Concours Général Bis Maths 2023 : Eléments de correction

Cette année 2023 se caractérise par un sujet « officiel » et un deuxième sujet « officieux ». J'ignore la raison de cette concurrence entre deux sujets différents ; il est possible que le contenu de l'un des deux ait été éventé et ait plus ou moins « fuité » (?).
J'ai publié une correction du sujet 2023 « officiel » sur le site « freemaths », site auquel je participe (correction de concours généraux récents et d'Olympiades mathématiques de Première).
Je publie ici, sur mon site perso, des éléments de correction du deuxième sujet dont l'énoncé est disponible ici ou là (Alexique, mathématiques.net). Cette correction n'a fait l'objet ni d'une relecture minutieuse ni d'un contrôle attentif. Il appartient au lecteur d'en tenir compte. Notamment, mes résultats divergent plus ou moins de ceux attendus vers la fin du problème 3. Il y a assurément des choses à revoir à ce niveau. Dont acte.

Exercice 1 : Comparaison n'est pas raison

Partie 1 : Introduction à la comparaison de suites

On ne perdra jamais de vue dans cet exercice que les suites en jeu sont des suites dont tous les termes sont des réels strictement positifs. C'est dit, une fois pour toutes.

1.a. $\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{w_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{w_n}\right) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}\right) \times \left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{w_n}\right) = 0$

Donc : $\begin{cases} u \ll v \\ v \ll w \end{cases} \Longrightarrow u \ll w$

La négligeabilité d'une suite devant une autre est une relation transitive.

1.b. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1/\left(\frac{u_n}{v_n}\right)\right) = +\infty$. On ne peut pas avoir à la fois $\begin{cases} u \ll v \\ v \ll u \end{cases}$.

La négligeabilité d'une suite devant une autre n'est pas une relation symétrique.

1.c. $\begin{cases} 0 \le u \le v \\ 0 < w \end{cases} \Rightarrow 0 \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{w_n} \le \lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{w_n}$

Donc $\begin{cases} 0 \le u \le v \\ v \ll w \text{ soit } \lim\limits_{n\to\infty} \frac{v_n}{w_n} = 0 \end{cases} \Rightarrow \;\; 0 \le \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{u_n}{w_n}\right) \le \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{v_n}{w_n}\right) = 0$. Ainsi $\begin{cases} 0 \le u \le v \\ v \ll w \end{cases} \Rightarrow u \ll w$

Il est important de noter que la propriété reste vraie si l'on a l'inégalité $u_n \le v_n$ « à partir d'un certain rang ». Le comportement pour les petites valeurs de l'indice n'a pas d'influence sur la tendance à l'infini.

1.d. Si $u \ll v$, on n'a pas nécessairement $u \le v$. Prenons comme contre-exemple la suite *u* constante égale à 1000 pour tout *n* et la suite *v* des entiers naturels. Les 1000 premiers termes de la suite *u* sont plus grands que leurs homologues de la suite *v* mais en fin de compte $u \ll v$ car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000}{n} = 0$.

En revanche, si $u \ll v$, on a nécessairement $u \le v$ « à partir d'un certain rang » (voir la question précédente et la **question 9** où cette idée est exploitée).

1.e. Tout quotient $\frac{a}{b}$ peut aussi bien s'écrire $\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$. Nous en déduisons dans le présent contexte : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{v_n}}{\frac{1}{u_n}}$

Donc : $u \ll v$ si et seulement si $\frac{1}{v} \ll \frac{1}{u}$.

2. Nous pouvons proposer la suite *a* définie par $(a_n)_{n\ge1} = \left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\ge1}$ ainsi que la suite *A* définie par : $(A_n)_{n\ge1} = (n \times u_n)_{n\ge1}$. Nous vérifions sans trop de soucis que $a \ll u \ll A$.

3.a et b. La copie d'écran ci-contre montre que :

$$u \ll r \ll v \ll w$$

Elle montre aussi que s n'est pas négligeable devant u et que u n'est pas négligeable devant s.

Elle montre enfin que $s \ll r$.

Define $u(k)=k^2$	*Terminé*
Define $v(k)=k^3$	*Terminé*
Define $w(k)=e^k$	*Terminé*
Define $r(k)=\sqrt{k^5}$	*Terminé*
Define $s(k)=100\cdot k+k^2$	*Terminé*
$\left\{\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{u(k)}{r(k)}\right), \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{r(k)}{v(k)}\right), \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{v(k)}{w(k)}\right)\right\}$	$\{0,0,0\}$
$\left\{\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{u(k)}{s(k)}\right), \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{s(k)}{u(k)}\right)\right\}$	$\{1,1\}$
$\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{s(k)}{r(k)}\right)$	0

4.a. Nous pouvons proposer la suite $(h_n)_{n\geq 1} = \left(\sqrt{\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$.

4.b. Nous pouvons proposer la moyenne géométrique des deux suites, c'est-à-dire la suite définie par :

$$(h_n)_{n\geq 1} = \left(\sqrt{u_n \times v_n}\right)_{n\geq 1}$$

Nous avons en effet pour tout indice n : $\frac{u_n}{h_n} = \frac{h_n}{v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}}$, de limite nulle quand n tend plus l'infini. Ce qui prouve que $u \ll h \ll v$.

Partie 2 : Echelle de comparaison et encadrement

5.a. Il semble bien que les suites en jeu dans cette question sont définies plutôt par la formule : ${u_k}^{(n)} = n^k$ et non par la formule proposée dans l'énoncé (?).

Avec cette modification, pour tout entier $k \geq 1$ et tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{{u_k}^{(n)}}{{u_k}^{(n+1)}} = \frac{n^k}{(n+1)^k} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^n$$

La suite-quotient en question est une suite géométrique dont la raison $\frac{n}{n+1}$ est strictement comprise entre 0 et 1 : il s'agit d'une suite qui converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Nous obtenons :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{{u_k}^{(n)}}{{u_k}^{(n+1)}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^k = 0$$

Ce qui prouve que les suites $\left(n^k\right)_{k\geq 1}$ (géométriques et de raison un entier) forment une échelle de comparaison et, sauf la première de la liste, ces suites ont pour limite plus l'infini en plus l'infini :

$$\left(1^k\right)_{k\geq 1} \ll \left(2^k\right)_{k\geq 1} \ll \cdots \ll \left(n^k\right)_{k\geq 1} \ll \left((n+1)^k\right)_{k\geq 1} \ll \cdots$$

5.b. De façon analogue, les suites inverses (géométriques, de raison un inverse d'entier) vérifient :

$$\left(2^{-k}\right)_{k\geq 1} \gg \left(3^{-k}\right)_{k\geq 1} \dots \gg \left(n^{-k}\right)_{k\geq 1} \gg \cdots$$

Elles ont pour limite 0 en plus l'infini.

6.a. Soit $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}, \dots$ une échelle de comparaison.

Comparons, pour *n* entier strictement positif fixé, $M^{(n)}$ avec $M^{(n+1)}$.

- Puisque $u^{(1)} \ll u^{(2)}$, nous avons : $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u^{(1)}{}_k}{u^{(2)}{}_k} = 0$. Il existe un indice k_1 tel que : $k \geq k_1 \Rightarrow \frac{u^{(1)}{}_k}{u^{(2)}{}_k} \leq 1$
- Puisque $u^{(2)} \ll u^{(3)}$, nous avons : $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u^{(2)}{}_k}{u^{(3)}{}_k} = 0$. Il existe un indice k_2 tel que : $k \geq k_2 \Rightarrow \frac{u^{(2)}{}_k}{u^{(3)}{}_k} \leq 1$
- …
- Puisque $u^{(n)} \ll u^{(n+1)}$, nous avons : $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u^{(n)}{}_k}{u^{(n+1)}{}_k} = 0$. Il existe un indice k_n tel que :

  $k \geq k_n \Rightarrow \frac{u^{(n)}{}_k}{u^{(n+1)}{}_k} \leq 1$

Pour $k \geq \max(k_1, \dots, k_n)$, toutes les inégalités sont vérifiées simultanément, c'est-à-dire que :

$$u^{(1)}{}_k \leq u^{(2)}{}_k \leq \cdots \leq u^{(n)}{}_k \leq u^{(n+1)}{}_k$$

Pour de tels indices *k*, soit à partir de l'indice $\max(k_1, \dots, k_n)$, $M^{(n)}{}_k = u^{(n)}{}_k$; $M^{(n+1)}{}_k = u^{(n+1)}{}_k$

Calculons le quotient puis passons à la limite :

$$\frac{M^{(n)}{}_k}{M^{(n+1)}{}_k} = \frac{u^{(n)}{}_k}{u^{(n+1)}{}_k}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M^{(n)}{}_k}{M^{(n+1)}{}_k} = \lim_{n\to\infty} \frac{u^{(n)}{}_k}{u^{(n+1)}{}_k} = 0$$

Ce qui prouve que $M^{(n)} \ll M^{(n+1)}$.

Les suites $\left(M^{(n)}{}_k\right)_{k\geq 1}$ constituent une échelle de comparaison.

6.b. Montrons que, pour tout entier $n \geq 1$, $M^{(n)} \ll D$.

En reprenant les mêmes notations qu'en **6.a**, pour $k \geq \max(k_1, \dots, k_n)$, il semble que nous puissions écrire les inégalités :

$$M^{(1)}{}_k \leq M^{(2)}{}_k \leq \cdots \leq M^{(n)}{}_k \leq M^{(n+1)}{}_k$$

En conséquence, à partir du rang max $(k_1, \dots, k_n)$, l'inégalité $D_k \geq {M^{(n+1)}}_k$ est vérifiée.

