Ecrit 1-2026.

Problème 1 : Vrai / Faux

Calculs dans R.

1. Faux. Si $x = 2, y = 4$ alors $x - y = -2 < -1$ et si $x = 6, y = 3$ alors $x - y = 3 > 2$

(On ne peut pas soustraire membre à membre deux inégalités, opération illicite qui était le « distracteur » de cette question).

2. Faux. Le taux annuel t est tel que : $(1+t)^{10} = 1{,}35$ soit $t = 1{,}35^{0{,}1} - 1 = 0{,}030465$ à 10^{-6} près, le taux annuel est plutôt voisin de 3 %.

3. Vrai. Car 1 et 2 sont des racines de ce polynôme. Précisément : $P(X) = (X-1)(X-2)(2X+3)$

4. Faux. Par exemple $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20} = 0{,}95$

Nous savons que l'ensemble des décimaux est un sous-corps du corps des réels. Si nous choisissons trois entiers qui n'ont comme facteurs premiers que 2 ou 5, leurs inverses sont des décimaux et la somme de ces inverses est un décimal. La somme des inverses de trois entiers peut aussi bien être, ou ne pas être, un nombre décimal.

Analyse réelle.

5. Vrai. L'affirmation est la contraposée d'une propriété des suites mieux connue : « Toute suite non bornée est une suite divergente ».

6. Faux. La dérivée est la fonction $x \longmapsto (\ln(2) \times 2^x$.

La fonction proposée est une fonction exponentielle et non une fonction puissance, comme le suggérait illicitement le « distracteur » de cette question.

2

7. Faux. Car $u_n = \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$. Cette suite converge vers $\frac{1}{2}$ et non vers 0.

Comme quoi une somme de termes qui convergent chacun vers 0 ne converge pas forcément vers 0 comme le suggèrerait le « théorème en acte » incorrect du distracteur de cette question (elle peut même ne pas converger du tout).

8. Vrai. La fonction *f* est définie ainsi : $\begin{cases} f(x) = -x^2 \ \ si \ \ x \leq 0 \\ f(x) = x^2 \ \ si \ \ x \geq 0 \end{cases}$. Elle coïncide avec des fonctions dérivables qui se raccordent continûment en zéro. Ces fonctions ayant le même nombre dérivé en zéro (égal à zéro) la fonction *f* est dérivable aussi au point de raccordement (le nombre dérivé en ce point est zéro). La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ en entier avec $\begin{cases} f'(x) = -2x \ \ si \ \ x \leq 0 \\ f'(x) = 2x \ \ si \ \ x \geq 0 \end{cases}$.

9. Vrai. Car pour tout entier *n* : $0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$. La suite (I_n) est une suite positive majorée par une suite qui converge vers zéro, elle converge elle-même vers zéro.

10. Vrai. Car pour tout réel *x* : $f(-x) = f(x)$. Deux fonctions dérivables égales ont la même dérivée et en dérivant de part et d'autre de l'égalité nous obtenons $-f'(-x) = f'(x)$ pour tout réel *x*.

11. Faux. Par exemple la fonction carrée, qui est paire, admet pour primitive la fonction $x \longmapsto \frac{x^3}{3} + 1$ qui n'est pas une fonction impaire.

12. Vrai. La dérivée seconde de cette fonction est la fonction $x \longmapsto (4x^2 + 2)\exp(x^2)$. Il s'agit d'une fonction strictement positive sur $\mathbb{R}$, ce qui est un critère de convexité sur $\mathbb{R}$.

13. Faux. Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et la dérivée de cette fonction est la fonction définie par $x \longmapsto 1 + \frac{\exp(x)}{\exp(x)-1} = \frac{2;\exp(x)-1}{\exp(x)-1}$. Cette dérivée est négative sur $[-\ln(2)\,;0[$ et positive ailleurs.

Sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$, la fonction f admet un maximum en $-\ln(2)$ qui vaut $-2\ln(2)$ (donc strictement négatif). L'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction f est strictement croissante, elle y admet au plus une solution. **(Une exactement, car elle y est continue et elle y change de signe vu qu'elle a pour limites aux bornes respectivement $-\infty$ et $+\infty$).**

Arithmétique.

14. Faux. L'entier 5 est premier mais $5! + 1 = 121 = 11 \times 11$ n'est pas un nombre premier.

Lorsque *n* est premier, le nombre $n! + 1$ n'admet aucun diviseur premier inférieur ou égal à *n* mais il peut en avoir qui sont plus grands que *n*.

15. Vrai. Nous pouvons utiliser une congruence modulo 3 pour le justifier.

- Si $n \equiv 0\ \ (3)$, alors $n(n^2+5) \equiv 0\ \ (3)$ également.
- Si $n \equiv 1\ \ (3)$, ou si $n \equiv 2\ \ (3)$, alors $n^2 \equiv 1\ \ (3)$ et $n^2 + 5 \equiv 0\ \ (3)$ donc $n(n^2+5) \equiv 0\ \ (3)$ également.

Quel que soit le cas de figure, $n(n^2+5) \equiv 0\ \ (3)$ donc $n(n^2+5)$ est toujours un multiple de 3.

16. Vrai. Car $\binom{n}{2} - \binom{n}{1} - 9 = \frac{n(n-1)}{2} - n - 9 = \frac{(n-6)(n+3)}{2}$. L'unique valeur entière naturelle qui annule cette expression et vérifie la relation proposée est la valeur 6, qui est multiple de 3.

Géométrie et complexes.

17. Vrai. Résolvons en *x* et *y* avec *z* paramètre le système de deux équations à trois inconnues formé par les équations des deux plans : $\begin{cases} x - y = z + 2 \\ 3x - y = -z + 4 \end{cases} \iff (\exists \lambda \in \mathbb{R}) \begin{cases} x = -\lambda + 1 \\ y = -2\lambda - 1. \\ z = \lambda \end{cases}$

4 Nous obtenons des équations paramétriques de la droite passant par le point de coordonnées $(1\,;\,-1\,;0)$ et de vecteur directeur de coordonnées $(-1\,;\,-2\,;1)$. Le vecteur directeur obtenu est l'opposé de celui de l'énoncé, et le point de coordonnées $(1\,;\,-1\,;0)$ est le point *A* de l'énoncé. L'intersection des deux plans est bien la droite prévue par l'énoncé.

