

## ESD 2016\_13 : Géométrie

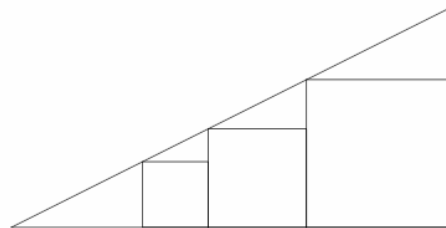
Voici un exercice qui m'a renvoyé à un autre sujet aperçu par hasard dans les archives du concours CIPAS (Canada), d'une difficulté plus élevée que celle requise pour le concours du CAPES. Pour les amateurs et amatrices de challenge, j'ai placé ce sujet « canadien » dans la rubrique « Divers » de la page Ecrit du CAPES.

### 1. Le sujet

#### A. L'exercice proposé au candidat

Le côté du plus petit carré mesure 16 cm et celui du plus grand mesure 36 cm. Combien mesure le côté du carré central ?

(Calendrier mathématique 2016)



#### B. Extrait des programmes mathématiques du collège

*Si la résolution de problèmes permet de déboucher sur l'établissement de connaissances nouvelles, elle est également un moyen privilégié d'en élargir le sens et d'en assurer la maîtrise. Pour cela, les situations plus ouvertes, dans lesquelles les élèves doivent solliciter en autonomie les connaissances acquises, jouent un rôle important. Leur traitement nécessite initiative et imagination et peut être réalisé en faisant appel à différentes stratégies qui doivent être explicitées et confrontées, sans nécessairement que soit privilégiée l'une d'entre elles*

*L'utilisation d'outils logiciels est particulièrement importante et doit être privilégiée chaque fois qu'elle est une aide à l'imagination, à la formulation de conjectures ou au calcul.*

#### C. Le travail à exposer devant le jury

1. Précisez en quoi l'exercice proposé répond aux objectifs assignés à la résolution de problèmes figurant dans l'extrait de programmes ci-dessus.
2. Présentez au moins deux stratégies différentes de résolution de ce problème.
3. En motivant vos choix, proposez deux exercices sur le thème *géométrie* dont un au moins au niveau lycée.

## 2. Préambule

Ce sujet fait écho au ESD2016\_05. Ici aussi, nous sommes amenés à appliquer avec cynisme le dogme ministériel. « Connaissances nouvelles », « élargir le sens », « assurer la maîtrise », « solliciter en autonomie les connaissances acquises », « différentes stratégies », voilà qui est très alléchant et qui promet des lendemains qui chantent. Malheureusement l'éventail des connaissances à acquérir se réduit comme peau de chagrin. On veut bien faire exercer des « compétences » fumeuses, et même les évaluer, mais sur des coquilles vides. Il y a loin du discours à la réalité. En l'état de sabordement dans lequel se plonge l'enseignement des mathématiques, l'exercice de ce jour n'a quasiment aucune chance d'être résolu autrement que par bidouillage, essais et tâtonnements.

## 3. Eléments de correction

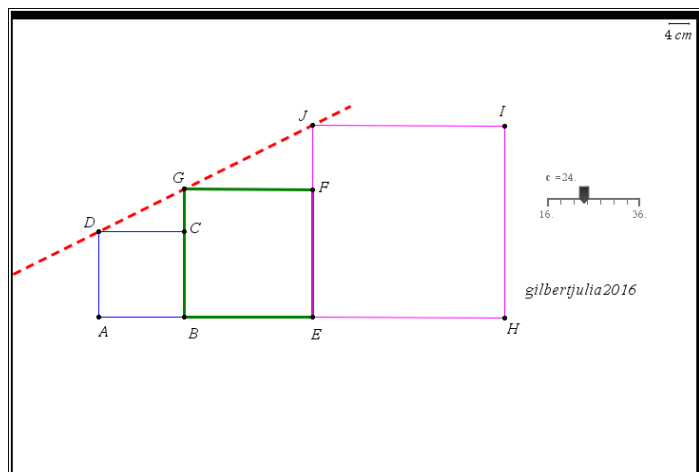
Classé dans le thème général « géométrie », cet exercice pourrait l'être aussi bien dans « prise d'initiative ». En tant que « défi mathématique », cet exercice présente en effet toutes les caractéristiques d'un problème de recherche. On trouvera donc nombre d'arguments justifiant son adéquation aux directives des programmes, non pas uniquement des programmes du collège d'ailleurs.

L'extrait dont on dispose insiste lourdement sur l'apport d'un logiciel.