D'après le résultat de la question **1.c** :

$$\begin{cases} M^{(n)} \ll M^{(n+1)} \\ D \geq M^{(n+1)} \text{"à partir d'un certain rang", le rang max } (k_1, \dots, k_n) \end{cases} \implies M^{(n)} \ll D$$

7. Proposons la piste suivante :

- On pose $m^{(1)} = u^{(1)} = M^{(1)}$ et on définit $\left({a^{(1)}}_k\right)_{k\geq 1} = \left(\frac{{m^{(1)}}_k}{k}\right)_{k\geq 1}$ ainsi que :
$$\left({A^{(1)}}_k\right)_{k\geq 1} = \left(k \times {M^{(1)}}_k\right)_{k\geq 1}$$
- On pose $m^{(2)} = \min\left(u^{(2)}, a^{(1)}\right)$; $M^{(2)} = \max\left(u^{(2)}, A^{(1)}\right)$ et on définit $\left({a^{(2)}}_k\right)_{k\geq 1} = \left(\frac{{m^{(2)}}_k}{k}\right)_{k\geq 1}$ ainsi que : $\left({A^{(2)}}_k\right)_{k\geq 1} = \left(k \times {M^{(2)}}_k\right)_{k\geq 1}$.
- …
- On pose $m^{(n+1)} = \min\left(u^{(n+1)}, a^{(n)}\right)$; $M^{(n+1)} = \max\left(u^{(n+1)}, A^{(n)}\right)$ et on définit : $\left({a^{(n+1)}}_k\right)_{k\geq 1} = \left(\frac{{m^{(n+1)}}_k}{k}\right)_{k\geq 1}$ ainsi que : $\left({A^{(n+1)}}_k\right)_{k\geq 1} = \left(k \times {M^{(n+1)}}_k\right)_{k\geq 1}$.

On définit enfin les suites : $(a_k)_{k\geq 1} = \left({a^{(k)}}_k\right)_{k\geq 1}$ et $(A_k)_{k\geq 1} = \left({A^{(k)}}_k\right)_{k\geq 1}$

Nous laissons le lecteur vérifier si, oui ou non, les suites *a* et *A* répondent effectivement à la question.

8. La réponse est non car si on considère l'ensemble $\mathcal{S}$ lui-même, il ne peut pas exister une suite négligeable devant toutes les suites (elle devrait être négligeable devant elle-même, ce qui est impossible). Il ne peut pas exister non plus une suite devant laquelle toutes seraient négligeables.

Partie 3 : Intercalage arbitraire

9. Soit *u* une suite à valeurs strictement positives de limite 0 à l'infini.

De façon générale, dire que $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = 0$ signifie que quel que soit le réel ε strictement positif (aussi petit que l'on veut), il existe un entier k_ε tel que : $k \geq k_\varepsilon \implies 0 < u_k \leq \varepsilon$.

En particulier, si l'on choisit $\varepsilon = 1$, il existe un entier k_1 tel que : $k \geq k_1 \implies 0 < u_k \leq 1$.

Nous avons déjà utilisé cette propriété dans la **partie 1**. Nous allons la réutiliser ici.

De plus, si l'on choisit $\varepsilon = \frac{1}{N}$ où *N* est un entier strictement positif donné, il existe un entier k_N tel que :

$k \geq k_N \implies 0 < u_k \leq \frac{1}{N}$ soit tel que $N \times u_k \leq 1$.

9.a. Par hypothèse, $u^{(1)} \ll v^{(1)}$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u^{(1)}{}_k}{v^{(1)}{}_k} = 0$.

Compte tenu de la propriété mise en exergue, il existe un entier ℓ_1 tel que : $k \geq \ell_1 \implies 0 < \frac{u^{(1)}{}_k}{v^{(1)}{}_k} \leq 1$, c'est-à-dire que nous avons l'implication : $k \geq \ell_1 \implies 0 < u^{(1)}{}_k \leq v^{(1)}{}_k$.

9.b. Par hypothèse, $u^{(n)} \ll v^{(n)}$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u^{(n)}{}_k}{v^{(n)}{}_k} = 0$.

Appliquons la propriété mise en exergue ci-dessus avec $\varepsilon = \frac{1}{n}$.

Il existe un entier ℓ_n tel que : $k \geq \ell_n \implies 0 < \frac{u^{(n)}{}_k}{v^{(n)}{}_k} \leq \frac{1}{n}$, c'est-à-dire que nous avons l'implication :

$$k \geq \ell_n \implies 0 < n \times u^{(n)}{}_k \leq v^{(n)}{}_k$$

De façon analogue, par hypothèse, $u^{(n+1)} \ll v^{(n+1)}$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u^{(n+1)}{}_k}{v^{(n+1)}{}_k} = 0$.

Appliquons la propriété mise en exergue avec $\varepsilon = \frac{1}{n+1}$.

Il existe un entier k_{n+1} tel que : $k \geq k_{n+1} \implies 0 < \frac{u^{(n+1)}{}_k}{v^{(n+1)}{}_k} \leq \frac{1}{n+1}$, c'est-à-dire que nous avons l'implication :

$k \geq k_{n+1} \implies 0 < (n+1) \times u^{(n+1)}{}_k \leq v^{(n+1)}{}_k$.

Rien ne semble nous empêcher de choisir $\ell_{n+1} = \max(\ell_n + 1, k_{n+1})$ pour avoir simultanément l'inégalité $\ell_{n+1} \geq \ell_n + 1$ et l'implication $k \geq \ell_{n+1} \implies 0 < (n+1) \times u^{(n+1)}{}_k \leq v^{(n+1)}{}_k$.

(À l'Ouest, rien de nouveau. Contrairement à ce que suggère implicitement l'énoncé, le résultat à l'ordre $n+1$ ne nous semble pas être lié par une quelconque filiation au résultat à l'ordre *n*.

Il résulte directement de la négligeabilité $u^{(n+1)} \ll v^{(n+1)}$ c'est-à-dire du fait que $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{u^{(n+1)}{}_k}{v^{(n+1)}{}_k} = 0$. On retient qu'on choisit délibérément un entier ℓ_{n+1} strictement plus grand que son précédent.

9.c. Nous venons ainsi de construire une suite d'entiers $(\ell_n)_{n\geq 1}$ strictement croissante (donc ayant pour limite plus l'infini en plus l'infini) tels que l'inégalité $n \times u^{(n)}{}_k \leq v^{(n)}{}_k$ est vérifiée pour tous les indices *k* situés entre ℓ_n et ℓ_{n+1} (et bien entendu au-delà aussi, mais on a mieux après).

Construisons les suites *U* et *V* de la façon suivante :

- Pour $k < \ell_1$, $U_k = u_k^{(1)}$ et $V_k = v_k^{(1)}$
- Pour $\ell_1 \leq k < \ell_2$, $U_k = u_k^{(2)}$ et $V_k = v_k^{(2)}$
- …
- Pour$\ell_n \leq k < \ell_{n+1}$, $U_k = u_k^{(n)}$ et $V_k = v_k^{(n)}$

Montrons que pour tout entier *n* : $\boldsymbol{u^{(n)} \leq U}$ et $\boldsymbol{v^{(n)} \geq V}$ à partir d'un certain rang (que nous allons préciser).

Soit *n* un entier strictement positif fixé et soit ℓ_n l'entier qui lui est associé.

Pour tout $k \geq \ell_n$, l'entier *k* est situé entre deux termes consécutifs de la suite $(\ell_n)_{n\geq 1}$, soit $\ell_m \leq k < \ell_{m+1}$, avec en outre $m \geq n$, et nous disposons des formules : $U_k = u_k^{(m)}$ et $V_k = v_k^{(m)}$.

Mais par hypothèse, ces suites vérifient les inégalités :

$u^{(1)} \leq u^{(2)} \leq \cdots \leq u^{(n)} \leq \cdots$ ainsi que $v^{(1)} \geq v^{(2)} \geq \cdots \geq v^{(n)} \geq \cdots$

La relation $m \geq n$ implique que $u_k^{(n)} \leq u_k^{(m)} = U_k$ et que $v_k^{(n)} \geq v_k^{(m)} = V_k$.

Donc, nous pouvons dire que $u^{(n)} \leq U$ et $v^{(n)} \geq V$ à partir du rang ℓ_n.

Montrons maintenant que $U \ll V$:

Soit *n* un entier strictement positif (aussi grand qu'on le veut) et soit ℓ_n l'entier qui lui est associé.

Pour tout $k \geq \ell_n$, l'entier *k* est situé entre deux termes consécutifs de la suite $(\ell_n)_{n\geq 1}$, soit $\ell_m \leq k < \ell_{m+1}$, avec en outre $m \geq n$ et nous disposons des inégalités : $n \times U_k \leq m \times U_k = m \times u_k^{(m)} \leq v_k^{(m)} = V_k$

Nous obtenons :

$$k \geq \ell_n \implies \frac{U_k}{V_k} \leq \frac{1}{m} \leq \frac{1}{n}$$

Quel que soit le réel strictement positif ε (aussi petit qu'on le veut), il suffit de choisir un entier $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et de considérer ℓ_n l'entier qui lui est associé. Alors : $k \geq \ell_n \implies \frac{U_k}{V_k} \leq \varepsilon$.

Ce qui prouve que $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{U_k}{V_k}\right) = 0$, c'est-à-dire que $U \ll V$.

Nous avons construit une suite *U* qui finit par majorer toute suite $u^{(n)}$ et qui est négligeable devant une suite *V* qui, quant à elle, finit par minorer toute suite $v^{(n)}$.

D'après le résultat de la **question 4**, on peut toujours intercaler entre les deux une suite *h* telle que $U \ll h \ll V$, par exemple la suite : $h_k = \sqrt{U_k \times V_k}$. Cette suite intercalaire répond en tous points à la question.

10. Une idée serait de construire deux suites auxiliaires de suites à l'aide des « min » et des « max » de façon à remplacer les familles de suites quelconques auxquelles on a affaire par deux familles, l'une croissante et l'autre décroissante, puis d'appliquer la **question 9**. Nous laissons le lecteur développer cette idée.

11. La réponse est plutôt non.

Considérons en effet d'une part l'ensemble $\mathcal{E}$ des suites constantes strictement positives et l'ensemble $\mathcal{F}$ des suites strictement positives ayant pour limite plus l'infini en plus l'infini.

Soit *h* une suite strictement positive vérifiant $u \ll h \ll v$ pour toute suite *u* constante et pour toute suite *v* ayant pour limite plus l'infini en plus l'infini.

Soit *u* la suite constante égale à 1. Puisque $u \ll h$: $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{h_k} = 0$, ce qui implique, les suites étant strictement positives, que $\lim_{k\to\infty} h_k = +\infty$.

Une suite candidate aurait nécessairement pour limite plus l'infini en plus l'infini.

Mais dans ce cas *h* devrait être négligeable devant elle-même, c'est impossible.

.