18. Faux. Rapportons l'espace à un repère d'origine *A* dans lequel les coordonnées des points intéressants sont les suivantes : $B(b\,;0,0)$; $D(0\,;d\,;0)$; $E(0,0,e)$ où *b, d* et *e* désignent les longueurs des arêtes (toutes strictement positives). Coordonnées de $\overrightarrow{AI}$: $\left(\frac{b}{2}\,;0\,;e\right)$. Coordonnées de $\overrightarrow{KH}$: $\left(0\,;d\,;\frac{e}{2}\right)$. Pour tout couple de réels $(x\,;y)$, $x.\overrightarrow{AI} + y.\overrightarrow{KH}$ a pour coordonnées $\left(x\frac{b}{2}\,;yd\,;(x+\frac{y}{2})e\right)$. Ce vecteur n'est nul que si $x = y = 0$. Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et KH sont non colinéaires donc les droites (*AI*) et (*KH*) sont non parallèles.

19. Faux. Car le centre Ω de la première homothétie a pour image le point Ω'' tel que : $\overrightarrow{\Omega'\Omega''} = \frac{1}{k}\overrightarrow{\Omega'\Omega}$

Ce vecteur est distinct de $\overrightarrow{\Omega'\Omega}$ puisque $\overrightarrow{\Omega'\Omega}$ n'est pas le vecteur nul et *k* n'est pas égal à 1 : le point Ω n'est pas invariant. Par conséquent, la composée étudiée n'est pas l'identité.

Cette composée est une translation (de vecteur non nul).

20. Vrai. Il s'agit de la symétrie centrale dont le centre est le point d'affixe $\frac{b}{2}$. Nous savons en effet qu'une transformation complexe $z \longmapsto az + b$ est une similitude directe de rapport le module de *a* et d'angle un argument de *a*. Dans le présent contexte, *a* a pour module 1 et pour argument π, ce qui caractérise une symétrie centrale.

21. Faux. La contraposée est : « si le produit *zz'* n'est pas réel, alors au moins l'un des deux nombres *z* ou *z'* n'st pas réel ».

Dénombrement et probabilités.

22. Faux. Dressons la liste exhaustive des tirages « favorables » :

- Le jeton vert numéro 2 et un jeton rouge autre que le numéro 2 (4 tirages).
- Le jeton rouge numéro 2 et un jeton vert (4 tirages).

Il y a donc 8 tirages convenables.

NB . Le résultat serait le même si certaines boules étaient poilues et d'autres non. L'hypothèse « indiscernables » est ici hors de propos.

23. Faux. Il y a $3^4 = 81$ répartitions possibles. Dénombrons celles où aucune des urnes n'est vide. Tel est le cas si et seulement une urne contient deux boules et les deux autres en contiennent une.

Supposons que l'urne qui contient deux boules soit l'urne 1. Il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons de choisir les deux boules qu'elle contient et 2 façons de répartir les deux boules restantes, donc 12 répartitions convenables. Autant pour l'urne 2 et l'urne 3. En tout, 36 répartitions ne laissent aucune urne vide.

Le nombre de répartitions où au moins une urne est vide est $81 - 36 = 45$ et non 48.

24. Vrai. Pour tout entier strictement positif *k*, le tirage numéro *k* a lieu si et seulement si les tirages précédents ont été des tirages verts. L'urne contient alors 1 jeton rouge et *k* jetons verts. La probabilité d'obtenir un jeton vert lors de ce tirage est $\frac{k}{k+1}$ et d'obtenir le jeton rouge $\frac{1}{k+1}$.

On obtient le jeton rouge au tirage numéro *n* si et seulement si les tirages précédents ont tous été verts et celui-là est rouge. La probabilité pour cela est : $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$.

NB. Est-il donc si compliqué de parler « d'équiprobabilité » à des candidats au CAPES ? Une hypothèse aussi stupide que « une urne opaque », ça je n'avais jamais vu.

Algèbre linéaire

25. Vrai. Par récurrence. En effet, $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+c & b+d\\a+c & b+d\end{pmatrix}$. Si $a=b=c=d=2^n$ alors le résultat de cette multiplication est $\begin{pmatrix}2^{n+1} & 2^{n+1}\\2^{n+1} & 2^{n+1}\end{pmatrix}$ ce qui justifie que la relation à démontrer est héréditaire. Or, elle est initialisée au rang 1. Elle est vérifiée pour tout entier strictement positif.

26. Faux. Par exemple $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}$.

Problème 2. Calcul et géométrie

7

I. Autour du triangle rectangle

A. Une démonstration du théorème de Pythagore

Sommairement …

1. Vu le codage de la figure, les triangles *ABC* et *DEB* sont des triangles rectangles isométriques. Les angles de sommet *B* du triangle *ABC* et du triangle *DEB* sont des angles complémentaires. Il en résulte que l'angle de sommet *B* du triangle *BCE* est un angle droit puisque son supplément est la somme de deux angles complémentaires.

Le triangle *BCE* est un triangle rectangle isocèle (accessoirement, (*BC*) et (*BE*) sont perpendiculaires, ce que demande l'énoncé).

2. Les droites (*AC*) et (*DE*) sont toutes deux perpendiculaires à la droite (*AD*) : elles sont parallèles. Le quadrilatère *ADEC* a deux côtés parallèles, les deux côtés [*AC*] et [*DE*] : c'est un trapèze. De plus, ses angles de sommets *B* et *D* sont des angles droits. Ce trapèze est un trapèze rectangle.

3. Calculons de deux façons l'aire du trapèze.

- Avec la formule de l'aire d'un trapèze de hauteur $h = AB + BD = b + c$ et de côtés parallèles de longueurs respectives *b* et *c*. Nous obtenons : $(b+c) \times \frac{b+c}{2} = \frac{(b+c)^2}{2}$
- En considérant sa partition en trois triangles rectangles. Nous obtenons $bc + \frac{a^2}{2}$

D'où la relation : $\frac{(b+c)^2}{2} = bc + \frac{a^2}{2}$ qui implique la relation $b^2 + c^2 = a^2$.

B. Irrationnalité de $\sqrt{2}$

NB. Nous admettons que la fraction irréductible $\frac{a}{b}$ qui représente le supposé « rationnel » $\sqrt{2}$ est celle dont le dénominateur, strictement positif, est minimal.

