

ESD 20193C_01 : Probabilités

NB. Ce sujet est à rapprocher du sujet 2016_02. Il y a tout intérêt à les comparer.

1. Le sujet

A. L'exercice proposé au candidat

À Florence au début du XVII^{ème} siècle, un jeu consistait à jeter trois dés et à miser sur le résultat de la somme des trois dés. Durant sa jeunesse, Cosme II de Médicis, grand-duc de Toscane, a observé de nombreuses parties : il a remarqué qu'il était préférable de miser sur le nombre 10.

Un de ses fidèles disciples lui affirma : « Maître excusez-moi de vous contredire, mais le 9 apparaît plus souvent que le 10 ». Lequel des deux a raison ?

B. Les réponses proposées par des élèves de seconde

Elève 1

J'ai réalisé une feuille de tableur et j'ai tenté de modéliser la situation. Je remarque que le 10 apparaît plus souvent même si c'est parfois le 9.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Dé 1	Dé 2	Dé 3	Somme			
2	2	1	6	9		Apparition du 9	Apparition du 10
3	4	4	2	10		22	18
4	2	2	6	10			
5	4	6	6	16		Testé avec 200 essais	
6	1	5	5	11			
7	6	5	3	14			

Elève 2

J'ai compté les différentes façons d'obtenir 9 avec trois dés. Il y en a six. Puis j'ai fait le même raisonnement avec 10, il y en a six également. J'en déduis que la probabilité de voir apparaître 9 sur la somme des dés est la même que celle de voir apparaître 10. Donc, aucun des deux n'a raison.

C. Les questions à traiter devant le jury

- Analysez les productions de ces deux élèves en mettant en évidence leurs réussites et leurs éventuelles erreurs. Vous préciserez l'aide que vous pourriez leur apporter.
- Présentez une correction de cet exercice telle que vous l'exposeriez devant une classe de seconde.
- Proposez deux exercices sur le thème *probabilités* un au niveau du collège et un au niveau du lycée. L'un des exercices devra permettre de travailler la compétence « modéliser ».

2. Éléments de correction

Voir le sujet ESD2016_02 à propos du « paradoxe du Duc de Toscane ».

1. Analyse des travaux d'élèves.

Bougnègue.

Le cadet Bougnègue 2019 a suivi les traces de son aîné Bougnègue 2016. Cet élève réussit à « élaborer une simulation numérique prenant appui sur la modélisation et utilisant un logiciel ».

Cependant, il en reste au stade du constat. Il n'y a dans sa production aucune tentative de résolution.

L'aide que l'on pourrait lui apporter serait de lui conseiller de commencer à faire des mathématiques.

Plus sérieusement, il faudrait faire prendre conscience à cet élève que, s'il a construit une simulation de la situation, c'est que, implicitement, il a commencé par la modéliser : que représentent les trois nombres « Dé1, Dé2, Dé3 » inscrits sur une même ligne ?

C'est-à-dire qu'il faudrait l'amener à modéliser à l'aide d'un espace probabilisé. En l'occurrence, il faudrait l'amener à une modélisation mathématique explicite par des triplets (x, y, z) de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$ qu'il s'agira ensuite de lui faire trier, en sélectionnant ceux qui réalisent l'évènement « somme 9 » ou « somme 10 ».

Elève 2.

Cet élève a dénombré les décompositions de 9 et de 10 en sommes de trois entiers compris entre 1 et 6. Implicitement, cet élève choisit pour modéliser la situation un univers formé des différentes décompositions de chaque entier compris entre 3 et 18 en sommes de trois entiers compris entre 1 et 6, cet univers étant muni de l'équiprobabilité.

- Il réussit à s'engager dans une démarche de résolution et il utilise correctement le langage des probabilités (« la probabilité de voir apparaître ... »).
- Il échoue à proposer un univers de probabilité pertinent permettant de rendre compte de la situation.

Il s'agit de remettre en cause la pertinence de l'univers avec lequel il travaille. Il faudrait faire prendre conscience à cet élève que les diverses combinaisons de nombres n'ont pas toutes la même probabilité. Par exemple, les combinaisons $3+3+3$, $2+2+5$ et $1+3+5$ n'ont pas la même probabilité. Pour cela, la simulation de Bougnègue pourrait aider pour peu qu'on la modifie (faire dénombrer des combinaisons de type différent et mettre en évidence qu'une combinaison de trois nombres distincts est plus fréquente qu'une combinaison avec deux fois un même nombre et encore plus fréquente qu'un même nombre répété trois fois.

2. Correction de l'exercice.

Voir le sujet ESD2016_02 pour une correction de l'exercice.

3. Commentaire

Remarquons que l'auteur du sujet a choisi une copie d'écran exceptionnelle :

- En premier lieu, remarquons que la probabilité que les trois premiers lancers donnent une somme égale à 9 ou 10, comme nous le constatons sur la copie d'écran, est égale à $\left(\frac{27+25}{216}\right)^3 = \frac{2197}{157464} < 0,014$. Quel bizarre concours de circonstances !
- En second lieu, le nombre de 9 affiché sur la copie d'écran est assez significativement plus grand que le nombre 10 (alors que pourtant « somme 10 » menait par 2 à 1 sur « somme 9 » après 3 lancers ...).

Bougnègue a certainement appuyé *plusieurs fois* sur la touche « Recalcul » (comme probablement l'auteur du sujet (?) avant de choisir cette curieuse copie d'écran ...). Il a observé ce qu'il se passait : quelquefois plus de 9 que de 10, plus souvent plus de 10 que de 9. Mais il n'a fait qu'observer. Il a joué au presse-bouton, sans passer à une étape de traitement mathématique.

Si le duc de Toscane et son disciple avaient disposé l'un et l'autre d'un tableur, nous voyons la différence entre le duc et son disciple.

- Le duc de Toscane aurait fait comme Bougnègue, il aurait appuyé plusieurs fois sur la touche « Recalcul » et aurait basé sa conclusion sur un très grand nombre de lancers.
- Le disciple, quant à lui, n'aurait calculé sa feuille qu'une seule fois. Se basant sur seulement 200 lancers, le hasard a fait qu'il a observé, comme sur la copie d'écran que nous avons sous les yeux, plus de 9 que de 10. Et il en a tiré une conclusion hasardeuse.