Exercice 2 : Marche hasardeuse

Partie 1 : Quelques propriétés préliminaires

1. D'après le protocole de cette expérience, si X_n prend la valeur *k*, alors l'entier suivant est choisi dans l'ensemble $\{0 ; \dots ; 2k\}$. Lorsque $k = 0$, cet ensemble est réduit au singleton $\{0\}$.

Pour tout entier strictement positif *n* : $X_n = 0 \implies X_{n+1} \in \{0\}$, autrement dit $X_n = 0 \implies X_{n+1} = 0$.

S'il existe un entier n_0 tel que $X_{n_0} = 0$, pour tout entier naturel *p* et en appliquant *p* fois l'implication précédente, nous obtenons : $X_{n_0} = 0 \Longrightarrow X_{n_0+p} = 0$

Si Jacques écrit l'entier 0 a un moment donné, il est condamné à réécrire indéfiniment cet entier.

2. La variable aléatoire X_1 suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{0\ ;1\ ;2\}$. Nous en déduisons : $p_1 = \frac{1}{3}$.

3. Représentons la situation à l'aide d'un arbre de probabilité.

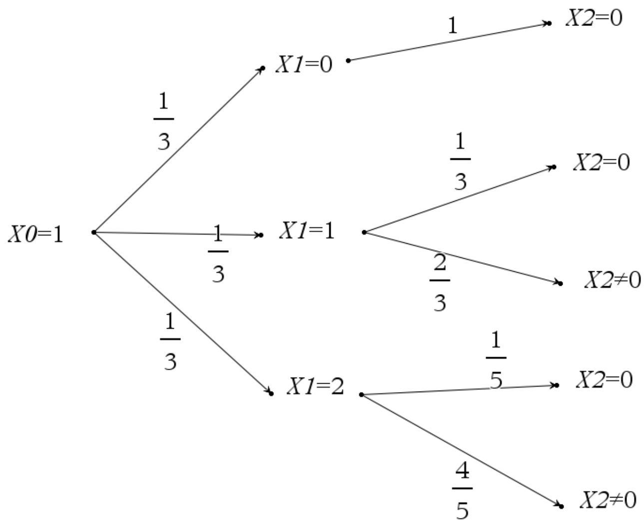
Par lecture directe de cet arbre de probabilité :

$$p_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{23}{45}$$

Cette probabilité est un peu plus grande que 0,5.

En effet :

$$p_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{90}$$



4. Pour tout entier naturel n, les deux évènements $(X_n = 0)$ et $(X_n \neq 0)$ sont des évènements complémentaires. Ainsi : $[X_{n+1} = 0] = [(X_{n+1} = 0) \cap (X_n = 0)] \cup [(X_{n+1} = 0) \cap (X_n \neq 0)]$

Nous en déduisons :

$$P[X_{n+1} = 0] = P[X_n = 0] \times P_{X_n=0}[(X_{n+1} = 0)] + P[(X_n \neq 0)] \times P_{X_n \neq 0}[(X_{n+1} = 0)]$$

Or nous avons vu que : $P_{X_n=0}[(X_{n+1} = 0)] = 1$.

$$P[X_{n+1} = 0] = P[X_n = 0] + P[(X_n \neq 0)] \times P_{X_n \neq 0}[(X_{n+1} = 0)]$$

Nous obtenons la relation de récurrence : $p_{n+1} = p_n + P[(X_n \neq 0)] \times P_{X_n \neq 0}[(X_{n+1} = 0)]$.

Le nombre $P[(X_n \neq 0)] \times P_{X_n \neq 0}[(X_{n+1} = 0)]$, égal à la différence $p_{n+1} - p_n$, est positif ou nul (il représente la probabilité d'un évènement sur lequel nous reviendrons plus loin).

Nous obtenons pour tout entier naturel *n* l'inégalité : $p_{n+1} \geq p_n$.

Ceci montre que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

Etant une suite croissante et majorée par 1, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite inférieure ou égale à 1.

5. Montrons par récurrence sur *n* la propriété $\wp_n$: « X_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2^n\}$ ».

Initialisation : $X_0 = 0$ donc $X_0 \in \{0\,;\ 2^0 = 1\}$ ce qui montre que $\wp_0$ est vérifiée.

Hérédité : On sait d'après le protocole de l'expérience que, quelle que soit la valeur *k* prise par X_n, la valeur prise par X_{n+1} appartient à l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2k\}$.

Supposons que, pour un certain entier *n*, X_n prenne ses valeurs dans l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2^n\}$.

Alors, pour toute valeur *k* prise par X_n, la double inégalité $0 \leq k \leq 2^n$ est vérifiée, et cette double inégalité implique $0 \leq 2k \leq 2 \times 2^n = 2^{n+1}$. L'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2k\}$ dans lequel X_{n+1} va prendre ses valeurs est toujours inclus dans l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2^{n+1}\}$.

Si X_n prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2^n\}$ alors X_{n+1} prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2^{n+1}\}$. Si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Etant initialisée au rang 0 et héréditaire, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier naturel *n*.

.

6. Soit ℓ un nombre entier fixé de l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2^n\}$ (ensemble dans lequel X_n prend ses valeurs).

Supposons que $X_n = \ell$. Alors X_{n+1} suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2\ell\}$.

Considérons un entier naturel *k* :

- Si $0 \leq k \leq \ell$, $P_{X_n=\ell}[X_{n+1} = \ell - k] = P_{X_n=\ell}[X_{n+1} = \ell + k] = \frac{1}{2\ell+1}$ car les nombres $\ell - k$ et $\ell + k$ appartiennent tous deux à l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2\ell\}$.
- Si $k > \ell$, $P_{X_n=\ell}[X_{n+1} = \ell - k] = P_{X_n=\ell}[X_{n+1} = \ell + k] = 0$ car les nombres $\ell - k$ et $\ell + k$ sont tous deux extérieurs à l'ensemble $\{0\,;1\,;\ldots;\ 2\ell\}$.

Nous pouvons en conclure que : $P_{X_n=\ell}[X_{n+1} = \ell - k] = P_{X_n=\ell}[X_{n+1} = \ell + k]$ quel que soit *k*.

Chacun des évènements $[X_{n+1} = X_n - k]$ et $[X_{n+1} = X_n + k]$ peut être décomposé en une réunion d'évènements disjoints :

$$[X_{n+1} = X_n - k] = \bigcup_{\ell=0}^{\ell=2^n} (X_{n+1} = \ell - k) \cap (X_n = \ell)$$

$$[X_{n+1} = X_n + k] = \bigcup_{\ell=0}^{\ell=2^n} (X_{n+1} = \ell + k) \cap (X_n = \ell)$$

En conséquence :

$$P[X_{n+1} = X_n - k] = \sum_{\ell=0}^{\ell=2^n} P[X_n = \ell] \times P_{X_n=\ell}[X_{n+1} = \ell - k]$$

Et de la même façon :

$$P[X_{n+1} = X_n + k] = \sum_{\ell=0}^{\ell=2^n} P[X_n = \ell] \times P_{X_n=\ell}[X_{n+1} = \ell + k]$$

L'égalité « terme à terme » des probabilités conditionnelles figurant dans ces expressions implique l'égalité :

$$P[X_{n+1} = X_n + k] = P[X_{n+1} = X_n - k]$$

Nous pouvons interpréter l'égalité obtenue ainsi :

L'entier naturel *n* étant fixé, pour tout entier naturel *k* : $P[X_{n+1} - X_n = k] = [X_{n+1} - X_n = -k]$

7. Soit *n* un entier naturel fixé.

Soit ℓ une valeur prise par X_n. Lorsque $X_n = \ell$, la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-\ell ; \dots ; +\ell\}$.

La variable aléatoire X_n prenant elle-même ses valeurs dans l'ensemble $\{0 ; 1 ; \dots ; 2^n\}$, nous pouvons en déduire que $X_{n+1} - X_n$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{-2^n ; \dots ; +2^n\}$.

Calculons son espérance mathématique :

$$E(X_{n+1} - X_n) = \sum_{k=-2^n}^{k=2^n} k \times P[X_{n+1} - X_n = k]$$

Nous pouvons grouper deux par deux symétriquement les termes de cette sommation :

$$E(X_{n+1} - X_n) = \sum_{k=1}^{k=2^n} k \times (P[X_{n+1} - X_n = k] - P[X_{n+1} - X_n = -k])$$

Mais d'après le résultat de la question **6** : $(P[X_{n+1} - X_n = k] - P[X_{n+1} - X_n = -k]) = 0$ pour tout entier k.

Nous en déduisons que pour tout entier naturel *n* : $E(X_{n+1} - X_n) = 0$.

8. Par linéarité de l'espérance mathématique : $E(X_{n+1} - X_n) = E(X_{n+1}) - E(X_n) = 0$.

Nous pouvons en déduire que la suite $(E(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante, constante dont la valeur est déterminée par le premier terme, à savoir $E(X_0) = 1$.

Partie 2 : Probabilité de retour

9. Exprimons le polynôme en jeu en utilisant une notation sigma :

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{i=2^n} (r_i + Xs_i)^2 = \sum_{i=1}^{i=2^n} ({r_i}^2 + 2Xr_is_i + X^2{s_i}^2)$$

$$Q(X) = \sum_{i=1}^{i=2^n} ({r_i}^2) + 2X.\sum_{i=1}^{i=2^n} (r_is_i) + X^2\sum_{i=1}^{i=2^n} ({s_i}^2)$$

En utilisant les notations suggérées par l'énoncé :

$$Q(X) = a + 2bX + cX^2$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 4b^2 - 4ac = 4(b^2 - ac)$.

Par construction, ce polynôme est une somme de carrés de monômes. Il est donc positif ou nul pour toute valeur de *X* et, à ce titre, c'est un polynôme qui n'a pas deux racines réelles distinctes. De ce fait, son discriminant est un nombre négatif ou nul, c'est-à-dire que $b^2 - ac \leq 0$.

10. Interprétons le nombre *a* :

Compte tenu des notations en usage dans cette partie :

Pour tout entier *k* de l'ensemble $\{1 ; 2 ; \ldots ; 2^n\}$: ${r_k}^2 = P[X_n = k] \times \frac{1}{2k+1}$.