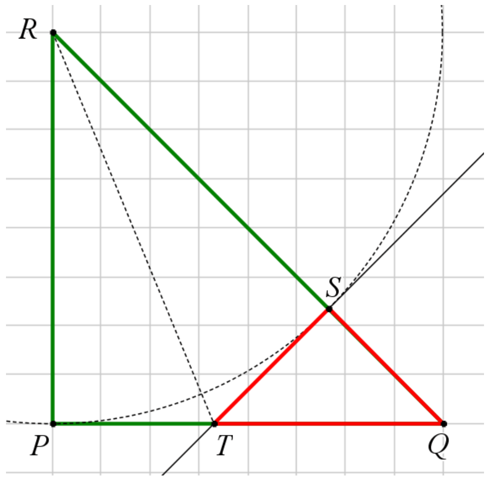
4. Nous savons que quels que soient les nombres réels positifs *x* et *y*, ces nombres et leurs racines carrées sont rangés dans le même sens, c'est-à-dire que :

$$x < y \iff \sqrt{x} < \sqrt{y}$$

En particulier :

$$1 < 2 < 4 \implies 1 < \sqrt{2} < 2.$$

6.



5. Quels que soient les entiers strictement positifs *a* et *b* :

$$\frac{2b-a}{a-b} - \frac{a}{b} = \frac{2b^2-a^2}{b(a-b)}$$

Par hypothèse, dans cette question *a* et *b* sont deux entiers strictement positifs et premiers entre eux vérifiant la relation $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$,relation équivalente à la relation $a = b\sqrt{2}$ et qui implique la relation $a^2 = 2b^2$. Dans cette hypothèse :

$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \implies 2b^2 - a^2 = 0 \implies \frac{2b-a}{a-b} - \frac{a}{b} = 0$. Ainsi :

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2} \implies \frac{2b-a}{a-b} = \frac{a}{b}$$

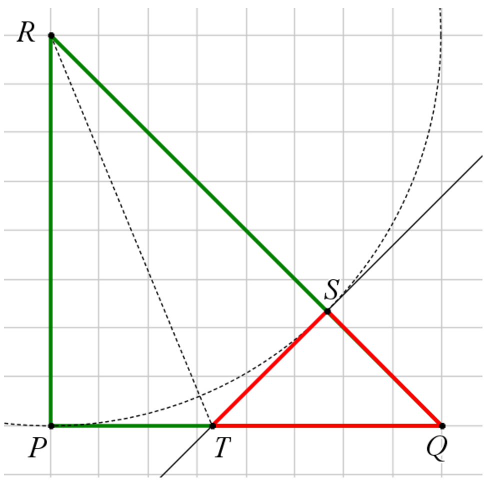
7. Il est notoire que l'hypoténuse *QR* d'un triangle rectangle isocèle *PQR* de côté *b* est égale à $b\sqrt{2}$.

Dans notre contexte, $b\sqrt{2} = a$ par hypothèse.

Donc : $QR = a.$

8. Le triangle *SQT* est par hypothèse rectangle en *S*. Son angle de sommet *Q* est le même que l'angle de sommet *Q* du triangle rectangle isocèle *PQR*. Ces deux triangles sont semblables (deux triangles rectangles qui ont un autre angle homologue égal sont semblables). *SQT* est donc lui-même rectangle isocèle de sommet *S*.

6. Une figure.



9. Puisque *Q, S R* sont alignés dans cet ordre : $SQ = RQ - RS = a - b$.

Nous avons donc, dans le triangle rectangle isocèle *SQT* : $SQ = ST = a - b$

D'autre part, les triangles rectangles *PTR* et *STR* ont l'hypoténuse [*RT*] commune et par hypothèse un côté de l'angle droit de même longueur ($RS = RP = b$). Ils sont donc isométriques et en conséquence $PT = ST = a - b$.

Puisque *P, T, Q* sont alignés dans cet ordre, nous en déduisons :

$$TQ = PQ - PT = b - (a - b) = 2b - a$$

En conclusion : $\begin{cases} TQ = 2b - a \\ SQ = a - b \end{cases}$ ce qui implique : $\frac{TQ}{SQ} = \frac{2b-a}{a-b}$

10. Du fait que les triangles *PQR* et *SQT* sont deux triangles rectangles isocèles de sommet *P* et *S* respectivement : $\frac{QR}{PQ} = \frac{TQ}{SQ} = \sqrt{2}$. Compte tenu des résultats de la question précédente, nous obtenons en fonction des paramètres *a* et *b* la relation :

$$\frac{a}{b} = \frac{2b - a}{a - b} = \sqrt{2}$$

Avec *a* et *b* premiers entre eux puisque la fraction $\frac{a}{b}$ est supposée être irréductible.

Or, l'inégalité $1 < \sqrt{2} < 2$ implique, en multipliant tous les termes par *b*, que $b < b\sqrt{2} = a < 2b$.

Nous en déduisons que : $0 < a - b < b$. Ainsi, alors que $\frac{a}{b}$ est supposée être irréductible, nous lui aurions trouvé une fraction équivalente dont le dénominateur est à la fois strictement positif et strictement plus petit. C'est impossible car cela contredit la minimalité de l'entier *b*.

L'hypothèse de rationalité du nombre $\sqrt{2}$ doit être rejetée.

II. Autour du triangle équilatéral

A. Irrationnalité de $\sqrt{3}$

Par hypothèse, dans cette partie *a* et *b* sont deux entiers strictement positifs et premiers entre eux tels que $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$,relation équivalente à la relation $a = b\sqrt{3}$ et qui implique la relation $a^2 = 3b^2$.

11. Exprimons en fonction de *b* seulement chacun des deux nombres $(2a - 3b)$ et $\sqrt{3}.(2b - a)$.

- D'une part : $2a - 3b = 2(b\sqrt{3}) - 3b = (2\sqrt{3} - 3)b$.
- D'autre part : $\sqrt{3}.(2b - a) = 2b\sqrt{3} - \sqrt{3}.(b\sqrt{3}) = (2\sqrt{3} - 3)b$

Nous obtenons des expressions identiques en fonction de *b* ce qui prouve l'égalité :

$$2a - 3b = \sqrt{3}.(2b - a)$$

12. Le fait que l'aire d'un triangle équilatéral de côté *c* est égale à $c^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$ fait en principe partie des savoirs triviaux d'un candidat au CAPES.