Une figure empirique laisse conjecturer que les points  $D$ ,  $G$ ,  $J$  sont alignés lorsque le côté du carré central mesure 24 cm, c'est-à-dire lorsque la mesure de ce côté est la *moyenne géométrique* des mesures des côtés du petit et du grand carré.

Ci-contre, on a installé un curseur  $c$  et on a reporté sur une demi-droite d'origine  $A$  les mesures  $16$  ;  $c + 16$  ;  $c + 52$  puis on a construit les trois carrés. En actionnant le curseur, on essaie de provoquer l'alignement des trois points.

gjuilia 2016



2. Quelle que soit la suite des événements, il s'agit d'abord de transformer le schéma de l'énoncé en une figure géométrique, comme cela a été fait sur la figure dynamique :

- Coder la figure en attribuant un nom à chaque point remarquable.

Selon la démarche envisagée :

- Effectuer des tracés intermédiaires.
- Reporter les côtes qui paraissent utiles (qui dépendent de la démarche que l'on projette). La mesure du côté du carré intermédiaire n'est pas connue. Ce report amène à une action décisive : désigner par une lettre ( $x$  par exemple) la mesure du côté du carré intermédiaire.

Voici quelques pistes de résolution. Volontairement, je n'ai pas utilisé les données numériques 16 et 36 pour généraliser la propriété : « Il y a alignement des sommets lorsque les mesures des côtés sont en progression géométrique ». Tout aussi volontairement, je n'ai tenu aucun compte de l'adéquation au contenu des programmes.

On note  $a$  et  $b$  les mesures des côtés respectivement du petit et du grand carré. On note  $x$  le côté du carré intermédiaire. On suppose  $a < x < b$ .

### Solution 1

*Outil des angles et de la trigonométrie*

On compare les tangentes des angles  $\widehat{CDG}$  et  $\widehat{FGJ}$ , soit respectivement  $\frac{x-a}{a}$  et  $\frac{b-x}{x}$ .

Les trois points  $D, G, J$  sont alignés si et seulement si les tangentes de ces angles sont égales.

Ce qui donne :  $\frac{x-a}{a} = \frac{b-x}{x}$  c'est-à-dire :  $x^2 - ab = 0$  puis  $x = \sqrt{ab}$  qui est la moyenne géométrique de  $a$  et  $b$ .

### Solution 2

Outil de la géométrie analytique

On se rapporte à un repère orthonormé d'origine  $A$ .

Les coordonnées des différents points utiles sont :

$D(0; a)$  ;  $G(a; x)$  ;  $J(a+x; b)$ .

Ces trois points sont alignés si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} a & x \\ x-a & b-x \end{vmatrix} = 0 \text{ ce qui donne : } x^2 - ab = 0$$

### Solution 3.

Outil des configurations (théorème de Thalès). S'il y a alignement des sommets, alors :

$\frac{JK}{JF} = \frac{DK}{GF}$  soit :  $\frac{b-a}{b-x} = \frac{x+a}{x}$ . On obtient la même

équation  $x^2 - ab = 0$

### Solution 4.

Outil des transformations (homothéties).

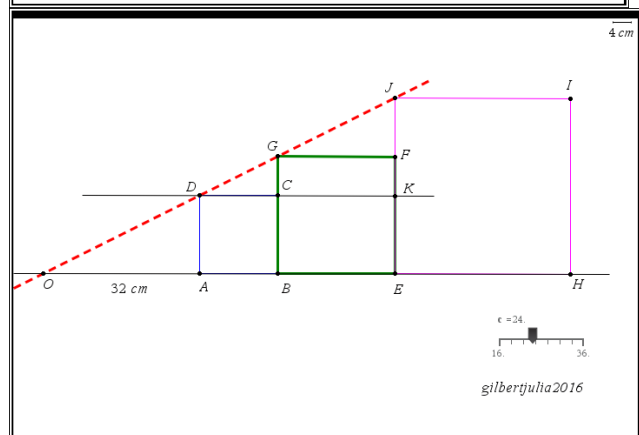
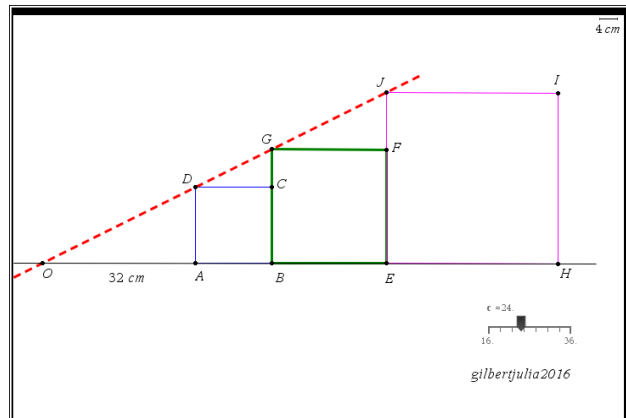
On note  $h$  l'homothétie de centre  $O$  qui transforme  $A$  en  $B$  et  $D$  en  $G$  (le parallélisme de  $(AD)$  et  $(BG)$  justifie son existence). Son rapport est  $\frac{x}{a}$ . L'idée générale est que  $h$  transforme un carré en le carré suivant, le petit en le moyen, le moyen en le grand.