Revenons à l'évènement $(X_{n+1} = 0) \cap (X_n \neq 0)$ qui a été évoqué à la **partie 1, question 4**. Détaillons cet évènement et calculons sa probabilité :

L'évènement $(X_n \neq 0)$ est la réunion des évènements disjoints $(X_n = k)$ pour k allant de 1 à 2^n. L'évènement $(X_{n+1} = 0) \cap (X_n \neq 0)$ est donc la réunion des évènements disjoints $(X_{n+1} = 0) \cap (X_n = k)$ pour k allant de 1 à 2^n.

Pour chacun de ces entiers k :

$P[(X_{n+1} = 0) \cap (X_n = k)] = P[X_n = k] \times P_{X_n=k}[X_{n+1} = 0] = P[X_n = k] \times \frac{1}{2k+1} = {r_k}^2$.

La probabilité de l'évènement $(X_{n+1} = 0) \cap (X_n \neq 0)$ est la somme de ces probabilités. En conséquence :

$$P[(X_{n+1} = 0) \cap (X_n \neq 0)] = \sum_{k=1}^{k=2^n} {r_k}^2 = a$$

Nous déduisons alors de la **question 4** que :

$$P[(X_{n+1} = 0) \cap (X_n \neq 0)] = p_{n+1} - p_n = \sum_{k=1}^{k=2^n} {r_k}^2 = a$$

Interprétons le nombre *b* :

Compte tenu des notations en usage dans cette partie :

Pour tout entier k de l'ensemble $\{1 ; 2 ; \dots ; 2^n\}$:

$$r_k s_k = P[X_n = k] \times \frac{k}{2k+1} = P[X_n = k] \times \frac{k}{2k+1} = P[X_n = k] \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2k+1)}\right)$$

Par sommation :

$$b = \sum_{k=1}^{k=2^n} r_k s_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=2^n} P[X_n = k] - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=2^n} P[X_n = k] \times \frac{1}{2k+1}$$

Or, d'une part $\sum_{k=1}^{k=2^n} P[X_n = k]$ représente la probabilité de l'évènement $(X_n \neq 0)$ complémentaire de l'évènement $(X_n = 0)$ et cette probabilité est égale à $1 - p_n$.

D'autre part $\sum_{k=1}^{k=2^n} P[X_n = k] \times \frac{1}{2k+1}$ vient d'être interprété ci-dessus, il s'agit de $p_{n+1} - p_n$.

Nous obtenons :

$$b = \frac{1}{2} \times (1 - p_n) - \frac{1}{2} \times (p_{n+1} - p_n) = \frac{1 - p_{n+1}}{2}$$

Interprétons le nombre *c* :

Compte tenu des notations en usage dans cette partie :

Pour tout entier *k* de l'ensemble $\{1\,;2\,;\ldots;\ 2^n\}$:

$$s_k{}^2 = P[X_n = k] \times \frac{k^2}{2k+1} = P[X_n = k] \times \left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4(2k+1)} - \frac{1}{4}\right)$$

Par sommation :

$$c = \sum_{k=1}^{k=2^n} s_k{}^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=2^n} k \times P[X_n = k] + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=2^n} P[X_n = k] \times \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{k=2^n} P[X_n = k]$$

Or, $\sum_{k=1}^{k=2^n} k \times P[X_n = k] = E(X_n) = 1$, $\sum_{k=1}^{k=2^n} P[X_n = k] \times \frac{1}{2k+1} = a = p_{n+1} - p_n$ et comme nous venons de le voir : $\sum_{k=1}^{k=2^n} P[X_n = k] = 1 - p_n$

Nous obtenons :

$$c = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times (p_{n+1} - p_n) - \frac{1}{4}(1 - p_n) = \frac{1 + p_{n+1}}{4}$$

11. Exploitons l'inégalité $b^2 - ac \leq 0$ obtenue à la **question 9** :

$$b^2 - ac = \left(\frac{1 - p_{n+1}}{2}\right)^2 - (p_{n+1} - p_n)\frac{1 + p_{n+1}}{4} = \frac{1}{4}(p_{n+1}(p_n - 3) + p_n + 1)$$

L'inégalité $b^2 - ac \leq 0$ implique l'inégalité : $p_n + 1 \leq p_{n+1}(3 - p_n)$ et donc l'inégalité :

$$\frac{p_n + 1}{3 - p_n} \leq p_{n+1}$$

Montrons maintenant par récurrence sur *n* la propriété $\wp_n$: « $p_n \geq \frac{n}{n+2}$ ».

Remarquons au préalable que, en tant que probabilité, nous avons toujours l'inégalité $p_n \leq 1$ (ce qui a été vu notamment à la **question 4**).

Initialisation : $p_0 = 1 \geq \frac{0}{0+2}$ ce qui montre que $\wp_0$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel *n*, l'inégalité $p_n \geq \frac{n}{n+2}$ soit vérifiée.

Une étude sommaire sur l'intervalle $[0\,;1]$ de la fonction $x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{3-x}$ montre qu'il s'agit d'une fonction strictement croissante sur cet intervalle, car sa dérivée y est manifestement strictement positive, que $f(1) = 1$et que par ailleurs $f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \frac{n+1}{n+3}$.

Define $f(x)=\frac{x+1}{3-x}$	*Terminé*
$f\left(\frac{n}{n+2}\right)$	$\frac{n+1}{n+3}$
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$\frac{4}{(x-3)^2}$
$f(0)$	$\frac{1}{3}$
$f(1)$	1

La fonction *f* étant croissante sur $[0\,;1]$, elle conserve le sens des inégalités.

$p_n \geq \frac{n}{n+2} \implies f(p_n) = \frac{p_n+1}{3-p_n} \geq f\left(\frac{n}{n+2}\right) = \frac{n+1}{n+3}$

Nous obtenons *a fortiori* : $p_{n+1} \geq \frac{p_n+1}{3-p_n} \geq \frac{n+1}{n+3} = \frac{(n+1)}{(n+1)+2}$

Si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Etant initialisée au rang 0 et héréditaire, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier naturel *n*.

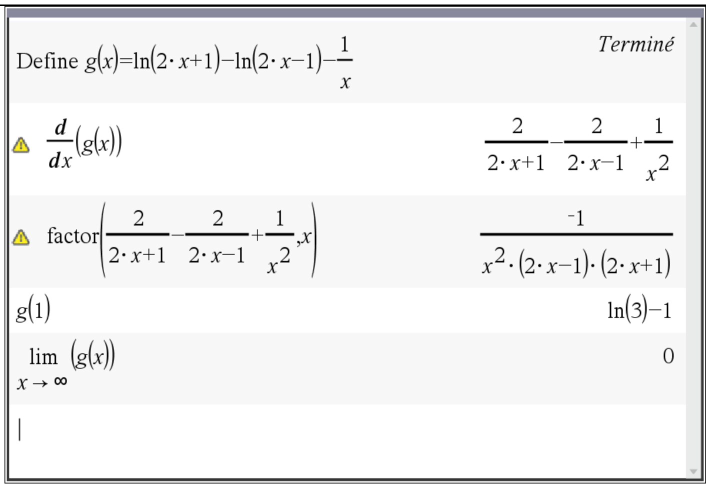
12. La suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par la suite constante égale à 1 pour tout *n* et minorée par la suite $\left(\frac{n}{n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ qui a pour limite 1 en plus l'infini. D'après le théorème des gendarmes, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

Considérons l'évènement : *A* = « Jacques n'inscrit jamais le nombre 0 au tableau ». Pour tout entier naturel *n*, l'évènement *A* est contenu dans l'évènement A_n = « À la minute *n*, Jacques n'a pas encore inscrit le nombre 0 au tableau ». On en déduit que pour tout *n* : $p(A) \leq p(A_n) = 1 - p_n$. La probabilité fixe $p(A)$ est inférieure ou égale à tous les termes d'une suite qui converge vers 0. Nécessairement, $p(A) = 0$ et *A* est l'évènement impossible. Son contraire, c'est-à-dire « il existe une minute où Jacques va inscrire le nombre 0 au tableau » est l'évènement certain.

Tôt ou tard, Jacques inscrira 0 au tableau.

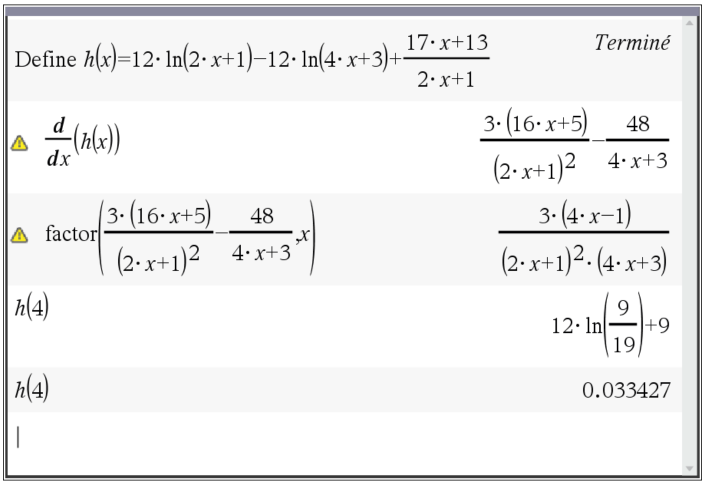
Partie 3 : Suites et fonctions

13. Une étude sommaire de la fonction g, définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$, fait apparaître qu'il s'agit d'une fonction strictement décroissante (car sa dérivée est strictement négative) et strictement positive sur cet intervalle (car sa limite en plus l'infini est nulle), réalisant une bijection de $[1\,;\,+\infty[$ sur l'intervalle $]0\,;\ln(3)-1]$



14. Une étude sommaire de la fonction h, définie et dérivable sur l'intervalle $[4\,;\,+\infty[$, fait apparaître qu'il s'agit d'une fonction strictement croissante sur cet intervalle (car sa dérivée y est strictement positive). Le fait que $h(4)=12\ln\left(\frac{9}{19}\right)+9>0{,}033$ montre que $x\geq 4 \Longrightarrow h(x)\geq h(4)>0{,}033$.

Cette fonction h est strictement positive sur l'intervalle $[4\,;\,+\infty[$.