13. L'aire du triangle *AGH* est égale à $b^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$.

L'aire du triangle *ABC* est égale à $a^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \left(b\sqrt{3}\right)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 3b^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$. Elle est donc égale à trois fois l'aire du triangle *AGH*.

11

14. $1 < 3 < 4 \implies 1 < \sqrt{3} < 2$ tout comme à propos de la racine de 2.

Considérons la position relative des points *I* et *G* sur le segment [*AB*]. D'après la construction de la figure : $AG = b$; $AI = a - b$

De l'inégalité précédente, nous déduisons : $b < b\sqrt{3} = a < 2b$, ce qui implique que :

$$0 < a - b < b < a$$

Ces inégalités signifient que les points *A, I, G, B* sont alignés dans cet ordre. De ce fait, le segment [*IG*] est commun au segment [*AG*] et au segment [*BI*]. Notons au passage que $IG = 2b - a$.

Une situation analogue se répète sur les autres côtés du triangle *ABC*. Ce qui implique un chevauchement des triangles en jeu.

Les triangle *AGH*, *BIJ* et *CKL* se superposent « comme sur la figure » (sic).

Notons aussi comme conséquence corollaire une inégalité qui nous servira plus loin :

$$\mathbf{0 < 2b - a < b}$$

15. Considérons particulièrement la topographie du triangle *IGN*. Son angle de sommet *G* est commun avec l'angle de même sommet du triangle équilatéral *AGH* et son angle de sommet *I* est commun avec l'angle de même sommet du triangle équilatéral *BIJ*. Donc, ce triangle *IGN* a deux angles de mesure $\frac{\pi}{3}$ radians, ce qui est une condition suffisante pour justifier que :

IGN est un triangle équilatéral de côté $IG = 2b - a$. Il en est de même des triangles *KMH* et *PMJ* qui sont aussi des triangles équilatéraux de côté $2b - a$.

Quant au triangle *MNP*, ses angles sont chacun opposés par le sommet à un angle d'un triangle équilatéral. Ils ont chacun pour de mesure $\frac{\pi}{3}$ radians, ce qui est une condition suffisante pour justifier que *MNP* est un triangle équilatéral.

Les quatre triangles *IGN, KMH, PMJ* et *MNP* sont équilatéraux.

16. Les trois triangles *IGN, KMH, PMJ* sont isométriques, de côté $2b - a$ comme nous l'avons déjà calculé.

D'autre part : $MN = HG - HM - NG = b - (2b - a) - (2b - a) = 2a - 3b$

Le triangle équilatéral *MNP* a pour côté $2a - 3b$.

Il serait utile, voire indispensable, d'améliorer à ce propos la qualité des inégalités obtenues dans la question 14 :

$$\frac{9}{4} < 3 \Rightarrow \frac{3}{2} < \sqrt{3} \Rightarrow \frac{3}{2}b < b\sqrt{3} = a \Rightarrow 3b < 2a$$

Cette inégalité justifierait la stricte positivité du nombre $2a - 3b$.

17. Nous savons que, étant donné deux polygones P_1 et P_2 :

$a(P_1 \cup P_2) = a(P_1) + a(P_2) - a(P_1 \cap P_2)$ où $a(\dots)$ désigne l'aire du polygone en jeu.

En généralisant cette propriété au cas du triangle *ABC* que l'on partage en quatre triangles dont trois se chevauchent deux à deux : :

$$a(ABC) = a(AGH) + a(BIJ) + a(CKL) - a(IGN) - a(PLJ) - a(MHK) + a(MNP)$$

Or les trois triangles *AGH, CKL, IGN* sont isométriques et leur aire est égale au tiers de l'aire du triangle *ABC*. Ainsi : $a(ABC) = a(AGH) + a(BIJ) + a(CKL)$.

D'autre part, les triangles *IGN*, *PLJ* et *MHK* sont des triangles isométriques, ils ont même aire.

Ainsi : $a(IGN) = a(PLJ) = a(MHK)$

De la relation ci-dessus, nous déduisons alors : $a(MNP) = 3.aire(MHK)$

L'aire du triangle *MNP* est égale au triple de l'aire de chacun des triangles *IGN*, *PLJ* et *MHK.*

18. Nous avons vu que le côté des triangles *IGN*, *PLJ* et *MHK* avait pour mesure $2b - a$ tandis que le côté du triangle *MNP* avait pour mesure $2a - 3b$.

Compte tenu de la relation trouvée à propos de leurs aires :

$$(2a - 3b)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 3 \times (2b - a)^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$(2a - 3b)^2 = 3 \times (2b - a)^2$$

Compte tenu de la stricte positivité des nombres $2a - 3b$ et $2b - a$, cette relation entre carrés implique que : $2a - 3b = \sqrt{3} \times (2b - a)$

Nous en déduisons : $\sqrt{3} = \frac{a}{b} = \frac{2a-3b}{2b-a}$

Or, nous avons démontré que $0 < 2b - a < b$. Ainsi, alors que $\frac{a}{b}$ est supposée être irréductible, nous lui aurions trouvé une fraction équivalente dont le dénominateur est à la fois strictement positif et strictement plus petit. C'est impossible car cela contredit la minimalité de l'entier *b*.

L'hypothèse de rationalité du nombre $\sqrt{3}$ doit être rejetée.

B. Théorème de Lucas.

19. On sait que l'écriture complexe d'une similitude directe de centre Ω d'affixe ω, de rapport *k* et d'angle de mesure θ est : $M(z) \longmapsto M'(z')$ tel que $z' - \omega = a(z - \omega)$ avec $a = k.\exp(i\theta)$.

Lorsque la similitude est une rotation comme dans le présent contexte, le rapport est égal à 1 et θ est une mesure en radians de l'angle de rotation. De plus ici : $\omega = z_A$.

