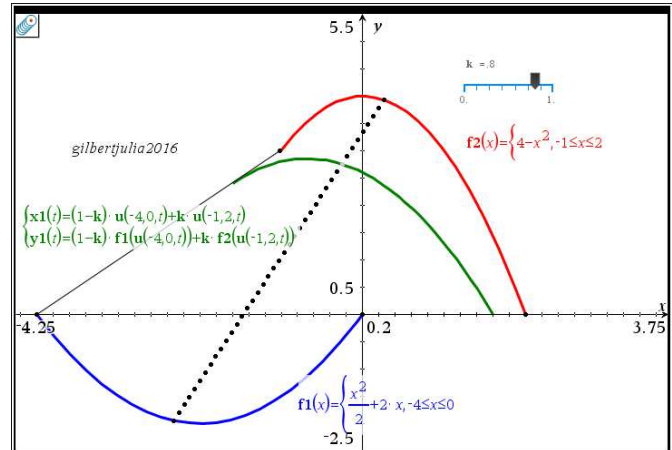
Dans une page **Calculs**, définir préalablement la fonction : $u(a,b,t) = a(1-t) + bt$.

Dans une page **Graphiques** insérer un curseur, lié à la variable k .

Représenter graphiquement les fonctions f et g . Définir Γ_k en tant que courbe paramétrée.

Voici par exemple ci-contre une courbe Γ_k . Elle se déforme lorsqu'on agit sur le curseur.

Le chapelet de points noirs est la trace géométrique laissée par un point de la courbe Γ_k lorsqu'on fait varier k . Cette trace visualise la migration d'un point particulier de C_f vers son point correspondant de C_g .



Les exemples proposés ici ont concerné des arcs de parabole. En changeant les fonctions f et g , on peut bien entendu obtenir des migrations plus « esthétiques ».