15. Montrons par récurrence sur n la propriété $\wp_n$: « $H_1+\cdots+H_n=(n+1)(H_{n+1}-1)$».

Initialisation : $\begin{cases} H_1=1 \\ 2\times(H_2-1)=2\times\left(\left(1+\frac{1}{2}\right)-1\right)=1 \end{cases}$. Les deux résultats sont égaux, ce qui montre que $\wp_1$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier $n > 0$, l'égalité $H_1 + \dots + H_n = (n+1)(H_{n+1} - 1)$ soit vérifiée. Intéressons-nous au rang suivant :

$$\big((n+1)+1\big)\big(H_{(n+1)+1} - 1\big) = (n+2)H_{n+2} - n - 2$$

$$(n+2)H_{n+2} - n - 2 = (n+2)\left(H_{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) - n - 2$$

$$(n+2)H_{n+2} - n - 2 = (n+2)H_{n+1} + 1 - n - 2$$

$$(n+2)H_{n+2} - n - 2 = H_{n+1} + [(n+1)H_{n+1} - n - 1]$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, nous obtenons :

$$(n+2)H_{n+2} - n - 2 = H_{n+1} + [H_1 + \dots + H_n]$$

Nous obtenons bien la somme des $(n+1)$ premiers nombres harmoniques.

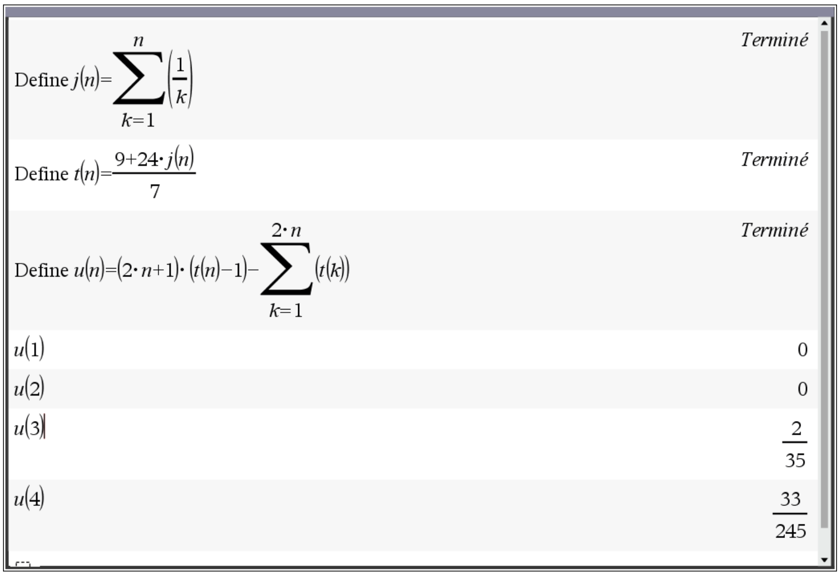
Si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Etant initialisée au rang 1 et héréditaire, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

16.a. Déléguons les calculs. Nous avons noté $j(n)$ le n-ème nombre harmonique pour éviter un télescopage avec une notation précédente.

$u(n)$ représente la différence entre $(2n+1)(t_n - 1)$ et $t_1 + \dots + t_{2n}$.

Le calcul effectif montre qu'aux rangs 1, 2 et 3, cette différence est positive ou nulle. En prime, nous obtenons qu'elle est aussi positive pour le rang 4.



Bilan : $(2n+1)(t_n - 1) \geq t_1 + \dots + t_{2n}$ aux rangs 1, 2 et 3 et, en bonus, aussi au rang 4.

16.b. Considérons d'une part l'expression : $A = 7 \times (2n+1) \times (t_n - 1)$.

Nous avons $A = (2n+1) \times ((9 + 24H_n) - 7) = (2n+1) \times (2 + 24H_n)$ soit :

$$A = 24 \times (2n+1) \times H_n + 4n + 2$$

Considérons d'autre part l'expression : $B = 7 \times (t_1 + \cdots + t_{2n}) = (9 + 24H_1) + \cdots + (9 + 24H_{2n})$.

Nous avons : $B = 18n + 24(H_1 + \cdots + H_{2n})$. Utilisons la formule trouvée dans la **question 15** :

$H_1 + \cdots + H_{2n} = (2n+1)(H_{2n+1} - 1)$ en l'incorporant dans l'expression de *B*.

Nous obtenons :

$$B = 18n + 24 \times (2n+1)(H_{2n+1} - 1) = 24 \times (2n+1) \times H_{2n+1} - 30n - 24$$

Calculons la différence entre ces deux expressions :

$$A - B = [24 \times (2n+1) \times H_n + 4n + 2] - [24 \times (2n+1) \times H_{2n+1} - 30n - 24]$$

Ce qui nous donne :

$$A - B = 24 \times (2n+1) \times (H_n - H_{2n+1}) + 34n + 26$$

Chose que nous pouvons écrire, si l'envie nous en prend :

$$A - B = 2(2n+1) \times \left[12(H_n - H_{2n+1}) + \frac{17n+13}{2n+1}\right]$$

Intéressons-nous de plus près à la différence : $H_{2n+1} - H_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$

L'étude faite dans la **question 13** à propos du signe de *g* a montré que, pour tout $x \geq 1$, nous pouvions disposer de l'inégalité $\ln(2x+1) - \ln(2x-1) \geq \frac{1}{x}$.

Exploitons cette inégalité pour *x* prenant les valeurs entières allant de $(n+1)$ à $(2n+1)$:

$$\begin{cases} \ln(2n+3) - \ln(2x+1) \geq \dfrac{1}{n+2} \\ \ln(2n+5) - \ln(2x+3) \geq \dfrac{1}{n+2} \\ \cdots \\ \ln(4n+3) - \ln(4x+1) \geq \dfrac{1}{2n+1} \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre, nous créons un effet domino qui élimine tous les intermédiaires. Il reste :

$$\ln(4n+3)-\ln(2x+1) \geq \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n+1}=H_{2n+1}-H_n$$

Exploitons cette inégalité dans l'expression de $A-B$:

$$A-B \geq 2(2n+1)\times\left[12(\ln(2x+1)-\ln(4n+3))+\frac{17n+13}{2n+1}\right]=2(2n+1)\times h(n)$$

Nous avons vu dans la question 13 que la fonction h était une fonction strictement positive sur l'intervalle $[4\,;\,+\infty[$. Nous pouvons en conclure que $A-B>0$ pour tout entier $n \geq 4$.

L'inégalité $(2n+1)(t_n-1) \geq t_1+\cdots+t_{2n}$ est démontrée pour tous les rangs à partir du rang 4.

Partie 4 : Cinq minutes montre en main

La variable aléatoire $T_{\ell,n}$ prend la valeur n lorsque le nombre 0 n'a pas encore été écrit à l'issue des $n-1$ premières inscriptions, quels que soient les résultats des essais ultérieurs.

17. Le résultat a été démontré dans la question 12, où nous avons établi que l'évènement A = « Jacques n'inscrit jamais le nombre 0 au tableau » était l'évènement impossible.

18. Etudions la loi de probabilité de la variable aléatoire $T_{\ell,n+1}$.

Le nombre initial étant ℓ, étudions ce qu'il se passe après l'inscription du premier nombre X_1.

Ce premier nombre X_1 est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{0,1,\ldots,2\ell\}$.

Une fois ce premier nombre inscrit, tout se passe comme s'il restait une minute de moins.

- Si $X_1=0$, alors $T_{\ell,n+1}=1$
- Sinon, pour tout j de l'ensemble $\{0,1,\ldots,n\}$:

$$[T_{\ell,n+1}=j+1]=\bigcup_{k=1}^{k=2\ell}[X_1=k\,]\cap[T_{k,n}=j]$$

Nous obtenons : $P\left[T_{\ell,n+1}=1\right]=\frac{1}{2\ell+1}$ et pour tout j de l'ensemble $\{1,\dots,n\}$:

$$P\left[T_{\ell,n+1}=j+1\right]=\sum_{k=1}^{2\ell}P[X_1=k]\times P\left[T_{k,n}=j\right]=\frac{1}{2\ell+1}\sum_{k=1}^{2\ell}P\left[T_{k,n}=j\right]$$

En conséquence pour tout j de l'ensemble $\{\,1,\dots,n\}$:

$$(j+1)P\left[T_{\ell,n+1}=j+1\right]=\frac{1}{2\ell+1}\left(\sum_{k=1}^{2\ell}j\times P\left[T_{k,n}=j\right]+\sum_{k=1}^{2\ell}P\left[T_{k,n}=j\right]\right)$$

Calculons l'espérance :

$$E\left(T_{\ell,n+1}\right)=P\left[T_{\ell,n+1}=1\right]+\sum_{j=1}^{n}(j+1)P\left[T_{\ell,n+1}=j+1\right]$$

$$=\frac{1}{2\ell+1}+\frac{1}{2\ell+1}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{2\ell}j\times P\left[T_{k,n}=j\right]+\sum_{k=1}^{2\ell}P\left[T_{k,n}=j\right]\right)$$

Intervertissons l'ordre de sommation:

$$E\left(T_{\ell,n+1}\right)=\frac{1}{2\ell+1}+\frac{1}{2\ell+1}\sum_{k=1}^{2\ell}\left(\sum_{j=1}^{n}j\times P\left[T_{k,n}=j\right]+\sum_{j=1}^{n}P\left[T_{k,n}=j\right]\right)$$

$$=\frac{1}{2\ell+1}+\frac{1}{2\ell+1}\sum_{k=1}^{2\ell}\left(E\left(T_{k,n}\right)+1\right)=\frac{1}{2\ell+1}+\frac{1}{2\ell+1}\sum_{k=1}^{2\ell}\left(E\left(T_{k,n}\right)\right)+\frac{2\ell}{2\ell+1}$$

En fin de compte, nous obtenons la formule de récurrence indiquée par l'énoncé :

$$E\left(T_{\ell,n+1}\right)=1+\frac{1}{2\ell+1}\sum_{k=1}^{2\ell}\left(E\left(T_{k,n}\right)\right)$$

19. L'entier ℓ étant fixé, nous avons par définition : $t_\ell = \frac{9+24H_\ell}{7}$ avec $H_\ell = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{\ell}$, ce qui nous permet de dire que : $t_\ell \geq \frac{9+24}{7} = \frac{33}{7}$

Montrons par récurrence sur *n* la propriété $\wp_n$: « Quel que soit l'entier $\ell \geq 1, E(T_{\ell,n}) \leq t_\ell$ ».