L'écriture complexe de la rotation de centre *A* et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ est :

$M(z) \longmapsto M'(z')$ tel que $z' - z_A = \exp\left(i.\frac{\pi}{3}\right) \times (z - z_A)$

En particulier, vu que *C* est image de *B* par cette rotation : $z_C - z_A = \exp\left(i.\frac{\pi}{3}\right) \times (z_B - z_A)$

Soit, de façon équivalente :

:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \exp\left(i.\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i.\frac{\sqrt{3}}{2}$$

14 Nous déduisons de cette relation que : $\sqrt{3} = 2\mathrm{Im}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$.

Supposons que *A, B, C* soient tous trois à affixes rationnelles.

Alors, $\mathrm{Im}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ est un nombre rationnel car il est cocktail (sommes, produits, quotients) de nombres rationnels. Il en est de même de son double.

Compte tenu de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, la relation $\sqrt{3} = 2\mathrm{Im}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$ ne peut jamais être satisfaite par des affixes rationnelles.

III. Irrationnalité de *e* par la méthode de Sondow

21.a. Par hypothèse, la dérivée de la fonction exponentielle est elle même. Donc la dérivée de la fonction $x \longmapsto \exp(-x)$ est son opposée et la dérivée de la fonction phi est la fonction nulle.

Cette fonction phi ayant une dérivée nulle sur $\mathbb{R}$, il s'agit d'une fonction constante et cette constante peut être calculée grâce à la valeur connue de l'exponentielle en zéro, c'est 1.

Pour tout réel *x* : $\exp(-x) \times \exp(x) = 1$

Il n'existe donc aucun réel dont l'exponentielle soit nulle.

21.b. Par hypothèse, $\exp(0) = 1$. Supposons qu'il existe un réel *a* tel que $\exp(a) < 0$. La fonction exponentielle étant continue (puisque dérivable) sur l'intervalle $[0\,;a]$, elle prendrait au moins une fois toute valeur intermédiaire entre $\exp(0) = 1$ et $\exp(a) < 0$. En particulier, il existerait au moins une valeur *c* de l'intervalle $]0\,;a[$ telle que $\exp(c) = 0$, ce qui contredirait le résultat de la question précédente. L'hypothèse d'existence d'un réel dont l'exponentielle est < 0 doit être rejetée.

15

Il n'existe aucun réel dont l'exponentielle soit strictement négative.

Tous les réels ont une exponentielle strictement positive.

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car sa dérivée (elle-même) est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

22.a. La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

Pour tout réel *t* de l'intervalle $[0\,;1]$: $\exp(0) = 1 \leq \exp(t) \leq \exp(1) = e$

La fonction $t \longmapsto (1-t)^n$ étant par ailleurs positive sur l'intervalle $[0\,;1]$:

Pour tout réel *t* de l'intervalle $[0\,;1]$: $\frac{(1-t)^n}{n!} \leq \frac{(1-t)^n}{n!}.\exp(t) \leq e.\frac{(1-t)^n}{n!}$

En intégrant ces inégalités sur l'intervalle $[0\,;1]$:

$$\frac{1}{n!}\left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq I_n \leq \frac{e}{n!}\left[\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

Nous obtenons les inégalités :

$$0 < \frac{1}{(n+1!} \leq I_n \leq \frac{e}{(n+1!}$$

Par rapport à l'énoncé, nous obtenons l'inégalité stricte attendue à gauche, et même mieux, mais une inégalité large à droite. Or, la fonction $t \longmapsto \frac{(1-t)^n}{n!}.(\mathrm{e}-\exp(t))$ est une fonction positive, continue sur $[0\,;1]$ et elle prend en au moins un point (en zéro) une valeur strictement positive : l'intégrale de cette fonction est strictement positive, ce qui justifie l'inégalité stricte à droite : $I_n < \frac{e}{(n+1!}$.

22.b. Par intégration par parties :

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}.\exp(t)dt = \left[-\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}.\exp(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(n+1)(1-t)^n}{(n+1)!}.\exp(t)dt$$

Soit pour tout entier naturel *n* :

16

$$I_{n+1} = -\frac{1}{(n+1)!} + I_n$$

22.c. Calculons le terme de rang zéro :

$$I_0 = \int_0^1 1.\exp(t)dt = e - 1$$

Appliquons la relation de récurrence précédente depuis le rang initial jusqu'au rang *n* :

$$\begin{cases} I_1 = -\frac{1}{1!} + I_0 = -\frac{1}{1!} + (e-1) \\ I_2 = -\frac{1}{2!} + I_1 \\ \dots \\ I_n = -\frac{1}{n!} + I_{n-1} \end{cases}$$

. Ajoutons membre à membre ces égalités pour provoquer une élimination télescopique : $I_n = -\frac{1}{n!} - \dots - \frac{1}{2!} - \frac{1}{1!} + (e-1)$. Nous obtenons :

$$e = \frac{1}{n!} + \dots + \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} + 1 + I_n = S_n + I_n$$

22.d. L'encadrement que nous avons obtenu en question 22.a montre que la suite (I_n) est une suite de termes strictement positifs majorée par une suite qui converge vers zéro (proportionnelle à la suite des inverses des factorielles). Donc, elle converge elle-même vers zéro.

23.a. Considérons la propriété $\mathcal{P}_k$ de l'entier *k* suivante : $k! > 2^k$.

Initialisation : $4! = 24$ et $2^4 = 16$,l'inégalité $4! > 2^4$ est vérifiée. Ainsi $\mathcal{P}_k$ est vérifiée lorsque $k = 4$.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier *k* supérieur ou égal à 1 la propriété $\mathcal{P}_k$ soit vérifiée, c'est-à-dire supposons que $k! > 2^k$. L'hypothèse $k \geq 1$ implique que $k + 1 \geq 2$.

En multipliant membre à membre les deux inégalités entre nombres strictement positifs : $\begin{cases} k! > 2^k \\ k+1 \geq 2 \end{cases}$ nous obtenons l'inégalité stricte (puisqu'une des deux inégalités est stricte) : $(k+1) \times k! > 2 \times 2^k$.

Autrement dit nous obtenons $(k+1)! > 2^{k+1}$, ce qui démontre que $\mathcal{P}_k \implies \mathcal{P}_{k+1}$, la propriété $\mathcal{P}_k$ est héréditaire dès le rang 1.

