

## Suites d'Eden: Eléments de correction

1. Les sept suites d'Eden sur  $\{1, 2, 3, 4\}$  sont aussi des suites d'Eden sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

On obtient une nouvelle suite d'Eden sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  en prolongeant par 5 les suites de longueur paire sur  $\{1, 2, 3, 4\}$ , ce qui donne les suites  $(1, 2, 5); (1, 4, 5); (3, 4, 5); (1, 2, 3, 4, 5)$  et en considérant une nouvelle suite de longueur 1 :  $(5)$ . On obtient 12 suites d'Eden sur l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , et  $p_5 = 4 ; i_5 = 8$

2.1. On suppose  $n$  pair  $n = 2k$  : Toute suite d'Eden de longueur paire sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  est aussi une suite d'Eden de longueur paire sur  $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$ . Réciproquement, l'entier  $n+1$  étant par hypothèse le nombre impair  $n+1 = 2k+1$ , toute suite d'Eden de longueur paire sur  $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$  se termine par un nombre pair  $< n+1$ , c'est aussi une suite d'Eden sur  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Les suites d'Eden de longueur paire sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  et sur  $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$  sont les mêmes. Ainsi :  $P_{2k+1} = P_{2k}$  et donc  $p_{2k+1} = p_{2k}$

Soit une suite d'Eden de longueur impaire sur  $\{1, 2, \dots, 2k, 2k+1\}$ .

Ou bien elle se termine par  $2k+1$ . S'il ne s'agit pas de la suite de longueur 1 :  $(2k+1)$ , cette suite est une suite d'Eden de longueur paire sur  $\{1, 2, \dots, 2k\}$  prolongée par  $2k+1$ .

Ou bien elle ne se termine pas par  $2k+1$  (donc par un nombre impair plus petit) et alors elle est une suite d'Eden de longueur impaire sur  $\{1, 2, \dots, 2k\}$ .

On réalise ainsi une partition de  $I_{2k+1}$  en trois sous ensembles :  $I_{2k}$ , un ensemble équipotent à  $P_{2k}$  et le singleton  $\{(2k+1)\}$ . Par conséquent :  $i_{2k+1} = i_{2k} + p_{2k} + 1$

2.2. On suppose  $n$  impair  $n = 2k - 1$ . L'entier suivant est  $n+1 = 2k$ . Toute suite d'Eden de longueur impaire sur  $\{1, 2, \dots, 2k-1\}$  est aussi une suite d'Eden de longueur impaire sur  $\{1, 2, \dots, 2k-1, 2k\}$ . Réciproquement, toute suite d'Eden de longueur impaire sur  $\{1, 2, \dots, 2k-1, 2k\}$  se termine par un nombre impair  $< n+1$ , c'est aussi une suite d'Eden sur  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Les suites d'Eden de longueur impaire sur  $\{1, 2, \dots, n\}$  et sur  $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$  sont les mêmes. Ainsi :  $I_{2k+1} = I_{2k}$  et donc  $i_{2k+1} = i_{2k}$

Soit une suite d'Eden de longueur paire sur  $\{1, 2, \dots, 2k-1, 2k\}$ . Une telle suite est composée d'au moins deux nombres.

Ou bien elle se termine par  $2k$ . Cette suite est une suite d'Eden de longueur impaire sur  $\{1, 2, \dots, 2k-1\}$  prolongée par  $2k$ .

Ou bien elle ne se termine pas par  $2k$  (donc par un nombre pair plus petit) et alors elle est une suite d'Eden de longueur paire sur  $\{1, 2, \dots, 2k-1\}$ .

On réalise ainsi une partition de  $P_{2k}$  en deux sous ensembles :  $P_{2k-1}$  et un ensemble équipotent à  $I_{2k-1}$ . Par conséquent :  $p_{2k} = i_{2k-1} + p_{2k-1}$

2.3. Supposons  $n$  pair :  $n = 2k$ .

$$\text{Alors : } e_{2k+1} = p_{2k+1} + i_{2k+1} = p_{2k} + (p_{2k} + i_{2k} + 1) = (p_{2k-1} + i_{2k-1}) + (p_{2k} + i_{2k} + 1) = e_{2k-1} + e_{2k} + 1$$

Supposons  $n$  impair :  $n = 2k - 1$  (avec  $k \geq 2$ )

$$\text{Alors : } e_{2k} = p_{2k} + i_{2k} = (p_{2k-1} + i_{2k-1}) + i_{2k-1} = (p_{2k-1} + i_{2k-1}) + (p_{2k-2} + i_{2k-2} + 1) = e_{2k-1} + e_{2k-2} + 1$$

Quelle que soit la parité de l'entier  $n$ , on obtient la relation :  $e_{n+1} = e_n + e_{n-1} + 1$

3. La construction de la suite  $(e_n)$  montre que l'on a :  
 $e_{20} = 17710$

4.  $(f_{n+1} - a) = (f_n - a) + (f_{n-1} - a) + 1$  soit :  
 $f_{n+1} = f_n + f_{n-1} + 1 - a$ . On obtient une suite de Fibonacci en choisissant  $a = 1$ .  
 Les deux premiers termes en sont :  
 $f_1 = e_1 + 1 = 2$ ;  $f_2 = e_2 + 1 = 3$ .

On parvient à l'expression :

$$f_n = \left(1 + \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$$

On peut contrôler que les premiers termes de la suite  $(f_n - 1)_{n \geq 1}$  donnée par cette expression explicite coïncident bien avec ceux obtenus par la relation de récurrence.

The screenshot shows a CAS calculator interface with the following content:

- Top Panel:**
  - Input:  $\{1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, 143, 232, 376, 609, 986, 1596, 2583, \dots\}$
  - Operation:  $\text{seqgen}()$
  - Output:  $\{1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, 143, 232, 376, 609, 986, 1596, 2583, \dots\}$
- Second Panel:**
  - Input:  $\text{solve}(x^2 - x - 1 = 0, x)$
  - Output:  $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$  or  $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$
- Third Panel:**
  - Input:  $\text{linSolve}\left(\begin{matrix} u+v=2 \\ u \cdot \frac{\sqrt{5}+1}{2} + v \cdot \frac{-\sqrt{5}-1}{2} = 3 \end{matrix}, \{u,v\}\right)$
  - Output:  $\left\{ \frac{2\sqrt{5}+5}{5}, 1 - \frac{2\sqrt{5}}{5} \right\}$
- Fourth Panel:**
  - Input:  $\text{Define } f(n) = \frac{2\sqrt{5}+5}{5} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n-1} + \left(1 - \frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$
  - Output: Terminé
- Fifth Panel:**
  - Input:  $\text{seq}(f(n)-1, n, 1, 20)$
  - Output:  $\{1, 2, 4, 7, 12, 20, 33, 54, 88, 143, 232, 376, 609, 986, 1596, 2583, \dots\}$
- Table:**

	A	e	B	C	D	E
2			2			
3			4			
4			7			
5			12			
6			20			
7			33			
8			54			
9			88			
10			143			
11			232			
12			376			
13			609			
14			986			
15			1596			
16			2583			
17			4180			
18			6764			
19			10945			
20			17710			
- Bottom Panel:**
  - Input:  $e := \text{seqgen}(u/(n-1) + u/(n-2) + 1, n, u, \{1, 20\}, \{1, 2\}, 1)$