Initialisation : Quel que soit l'entier $\ell \geq 1$, $T_{\ell,1}$ prend uniquement la valeur 1 avec la probabilité 1.

Donc quel que soit l'entier $\ell \geq 1$, $E(T_{\ell,1}) = 1 \leq \frac{33}{7} \leq t_\ell$, ce qui montre que $\wp_1$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier strictement positif *n*, la propriété $\wp_n$ soit vérifiée c'est-à-dire que quel que soit l'entier $k \geq 1, E(T_{k,n}) \leq t_k$. (On réserve la notation ℓ …).

Soit un entier $\ell \geq 1$ fixé. Considérons la formule de récurrence :

$$E(T_{\ell,n+1}) = 1 + \frac{\sum_{k=1}^{2\ell} E(T_{k,n})}{2\ell + 1}$$

Utilisons l'hypothèse de récurrence : quel que soit l'entier *k* appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2\ell\}$, nous disposons par hypothèse de l'inégalité , $E(T_{k,n}) \leq t_k$.

Nous obtenons : :

$$E(T_{\ell,n+1}) \leq 1 + \frac{\sum_{k=1}^{2\ell} t_k}{2\ell + 1}$$

Or, la **question 16** appliquée avec l'entier $n = \ell$ nous dit que : $\sum_{k=1}^{2\ell} t_k \leq (2\ell + 1)(t_\ell - 1)$.

Nous obtenons :

$$E(T_{\ell,n+1}) \leq 1 + \frac{(2\ell + 1)(t_\ell - 1)}{2\ell + 1}$$

Ce qui nous donne, en fin de compte : $E(T_{\ell,n+1}) \leq t_\ell$ et cela quel que soit l'entier $\ell \geq 1$ fixé.

Si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Etant initialisée au rang 1 et héréditaire, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Montrons maintenant que $P[T_{\ell,n} = n] \leq \frac{t_\ell}{n}$

Considérons l'expression de l'espérance : $E(T_{\ell,n}) = P[T_{\ell,n} = 1] + 2P[T_{\ell,n} = 2] + \cdots + n \times P[T_{\ell,n} = n]$

Nous obtenons : $n \times P[T_{\ell,n} = n] \leq E(T_{\ell,n}) \leq t_\ell$

Il en découle l'inégalité : $P[T_{\ell,n} = n] \leq \frac{t_\ell}{n}$

20. Les évènements « $[T_{\ell,n} = n]$ » sont des évènements emboîtés, en ce sens que :

$[T_{\ell,1} = 1] \supset [T_{\ell,2} = 2] \supset \cdots \supset [T_{\ell,n} = n] \supset [T_{\ell,n+1} = n+1] \supset \cdots$

Tous contiennent l'évènement $[T_{\ell,\infty} = \infty]$ de sorte que, quel que soit l'entier *n* strictement positif :

$$0 \leq P[T_{\ell,\infty} = \infty] \leq P[T_{\ell,n} = n] \leq \frac{t_\ell}{n}$$

La probabilité positive ou nulle $P[T_{\ell,\infty} = \infty]$ est inférieure ou égale à tous les termes d'une suite qui converge vers 0. Nécessairement, cette probabilité est nulle.

$P[T_{\ell,\infty} = \infty] = 0$ et l'évènement $[T_{\ell,\infty} = \infty]$ est l'évènement impossible.

Quel que soit l'entier initial, Jacques finira, tôt ou tard, par inscrire le nombre 0 au tableau.

21. Lorsque $\ell = 1$, nous utilisons le fait que $H_1 = 1$ et que $t_1 = \frac{9+24H_1}{7} = \frac{33}{7}$

Pour tout entier *n* : $E(T_{1,n}) \leq \frac{33}{7}$. En passant à la limite :

$$E(T_{1,\infty}) \leq \frac{33}{7} \leq 4{,}72$$

Complément : Une simulation avec Python

L'algorithme « **hasard** » est affecté d'un argument **i** qui représente le nombre qui a été écrit initialement au tableau. L'algorithme renvoie le nombre de minutes qui s'écoulent avant que Jacques écrive l'entier 0.

L'algorithme « **exper** » est affecté d'un argument **i** qui représente le nombre initial et d'un argument **r** qui représente le nombre de répétitions de l'expérience de Jacques. L'algorithme renvoie la moyenne des nombres de minutes qui s'écoulent avant d'écrire l'entier 0.

Nous essayons ci-dessous lorsque le nombre initial est égal à 1 et lorsqu'on effectue 10000 répétitions.

```
>>> from random import randint
>>> def hasard(i):
        k=i
        n=0
        while k>0:
                n=n+1
                k=randint(0,2*k)
        return n
```

```
>>> hasard(1)
5
>>> hasard(1)
10
>>> hasard(1)
1
>>> hasard(1)
2
```

```
>>> def exper(i,r):
        s=0
        for x in range (1,r+1):
                s=s+hasard(i)
        m=s/r
        return m
```

```
>>> exper(1,10000)
4.6095
>>> exper(1,10000)
4.6516
>>> exper(1,10000)
4.5706
>>> exper(1,10000)
4.6192
>>> exper(1,10000)
4.6901
>>> exper(1,10000)
4.6034
```

Essayons maintenant lorsque le nombre initial est égal à 3 puis à 5 puis à 10.

On peut vérifier que $t_3 = \frac{53}{7} = 7{,}57$,que $t_5 = \frac{319}{35} = 9{,}11$ et que $t_{10} = \frac{8326}{735} = 11{,}33$, chaque fois à 10^{-2} près.

```
>>> exper(3,10000)
7.4657
>>> exper(3,10000)
7.4234
>>> exper(3,10000)
7.5441
>>> exper(3,10000)
7.3479
```

```
>>> exper(5,10000)
8.9725
>>> exper(5,10000)
8.8978
>>> exper(5,10000)
8.8912
>>> exper(5,10000)
8.9306
```

```
>>> exper(10,10000)
10.9943
>>> exper(10,10000)
11.0356
>>> exper(10,10000)
11.0882
>>> exper(10,10000)
10.8561
```

Les résultats de la simulation semblent compatibles avec les prévisions théoriques.

Exercice 3 : Aire minimale d'un *n*-gone à sommets entiers

Partie 1 : Calculer l'aire d'un triangle

Dans cette partie, on considère l'expression : $\mathcal{A}(A,B,C)=\frac{1}{2}|x_a(y_b-y_c)+x_b(y_c-y_a)+x_c(y_a-y_b)|$

1. $\mathcal{A}(A,B,C)=\mathcal{A}(B,C,A)$ car l'expression proposée est invariante par permutation circulaire $\begin{cases}a\to b\\ b\to c\\ c\to a\end{cases}$.

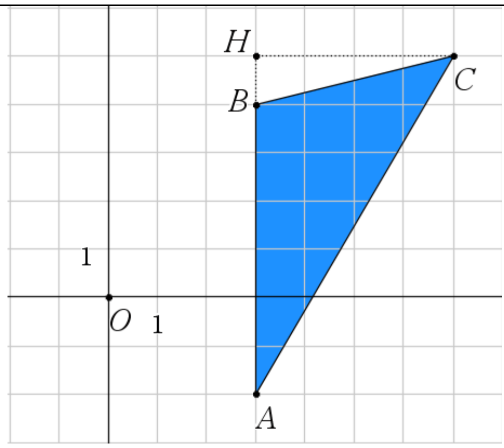
$\mathcal{A}(A,B,C)=\mathcal{A}(B,A,C)$ car l'expression proposée est invariante par transposition $\begin{cases}a\to b\\ b\to a\\ c\to c\end{cases}$.

L'expression proposée est donc invariante par n'importe quelle permutation des notations, elle ne dépend que de la position des trois sommets du triangle et non de l'ordre de leur dénomination.

2.a. Lorsque $x_a=x_b$, l'expression devient :

$$\mathcal{A}(A,B,C)=\frac{1}{2}|x_a-x_c|\times|y_a-y_b|$$

$|x_a-x_c|$ représente la mesure de la hauteur [*CH*] et $|y_a-y_b|$ celle de la base [*AB*] à laquelle cette hauteur se rapporte. Il s'agit bien de l'expression de l'aire du triangle.



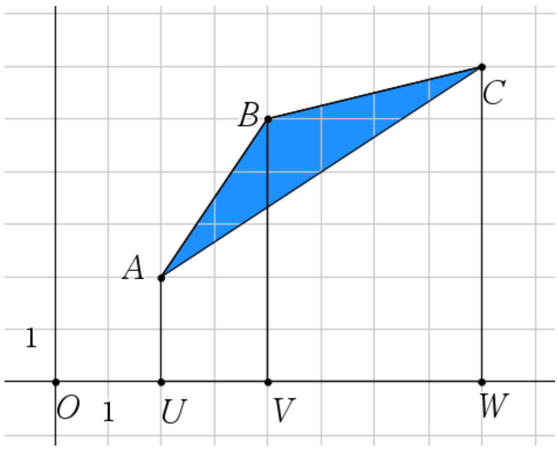
2.b. Sans diminuer la généralité, nous pouvons supposer que $x_a \leq x_b \leq x_c$, quitte à modifier la dénomination des trois sommets.

Le trapèze *AUVB* a pour aire $(x_b - x_a) \times \frac{y_a+y_b}{2}$

Le trapèze *BVWC* a pour aire $(x_c - x_b) \times \frac{y_b+y_c}{2}$

Le trapèze *AUWC* a pour aire $(x_c - x_a) \times \frac{y_c+y_a}{2}$

Le triangle *ABC* est la portion de plan située entre le trapèze *AUWC* et les deux autres trapèzes. Son aire est la valeur absolue de « l'aire du trapèze *AUWC* diminuée de l'aire des deux autres trapèzes ».



L'identité entre l'expression ainsi obtenue notée g et l'expression initiale notée f nous est confirmée ci-contre.