17

Conclusion : La propriété $\mathcal{P}_k$ étant initialisée au rang 4 et héréditaire à partir de ce rang, elle est vérifiée pour tout entier $k \geq 4$

23.b. $I_1 = e - 2$ et $I_2 = e - \frac{5}{2}$ en appliquant la formule de récurrence.

23.c. Appliquons l'inégalité du 22.a au rang 2 : $0 < I_2 = e - \frac{5}{2} < \frac{e}{3!} = \frac{e}{6}$ d'où $e\left(1 - \frac{1}{6}\right) < \frac{5}{2}$.

Cette inégalité équivaut à l'inégalité : $e < 3$

23.d. L'inégalité : $e < 3$ implique que $I_1 = e - 2 < 1$ l'inégalité $I_n < \frac{1}{n!}$ est vérifiée au rang 1 particulièrement.

Pour tout entier *n* au moins égal à 2, l'inégalité trouvée en **22.a**. peut s'écrire ainsi : $0 < I_n < \frac{1}{n!} \times \frac{e}{n+1}$

Mais dans ce cas, le fait que $e < 3$ implique pour $n \geq 2$ que $\frac{e}{n+1} \leq 1$, donc que $0 < I_n < \frac{1}{n!}$.

L'inégalité $I_n < \frac{1}{n!}$ est donc vérifiée pour tout entier *n* strictement positif.

Il en résulte de facto l'encadrement $S_n < e < S_n + \frac{1}{n!}$.

23.e. Il s'agit de l'entier 10 car $2^{10} = 1024$.

23.f. Intéressons-nous au terme de rang 7 car $e = S_7 + I_7$ avec $I_7 < \frac{1}{7!} = \frac{1}{5040} < \frac{1}{1000}$

Le calcul montre que $S_7 = \frac{685}{252}$. Nous proposons :

$$\frac{685}{252} < e < \frac{685}{252} + \frac{1}{5040} = \frac{4567}{1680}$$

23.g. Un exemple d'algorithme répondant à la question.

```
>>> def valap(m):
        s=1
        k=0
        while factorial(k)<=10**m:
            k=k+1
            s=s+1/factorial(k)
        print("e est encadré par",s,"et par",s+1/factorial(k))

>>> valap(3)
e est encadré par 2.7182539682539684 et par 2.7184523809523813
```

24.a. Laissée au lecteur

24.b. Un algorithme TI-Nspire répond à la question. (Il faut « ouvrir » les intervalles indiqués).

$matriochki(7)$

$$\begin{array}{ll} 1 & \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \\ 2 & \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix} \\ 3 & \begin{bmatrix} \frac{8}{3} & \frac{17}{6} \end{bmatrix} \\ 4 & \begin{bmatrix} \frac{65}{24} & \frac{11}{4} \end{bmatrix} \\ 5 & \begin{bmatrix} \frac{163}{60} & \frac{109}{40} \end{bmatrix} \\ 6 & \begin{bmatrix} \frac{1957}{720} & \frac{979}{360} \end{bmatrix} \\ 7 & \begin{bmatrix} \frac{685}{252} & \frac{4567}{1680} \end{bmatrix} \end{array}$$

Terminé

"matriochki" enregistr. effectué

Define **matriochki**(n)=
Prgm
For k,1,n
  Define $s=\sum_{j=0}^{k}\left(\frac{1}{j!}\right)$
  Define $t=s+\frac{1}{k!}$
  Disp $k,[s \quad t]$
EndFor
EndPrgm

19

24.c. Etudions les suites formées par les extrémités des intervalles en jeu.

D'une part la suite (S_n) des extrémités à gauche est par construction une suite croissante car somme de termes strictement positifs.

D'autre part, étudions pour tout entier *n* strictement positif la différence D_n suivante :

$$D_n = \left(S_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}\right) - \left(S_n + \frac{1}{n!}\right) = (S_{n+1} - S_n) + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right)$$

$$D_n = \frac{1}{(n+1)!} + \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right) = \frac{1-n}{(n+1)!}$$

Cette différence est négative ou nulle pour tout entier strictement positif, ce qui montre que la suite $\left(S_n + \frac{1}{n!}\right)$ des extrémités à droite est une suite décroissante (strictement à partir du rang 2).

Les intervalles J_n sont donc emboîtés de sorte que $J_{n+1} \subset J_n$ pour tout entier *n* strictement positif.

24 .d. La **question 23.d** avec l'encadrement de *e* indiqué a montré que $e \in J_n$ pour tout entier strictement positif. Donc, *e* appartient à leur intersection.

24.e. Le nombre S_n est rationnel puisque somme des inverses des factorielles allant de 0 à *n*, ces factorielles étant toutes des nombres entiers.

Ce nombre rationnel S_n mis sous forme de quotient de deux entiers s'exprime sous la forme $\frac{a_n}{n!}$ où a_n est un entier puisque la factorielle de *n* est multiple de toutes les factorielles qui la précèdent.

Il en résulte que J_n est l'intervalle ouvert $J_n = \left]\frac{a_n}{n!} ; \frac{a_n+1}{n!}\right[$. Les numérateurs des deux extrémités rationnelles de cet intervalle sont deux entiers consécutifs, il n'existe entre ces deux entiers aucun entier intermédiaire.

Pour tout entier *k* strictement positif, $k \notin \left]\frac{a_n}{n!} ; \frac{a_n+1}{n!}\right[$.

24.f. Supposons que e soit rationnel. Il s'écrit $e = \frac{a}{b}$ où a et b sont des entiers strictement positifs. Une fraction équivalente à cette fraction est la fraction $e = \frac{a\times(b-1)!}{b\times(b-1)!} = \frac{a\times(b-1)!}{b!}$. Il existerait donc un entier k tel que $e = \frac{k}{b!}$, ce qui interdirait l'appartenance de e à l'intervalle J_b en contradiction avec la conclusion de la **question 24.d.**

L'hypothèse de rationalité de e doit être rejetée.

IV. Polygones à angles rationnels

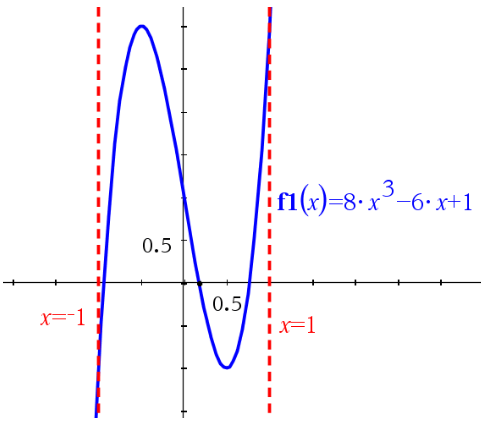
Une définition que l'on pourrait donner d'un « angle rationnel » serait que son rapport à l'angle plat est un nombre rationnel.