L'image par  $h$  du carré  $ABCD$  est en effet un carré dont  $B$  et  $G$  sont deux sommets. Il en résulte que les deux autres sont  $E$  et  $F$ .  $h$  transforme  $ABCD$  en  $BEFG$ .

$G$  étant intersection de  $(BG)$  avec  $(OG)$  son image est l'intersection des images, c'est-à-dire de  $(EF)$  avec

$(OG)$  :  $G$  a pour image  $J$  :  $\frac{EJ}{BG} = \frac{b}{x} = \frac{x}{a}$

Dans chaque cas, le lecteur prendra soin de relever s'il y a lieu les aménagements (tracés, report de côtes) à apporter à la figure et surtout d'examiner la conformité ou la non conformité avec les programmes actuels du collège ou du lycée.



## 4. Commentaire

Alors, avec logiciel ou sans logiciel ? Et si oui comment ? L'extrait des programmes donné par le jury continue ainsi :

*« Cette utilisation présente sous deux formes indispensables, notamment dans le cadre des compétences du socle commun : l'usage d'un vidéoprojecteur en classe et l'utilisation par les élèves d'ordinateurs « en fond de classe » ou en salle informatique. »*

Ainsi, une utilisation d'un outil logiciel est paraît-il « très importante » sous « deux formes indispensables ».

Il faut prendre en compte que la réalisation d'une figure dynamique est dans ce contexte assez compliquée. Il faut faire preuve d'un peu d'astuce et d'une bonne maîtrise du logiciel pour arriver à un résultat probant (Chouquerouste, au secours !). Certes, une fois la figure réalisée, quelques déplacements de la souris et, ô miracle, l'alignement se produit pour un côté intermédiaire de 24 cm. Il ne reste plus (s'il reste quelque chose ...) à vérifier qu'il y a bien alignement pour cette valeur. Il n'y a même plus d'équation à résoudre puisque, désormais, on en connaît la solution.

- Si la figure est réalisée par le professeur et rétroprojetée, les élèves vont être spectateurs passifs d'une séance de télévision géométrique.
- Imaginons les élèves avec leur logiciel. Evaluons le temps que va prendre la construction d'une figure dynamique exploitable. Disons « un certain temps » tout comme le canon pour se refroidir.

On prétend motiver les élèves à la recherche alors qu'en fait, on fait exactement le contraire.

Pourtant, c'est bien là le discours hypocrite attendu par l'institution et les candidats sont contraints de se lancer dans une longue tirade égrenant les bienfaits de l'utilisation d'un logiciel et défendant le binôme « conjecture et démonstration ».

Il n'y a peut-être une façon de ménager à la fois cette chèvre et ce chou. Admettons que l'on fasse une première figure avec des carrés de côtés 16 et 36 comme dans l'énoncé. On conjecture : « Dans ce cas c'est 24, tout le monde est d'accord ». Ensuite, on change les valeurs. On prend par exemple 12 et 20. On ne parvient plus à créer avec la souris un alignement satisfaisant. Les conjectures « C'est entre 15 et 16 » ; « On fait la moyenne, c'est 16 » ; « C'est 15,5 » sont toutes incertaines et ne règlent pas la question.

Dans ce cas, la démonstration gagne en intérêt (« Qui a raison ? Pourquoi ? »).

Encore faut-il que les élèves disposent d'outils mathématiques performants et les maîtrisent. Compte tenu des nouveaux programmes du collègue, je souhaite bon courage aux jeunes collègues pour en arriver là et je reste sceptique sur la réussite de cette entreprise. Le problème de fond est que l'institution ne demande plus ni des enseignants ni des élèves cet effort, reculant significativement sur la question de l'acquisition des savoirs. Ce genre d'exercice, au demeurant très intéressant, risque bien de ne devenir qu'un support pour un apprentissage probablement inabouti du maniement d'un logiciel au détriment de toute activité mathématique pertinente.

Aux futurs enseignants la mission difficile et pourtant essentielle d'éviter cet écueil. Qu'ils ne comptent pas sur une institution déliquescence tombée entre les mains de quelques Polichinelles de la didactique pour les aider dans cette tâche.