Define $f(xa,xb,xc,ya,yb,yc)=\frac{\lvert xa\cdot(yb-yc)+xb\cdot(yc-ya)+xc\cdot(ya-yb)\rvert}{2}$	*Terminé*
$f(xa,xa,xc,ya,yb,yc)$	$\frac{\lvert(xa-xc)\cdot(ya-yb)\rvert}{2}$
Define $g(xa,xb,xc,ya,yb,yc)=\left\lvert(xc-xa)\cdot\frac{yc+ya}{2}-(xb-xa)\cdot\frac{ya+yb}{2}-(xc-xb)\cdot\frac{yb+yc}{2}\right\rvert$	*Terminé*
$g(xa,xb,xc,ya,yb,yc)=f(xa,xb,xc,ya,yb,yc)$	true

2.c. On constate également que l'expression $\mathcal{A}(A,B,C) = \frac{1}{2}|x_a(y_b - y_c) + x_b(y_c - y_a) + x_c(y_a - y_b)|$ est invariante si l'on ajoute ou l'on retranche un même nombre aux trois ordonnées y_a, y_b, y_c (c'est-à-dire si l'on translate le triangle *ABC* parallèlement à l'axe *Oy*). Lorsque les trois nombres y_a, y_b, y_c ne sont pas tous positifs, il suffit de leur ajouter un nombre assez grand (par exemple la plus grande de leurs trois valeurs absolues) pour se ramener à un triangle isométrique qui entre dans le cas du **2.b.**

Le fait que $\mathcal{A}(A,B,C) = \frac{1}{2}|x_a(y_b - y_c) + x_b(y_c - y_a) + x_c(y_a - y_b)|$ représente l'aire du triangle est donc démontrée dans tous les cas.

Partie 2 : Existence de a_n et premières évaluations

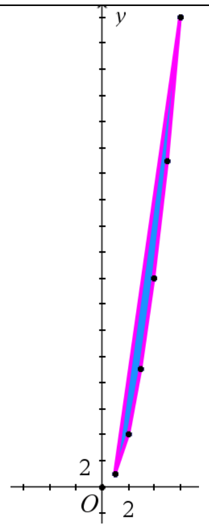
3.a. pour tout entier $n \geq 3$, les $(n-3)$ diagonales issues d'un sommet donné d'un polygone convexe à n sommets le découpent en $(n-2)$ triangles.

3.b. Les coordonnées des sommets d'un polygone entier sont toutes des nombres entiers.

L'expression $2\mathcal{S} = |x_a(y_b - y_c) + x_b(y_c - y_a) + x_c(y_a - y_b)|$ est un cocktail (sommes et produits) de nombres entiers, c'est un entier.

4. Le polygone en jeu peut être découpé en triangles $X_1X_kX_{k+1}$ avec $2 \leq k \leq n-1$ et où le point X_i a pour coordonnées $(i\ ;\ i^2)$.

Un exemple de polygone étudié dans cette question ci-contre avec six sommets.



La copie d'écran ci-contre affiche l'aire d'un triangle $X_1X_kX_{k+1}$ puis l'aire du polygone et la factorisation suivante montre que la différence entre n^3 et l'aire du polygone est strictement positive pour tout entier $n \geq 3$

©Aire d'un triangle X1XkX(k+1):

$f(1,k,k+1,1,k^2,(k+1)^2)$ $\qquad \frac{|k\cdot(k-1)|}{2}$

©Aire polygone :

$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{k\cdot(k-1)}{2}\right)$ $\qquad \frac{n\cdot(n^2-3\cdot n+2)}{6}$

$\text{factor}\left(n^3-\frac{n\cdot(n^2-3\cdot n+2)}{6}\right)$ $\qquad \frac{n\cdot(n+1)\cdot(5\cdot n-2)}{6}$

5. D'après la question **3.b**, le double $2\mathcal{S}$ de l'aire de tout polygone entier à *n* sommets est un entier positif.

Soit E_n l'ensemble des entiers $x \leq 2n^3$ pour lesquels il existe au moins un polygone convexe entier à *n* sommets dont le double de l'aire est égal à *x*.

- E_n est un ensemble fini, puisqu'il est inclus dans l'ensemble $\{0\,;1\,;\dots;2n^3\}$.
- E_n est un ensemble non vide, puisque la **question 4** a exhibé un polygone convexe entier dont l'aire est $\leq n^3$ (en l'occurrence, le nombre $\frac{n(n^2-3n+2)}{3}$ appartient à E_n si l'on se réfère à la copie d'écran de la **question 4**).

En tant qu'ensemble fini non vide, l'ensemble E_n possède un plus petit élément x_0.

Il existe au moins un polygone entier à *n* sommets dont le double de l'aire est égal à ce plus petit élément, et dont, de ce fait, l'aire est minimale et égale à $\frac{x_0}{2}$.

6. Commençons par étudier le cas d'un triangle, en remarquant qu'une autre expression de l'aire d'un triangle *ABC* est : $\mathcal{A}(A,B,C) = \frac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{2}\left|(x_b-x_a)(y_c-y_a)-(y_b-y_a)(x_c-x_a)\right|$.

L'identité entre cette expression notée *h* et l'expression initiale notée *f* nous est confirmée ci-contre.	Define $h(xa,xb,xc,ya,yb,yc)=\frac{1}{2}\cdot\left\lvert\det\begin{pmatrix}xb-xa & xc-xa\\ yb-ya & yc-ya\end{pmatrix}\right\rvert$ *Terminé* $h(xa,xb,xc,ya,yb,yc)$ $\frac{\lvert xa\cdot(yb-yc)-xb\cdot(ya-yc)+xc\cdot(ya-yb)\rvert}{2}$ $h(xa,xb,xc,ya,yb,yc)=f(xa,xb,xc,ya,yb,yc)$ true

ABC est un triangle entier si et seulement si les points *A, B* et *C* ont des coordonnées entières et sont non alignés.

Les trois points *A,B, C* sont non alignés si et seulement si $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ est non nul. Or, si *A, B, C* ont des coordonnées entières, le déterminant $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$ en tant que cocktail (sommes et produits) d'entiers est un nombre entier. Sa valeur absolue est au moins égale à 1.

Il s'ensuit que l'aire d'un triangle entier est au moins égale à $\frac{1}{2}$.

Passons au cas général d'un polygone convexe entier à n sommets.

Nous avons démontré que tout polygone convexe entier à n sommets pouvait être découpé en $(n-2)$ triangles qui en formaient une partition. L'aire d'un tel polygone est au moins égale à la somme des aires de ces triangles, chacune étant au moins égale à $\frac{1}{2}$.

Donc, l'aire d'un polygone convexe entier à n sommets est au moins égale à $\frac{n-2}{2}$

7. Le triangle *OAB* dont les sommets sont $O(0\,;0)$, $A(1{,}0)$ et $B(0{,}1)$ a pour aire $\frac{1}{2}$, et le carré *OACB* dont les sommets sont $O(0\,;0)$, $A(1{,}0)$, $C(1\,;1)$ et $B(0{,}1)$ a pour aire 1, ce qui atteint les minorants trouvés à la question précédente dans les cas où n est égal à 3 puis à 4. On ne peut faire mieux.

En conséquence, $a_3 = \frac{1}{2}$ et $a_4 = 1$.

Partie 3 : Bornes cubiques

8. Par hypothèse, le polygone $P_1P_2 \ldots P_n$ est un polygone convexe entier, donc les points P_k ont des coordonnées entières. Les points Q_k sont des entiers car leurs coordonnées sont des différences d'entiers.

9.a. Le polygone $P_1P_2 \ldots P_n$ étant un polygone convexe, il n'a pas trois sommets alignés donc deux d'entre eux ne peuvent être confondus.

Pour tout entier $k = 1, 2, \ldots, n$ les points P_{k-1} et P_k sont distincts et le vecteur $\overrightarrow{OQ_k} = \overrightarrow{P_{k-1}P_k}$ est non nul.

Aucun des points Q_k n'est confondu avec O.

9.b. Interprétons ce que signifie des vecteurs « triés dans le sens trigonométrique ».

Pour $k = 2, \dots, n$, soit u_k la mesure principale (celle qui appartient à l'intervalle $[0\,;2\pi[$) de l'angle $\widehat{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_kP_{k+1}}}$, avec la convention $P_{n+1} = P_1$. Dire que ces vecteurs sont triés dans le sens trigonométrique signifie que $0 \leq u_2 \leq u_3 \leq \cdots \leq u_n < 2\pi$.

De plus, puisque trois quelconques des sommets ne sont pas alignés, $\widehat{\overrightarrow{P_{k-1}P_k}, \overrightarrow{P_kP_{k+1}}}$ n'est pas l'angle nul, et les inégalités sont strictes : $0 < u_2 < u_3 < \cdots < u_n < 2\pi$.

Soient *k* et *k'* deux indices tels que $k \leq k'$ et tels que $\overrightarrow{OQ_k}$ et $\overrightarrow{OQ_{k'}}$ soient positivement colinéaires, c'est-à-dire tels que l'angle $\widehat{\overrightarrow{P_kP_{k+1}}, \overrightarrow{P_{k'}P_{k'+1}}}$ soit l'angle nul.

Or : $\widehat{\overrightarrow{P_kP_{k+1}}, \overrightarrow{P_{k'}P_{k'+1}}} = \widehat{\overrightarrow{P_kP_{k+1}}, \overrightarrow{P_1P_2}} + \widehat{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_{k'}P_{k'+1}}} = u_{k'} - u_k \ \ (2\pi)$

La relation $u_{k'} - u_k = 0 \ \ (2\pi)$ et les inégalités $0 < u_2 < u_3 < \cdots < u_n < 2\pi$ impliquent que, nécessairement, $u_{k'} = u_k$ et $k = k'$.

Si les points Q_k et $Q_{k'}$ appartiennent à une même demi-droite d'origine *O*, alors et $k = k'$.

Par contraposition, si *k* et *k'* sont des indices distincts, Q_k et $Q_{k'}$ n'appartiennent pas à une même demi-droite d'origine *O*.

10. L'ensemble $E = \{Q_1, \dots, Q_n\}$ est composé de *n* éléments.

Les droites Δ et Δ' déterminent quatre quarts de plan fermés (quadrants) chacun de frontière une demi-droite d'origine *O* supportée par Δ et une autre de même origine supportée par Δ'. D'après le théorème des tiroirs, l'un au moins de ces quatre quadrants contient au moins le quart de l'effectif de l'ensemble *E*. Soit Δ_1 et Δ'_1 les deux demi-droites qui en sont la frontière.

On choisit comme repère le repère d'origine *O* et dont les vecteurs directeurs sont, respectivement, le premier le vecteur directeur de la demi-droite Δ_1 et le second le vecteur directeur de la demi-droite Δ'_1.