25.a. Laissée au lecteur.

25.b. Le nombre $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ vérifie la relation : $\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{18}\right) = 3.\sin\left(\frac{\pi}{18}\right) - 4.\sin^3\left(\frac{\pi}{18}\right)$

Il s'agit d'une solution de l'équation au troisième degré : $\frac{1}{2} = 3X - 4X^3$, ce qui équivaut à dire que $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ est une racine du polynôme $8X^3 - 6X + 1$

26. Laissée au lecteur. Le graphique ci-contre laisse conjecturer l'existence de trois racines



27.a. Procédons par contraposée. Supposons qu'il existe un entier strictement positif *k* tel que *a* et b^k ne soient pas premiers entre eux. Ils ont en commun au moins un diviseur strict, et parmi eux au moins un diviseur premier commun *p*. Puisque ce nombre premier *p* divise b^k, il divise *b* (en effet, *p* divisant le produit de *k* facteurs tous égaux à *b*, il divise au moins l'un d'entre eux, donc *b*).

21 L'entier *p* divise *a* et *b*, les entiers *a* et *b* ne sont pas premiers entre eux.

Donc, si que *a* et b^k ne sont pas premiers entre eux, *a* et *b* non plus. Par contraposée, si *a* et *b* sont premiers entre eux, *a* et b^k aussi.

27.b. Supposons que l'équation en jeu $8X^3 - 6X + 1 = 0$ ait une solution rationnelle $\frac{s}{t}$ avec *s* et *t* entiers premiers entre eux.

Sans diminuer la généralité, nous pouvons supposer *t* entier strictement positif.

Les entiers premiers entre eux *s* et *t* vérifient : $8\left(\frac{s}{t}\right)^3 - 6\frac{s}{t} + 1 = 0$, équation qui est équivalente à l'équation $8s^3 - 6s.t^2 + t^3 = 0$, et que l'on peut écrire ainsi :

$$8s^3 = t \times (6s.t - t^2)$$

2.c et d. Puisque *t* divise le second membre, il divise le premier. Etant premier avec *s*, il l'est avec s^3. D'après le théorème de Gauss, *t* divise 8. Nous en déduisons que $t \in \{1\,;2\,;4\,;8\}$, en nous démarquant quelque peu de l'énoncé.

- Si $t = 1$, l'entier *s* devrait vérifier : $8s^3 - 6s + 1 = 0$. Les seules valeurs entières candidates seraient 1 ou -1 mais aucune ne convient.
- Si $t = 2$, l'entier *s* devrait vérifier : $8s^3 - 24s + 8 = 0$ soit $s^3 - 3s + 1 = 0$. Les seules valeurs entières candidates seraient encore 1 ou -1 mais aucune ne convient.
- Si $t = 4$, l'entier *s* devrait vérifier : $8s^3 - 96s + 64 = 0$ soit $s^3 - 12s + 8 = 0$. L'entier *s* devrait être un diviseur de 8 premier avec 8. Les seules valeurs entières candidates seraient encore 1 ou -1 mais aucune ne convient.
- Si $t = 8$, l'entier *s* devrait vérifier : $8s^3 - 384s + 512 = 0$ soit $s^3 - 48s + 64 = 0$. L'entier *s* devrait être un diviseur de 64 premier avec 64. Les seules valeurs entières candidates seraient encore 1 ou -1 mais aucune ne convient.

Ainsi, toutes les possibilités susceptibles d'aboutir à une solution rationnelle échouent.

L'hypothèse de rationalité d'une solution de l'équation $8X^3 - 6X + 1 = 0$ doit être rejetée. En particulier, $\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)$ qui est l'une des solutions, n'est pas rationnel.

28. Soit un triangle rectangle dont les côtés ont des longueurs rationnelles. Les angles de ce triangle ont pour sinus et pour cosinus des quotients de nombres rationnels, ce sont nécessairement des rationnels. Ce triangle ne peut pas avoir un angle de mesure $\frac{\pi}{18}$ car le sinus de ce nombre est irrationnel.

B. Théorème de Niven

29.a. Avec les notations courantes :

$$P\left(\frac{s}{t}\right) = \sum_{k=0}^{d} c_k.\frac{s^k}{t^k} = \frac{s^d}{t^d} + \sum_{k=1}^{d} c_k.\frac{s^k}{t^k} = \frac{1}{t^d}\left(s^d + \sum_{k=1}^{d} c_k.s^k.t^{d-k}\right) = \frac{1}{t^d}\left(s^d + t.\sum_{k=1}^{d} c_k.s^k.t^{d-k-1}\right)$$

Par conséquent, si $\frac{s}{t}$ est une racine du polynôme *P* la dernière parenthèse s'annule soit :

$$s^d = -t.\sum_{k=1}^{d} c_k.s^k.t^{d-k-1}$$

Le nombre entier *t* divise le second membre donc il divise le premier membre s^d. Mais les nombres *s* et *t* étant premiers entre eux, *t* et s^d le sont aussi. Les seuls diviseurs de s^d qui sont premiers avec s^d étant 1 et -1, une racine rationnelle d'un polynôme unitaire *P* s'écrit sous forme de fraction dont le dénominateur est 1 et -1, c'est un nombre entier.

Toute racine rationnelle d'un polynôme unitaire est un entier.

30.a. Successivement :

$$P_0(X) = 2\,;\ P_1(X) = X$$
$$P_2(X) = X.P_1(X) - P_0(X) = X^2 - 2$$
$$P_3(X) = X.P_2(X) - P_1(X) = X(X^2-2) - X = X^3 - 3X$$
$$P_4(X) = X.P_3(X) - P_2(X) = X(X^3-3X) - (X^2-2) = X^4 - 4X^2 + 2$$

30.b. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ de l'entier *n* : « P_n est unitaire et à coefficient entiers ».

NB. Rappelons que l'ensemble des polynômes à coefficients entiers est anneau : une somme ou unn produit de polynômes à coefficients entiers est encore un polynôme à coefficients entiers.

Initialisation : Cette propriété est vérifiée pour les rangs 0 et 1.

Hérédité : Supposons que P_n et P_{n+1} soient unitaires et à coefficients entiers. Considérons le polynôme P_{n+2}. C'est un cocktail de polynômes à coefficients entiers, il est lui-même à coefficients entiers. Son terme de plus haut degré est celui de XP_{n+1}, le coefficient de ce terme est le même que celui homologue de P_{n+1}, Ce coefficient est donc égal à 1. Ainsi, sous l'hypothèse que P_n et P_{n+1} sont unitaires et à coefficients entiers, le suivant P_{n+2} l'est aussi.
La propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.
Etant initialisée aux deux rangs 0 et 1 et étant héréditaire, la propriété $\mathcal{P}_n$ de l'entier *n* : « P_n est unitaire et à coefficient entiers » est vérifiée pour tout entier naturel.

30.c. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ de l'entier *n* : « Pour tout réel *x*, $P_n(2\cos(x)) = 2.\cos(nx)$ ».

Initialisation : Pour tout réel *x*, $\begin{cases} P_0(2\cos(x)) = 2 = 2.\cos(0\times x) \\ P_1(2\cos(x)) = 2\cos(x) = 2.\cos(1\times x) \end{cases}$

La propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel *n* la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée aux rangs *n* et $(n+1)$, c'est-à-dire supposons que $\begin{cases} P_n(2\cos(x)) = 2.\cos(nx) \\ P_{n+1}(2\cos(x)) = 2.\cos((n+1)x) \end{cases}$ pour tout réel *x*.

Soit *x* un nombre réel. Appliquons la relation de récurrence permettant d'exprimer la valeur en $2\cos(x)$polynôme de rang $(n+2)$:

$$P_{n+2}(2\cos(x)) = (2\cos(x)) \times P_{n+1}(2\cos(x)) - P_n(2\cos(x))$$

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence :

$$P_{n+2}(2\cos(x)) = (2\cos(x)) \times (2.\cos((n+1)x)) - 2.\cos(nx)$$

$$P_{n+2}(2\cos(x)) = 2 \times (2.\cos(x).\cos((n+1)x)) - 2.\cos(nx)$$

Appliquons la formule de linéarisation $2.\cos(a).\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$:

$2.\cos(x).\cos\Big((n+1)x = \cos\big((n+1)x + x\big) + \cos(n+1)\,x - x\Big) = \cos\big((n+2)x\big) + \cos(nx)$.

Nous obtenons : $P_{n+2}(2\cos(x)) = 2\left(\cos\big((n+2)x\big) + \cos(nx)\right) - 2.\cos(nx) = 2\cos\big((n+2)x\big)$

La propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée au rang suivant $(n+2)$.

Nous avons démontré l'implication : $\begin{cases}\mathcal{P}_n \\ \mathcal{P}_{n+1}\end{cases} \Longrightarrow \mathcal{P}_{n+2}$ soit aussi bien $\begin{cases}\mathcal{P}_n \\ \mathcal{P}_{n+1}\end{cases} \Longrightarrow \begin{cases}\mathcal{P}_{n+1} \\ \mathcal{P}_{n+2}\end{cases}$.

La propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire : si elle est vérifiée sur deux rangs consécutifs, elle l'est aux deux rangs consécutifs suivants.

Etant initialisée aux rangs 0 et 1 et étant héréditaire, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel : $P_n(2\cos(x)) = 2.\cos(nx)$ pour tout réel *x*.

31.a. Dans cette question *r* est un rationnel, $r = \frac{s}{t}$ avec *s* et *t* entiers premiers entre eux.

D'après la question précédente pour tout entier *n* : $P_n\left(2\cos\left(\frac{s}{t}\pi\right)\right) = 2.\cos\left(n.\frac{s}{t}\pi\right)$

Si nous choisissons l'entier $n = 2t$, nous obtenons : $P_{2t}\left(2\cos\left(\frac{s}{t}\pi\right)\right) = 2.\cos(2s\pi) = 2$.

Par conséquent le nombre $2\cos(r\pi)$ est une racine du polynôme *Q* unitaire à coefficients entiers défini par : $Q(X) = P_{2t}(X) - 2$

D'après la **question 29**, ce nombre ne peut en être une racine rationnelle que si c'est un entier. Etant égal à deux fois un cosinus, ce nombre est nécessairement compris, au sens large, entre -2 et $+2$.

Le nombre $\cos(r\pi)$ ne peut prendre que les valeurs de l'ensemble $\left\{-1; -\frac{1}{2}\,; 0\,; \frac{1}{2}\,; 1\right\}$

C. Triangles à côtés et angles rationnels.

33. Le cosinus d'un angle d'un triangle s'exprime en fonction des longueurs des côtés à l'aide des formules d'Al-Kashi sous forme de fractions rationnelles (au lecteur de rappeler ces formules).

Ces cosinus s'expriment donc sous forme de cocktails (sommes, produits, quotients) de nombres rationnels. Compte tenu de la structure de corps de l'ensemble des rationnels, ces cosinnus sont eux-mêmes des nombres rationnels.

Un triangle à côtés rationnels a des angles dont les cosinus sont rationnels.

34. Considérons un triangle dont les angles sont rationnels. D'après le théorème de Niven, les cosinus de ses trois angles appartiennent tous à l'ensemble $\left\{-1; -\frac{1}{2}\,; 0\,; \frac{1}{2}\,; 1\right\}$.

Nous pouvons exclure d'emblée les valeurs -1 et 1 pour lesquelles l'angle correspondant est nul ou plat. Il reste la possibilité d'angles de mesure $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$ ou de mesure opposée.

Or, la somme des trois mesures doit être égale à π ou $-\pi$. La seule combinaison possible des trois angles pour obtenir une telle somme est celle de trois angles de mesure $\frac{\pi}{3}$ ou bien $-\frac{\pi}{3}$.

Les seuls triangles à angles rationnels sont les triangles équilatéraux.

Nous en concluons qu'il n'existe aucun triangle qui a, à la fois, des côtés rationnels et des angles rationnels.