NB. Puisque les vecteurs $\overrightarrow{OQ_k}$ sont « triés dans le sens trigonométrique », il semble bien que les points Q_k qui appartiennent à l'ensemble $\mathcal{E}$ puissent être affectés d'indices consécutifs, quitte à effectuer une permutation circulaire des indices. Nous noterons si besoin est $Q_{m+1}, Q_{m+2}, \dots, Q_{m+q}$ ces points de $\mathcal{E}$, supposés être d'indices consécutifs (où *q* représente le nombre d'éléments de $\mathcal{E}$).

11. Considérons le nuage $\{(x'_k, y'_k)\,;k = 1, 2, \dots n\}$ composé des n points de $\mathcal{E}$. Nous pouvons découper ce nuage en quatre sous-ensembles :

- Ceux des points tels que $x'_k \leq 3\bar{x}$ et $y'_k \leq 3\bar{y}$ (l'ensemble $\mathcal{E}'$). Soit *u* son nombre d'éléments.
- Ceux des points tels que $x'_k \leq 3\bar{x}$ et $y'_k > 3\bar{y}$ (ensemble $\mathcal{G}_1$. Soit *v* son nombre d'éléments.
- Ceux des points tels que $x'_k > 3\bar{x}$ et $y'_k \leq 3\bar{y}$ (ensemble $\mathcal{G}_2$. Soit *w* son nombre d'éléments.
- Ceux des points tels que $x'_k > 3\bar{x}$ et $y'_k > 3\bar{y}$ (ensemble $\mathcal{G}_3$. Soit *t* son nombre d'éléments.

Nous avons la relation : $u + v + w + t = n$ mais nous pouvons écrire les inégalités : $\begin{cases} (v+t) \times (3\bar{y}) \leq n\bar{y} \\ (w+t) \times (3\bar{x}) \leq n\bar{x} \end{cases}$.

Ainsi : $\begin{cases} :\ u + v + w + t = n \\ v + t \leq \frac{n}{3} \\ w + t \leq \frac{n}{3} \end{cases}$ et nous en déduisons : $\begin{cases} u + v + w + t = n \\ v + w + t \leq (v+t) + (w+t) \leq \frac{2n}{3} - t \end{cases}$

Nous obtenons : $u = n - (v + w + t) \geq n - \frac{2n}{3} + t \geq \frac{n}{3}$

L'effectif *u* de l'ensemble $\mathcal{E}'$ est au moins égal à $\frac{n}{3}$.

L'ensemble $\mathcal{E}'$ contient au moins un tiers des éléments de l'ensemble $\mathcal{E}$.

12. ***NB.*** *Nous ne trouverons pas tout à fait la même majoration que celle de l'énoncé mais cela n'affectera pas la résolution générale. Au lecteur de découvrir « l'intrus », nous ne l'avons pas débusqué.*

Considérons les entiers *A* et *B* qui sont immédiatement supérieurs ou égaux aux nombres $3\bar{x}$ et $3\bar{y}$, c'est-à-dire les entiers tels que : $3\bar{x} \leq A < 3\bar{x} + 1$ et $3\bar{y} \leq B < 3\bar{y} + 1$.

Pavons le rectangle $\{x, 0 < x \leq A\} \times \{y, 0 < y \leq B\}$ à l'aide des carrés de côté 1 disjoints suivants (ces pavés ont deux bords ouverts et deux bords fermés) :

$\{x, u < x \leq u + 1\} \times \{y, v < y \leq v + 1\}$ où *u* prend les valeurs allant de 0 à $A - 1$ et *v* prend les valeurs allant de 0 à $B - 1$.

Nous obtenons ainsi un pavage constitué de $(A - 1) \times (B - 1)$ carrés et nous avons à propos de ce nombre l'inégalité $(A - 1) \times (B - 1) < (3\bar{x}\,) \times (3\bar{y}) = 9\bar{x}\bar{y}$ (l'inégalité est stricte).

L'ensemble $\mathcal{E}'$ est inclus dans la réunion du rectangle $\{x, 0 < x \leq A\} \times \{y, 0 < y \leq B\}$ et des segments bordant ce rectangle et portés l'un par l'axe *Ox*, l'autre par l'axe *Oy*.

- Chacun des carrés du pavage contient au plus deux éléments de l'ensemble $\mathcal{E}'$, car s'il y en avait trois, deux d'entre eux seraient distants de strictement moins d'une unité, ce qui est impossible.
- Chacun des segments de la bordure ne peut contenir au plus qu'un point de $\mathcal{E}'$ car une demi-droite d'origine O ne peut contenir qu'un point au plus de cet ensemble.

L'ensemble $\mathcal{E}'$ contient au plus $2 \times (A-1) \times (B-1) + 1 + 1$ éléments.

Ce nombre est majoré strictement par $18\bar{x}\bar{y} + 2$. Cependant, rien ne nous dit que $\bar{x}$; $\bar{y}$ sont des nombres entiers. Le nombre $18\bar{x}\bar{y} + 2$ n'est probablement pas un entier et nous pouvons seulement affirmer, dans notre démarche, que le nombre d'éléments de $\mathcal{E}'$ est majoré par $E(18\bar{x}\bar{y}) + 2$ où E représente la fonction partie entière. Ce nombre n'est pas $18\bar{x}\bar{y} + 1$.

Le nombre d'éléments de l'ensemble $\mathcal{E}'$ est majoré par le nombre réel $18\bar{x}\bar{y} + 2$.

Où est Charly ? Il y a peut-être un intrus …

13. Utilisons l'hypothèse selon laquelle les points de $\mathcal{E}$, peuvent être affectés d'indices consécutifs (voir **question 10**, en reprenant les notations de la remarque en fin de cette question).

Exprimons le vecteur $\overrightarrow{P_m P_{m+q}}$:

$$\overrightarrow{P_m P_{m+q}} = \overrightarrow{P_m P_{m+1}} + \cdots + \overrightarrow{P_{m+q-1} P_{m+q}}$$

$$\overrightarrow{P_m P_{m+q}} = \overrightarrow{OQ_{m+1}} + \cdots + \overrightarrow{OQ_{m+q}}$$

Ce vecteur a pour coordonnées $\begin{cases} x_{m+1} + \cdots + x_{m+q} \\ y_{m+1} + \cdots + y_{m+q} \end{cases}$, toutes deux sommes de nombres positifs (donc coordonnées toutes deux positives).

Considérons les points P_i et P_j qui sont les plus éloignés l'un de l'autre. Puisqu'ils ont la même ordonnée, leur distance est égale à la différence de leurs abscisses. Leur distance est au moins égale à la distance $\left\|\overrightarrow{P_m P_{m+q}}\right\|$, laquelle est supérieure ou égale à $x_{m+1} + \cdots + x_{m+q}$.

Or : $x_{m+1} + \cdots + x_{m+q} = q \times \bar{x}$ et l'on sait que le nombre q d'éléments de $\mathcal{E}$ est au moins égal à $\frac{n}{4}$.

Nous obtenons :

$$P_i P_j \geq x_{m+1} + \cdots + x_{m+q} \geq \frac{n}{4} \times \bar{x}$$

Dans le même ordre d'idées, $y_{m+1} + \cdots + y_{m+q} \geq \frac{n}{4} \times \bar{y}$. Les ordonnées des points de $\mathcal{E}$ s'échelonnent entre celle y_m de P_m et celle de P_m augmentée au minimum de $\frac{n}{4} \times \bar{y}$.

Quelle que soit l'ordonnée w commune des points P_i et P_j, les écarts entre les ordonnées des points de $\mathcal{E}$ et w s'échelonnent entre $y_m - w$ et au minimum $y_m - w + \frac{n}{4} \times \bar{y}$.

L'amplitude de cet échelonnement étant au moins égal à $\frac{n}{4} \times \bar{y}$, il y a au moins un point pour lequel l'écart est, en valeur absolue, au moins égal à la moitié de l'amplitude, donc au moins égal à $\frac{n}{8} \times \bar{y}$.

14. Lorsque $n \geq 24$, l'ensemble $\mathcal{E}$ contient au moins 6 points puisque cet ensemble contient au moins le quart des points du nuage. L'ensemble $\mathcal{E}'$ contient au moins deux points puisque cet ensemble contient au moins le tiers des éléments de $\mathcal{E}$.

De ce fait, il y a dans cet ensemble au moins un point d'abscisse strictement positive et au moins un point d'ordonnée strictement positive. Il en résulte que $\bar{x} > 0$; $\bar{y} > 0$.

Considérons alors le triangle $P_iP_jP_k$ mis en évidence dans la question 13. Puisque le polygone en jeu est convexe, il contient ce triangle, son aire est supérieure ou égale à l'aire du triangle.

L'aire de ce triangle est supérieure ou égale à : $\frac{1}{2} \times \frac{n\bar{x}}{4} \times \frac{n\bar{y}}{8} = \frac{1}{64} \times n^2 \times \bar{x}\bar{y}$ ce qui induit l'inégalité :

$$a_n \geq \frac{1}{64} \times n^2 \times \bar{x}\bar{y}$$

Or, d'après les **questions 11 et 12**, le nombre n' des éléments de $\mathcal{E}'$ est tel que : $\frac{n}{3} \leq n' \leq 18\bar{x}\bar{y} + 2$. Nous pouvons en déduire la majoration : $\frac{n}{3} - 2 \leq 18\bar{x}\bar{y}$ et pour $n \geq 24$ (ce qui est le cas par hypothèse) :

$$\frac{n}{4} \leq \frac{n}{3} - 2 \leq 18\bar{x}\bar{y}$$

Ainsi, il paraît possible de minorer $\bar{x}\bar{y}$ par un nombre dépendant de n : $\frac{n}{72} \leq \bar{x}\bar{y}$

Nous obtenons la minoration :

$$a_n \geq \frac{1}{64} \times n^2 \times \frac{n}{72} = \frac{n^3}{4608}$$

15. Nous pouvons proposer $c_1 = 1$ puisque la **question 4** nous a permis de construire un polygone convexe à n sommets d'aire $\leq n^3$, et il semblerait, selon nous, que le nombre $c_2 = \frac{1}{4608}$ soit un candidat potentiel au rôle de coefficient du deuxième gendarme. À vérifier …