Au Maroc, le programme de Mathématiques de la classe de Terminale ressemble à l'ancien programme de Mathématiques de la « Terminale C », filière d'excellence morte et enterrée depuis des années, et qui ne ressuscitera plus jamais. Les annales du bac marocain fourmillent de sujets magistraux, impensables dans la déliquescence des filières actuelles françaises, éminemment formateurs.

1

Rappelons le « petit théorème de Fermat » dont il sera question plusieurs fois : Soit *p* un nombre premier ; pour tout entier relatif *a* non multiple de *p*, la congruence $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$ est vérifiée.

Voici d'abord un exercice posé en 2021, année où l'entier $2021 = 43 \times 47$ se prête à un jeu de congruences particulièrement subtil.

Un exercice du bac marocain 2021

Sujet

EXERCICE3 : (4 points)

Partie I : On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $47x-43y=1$

0.25 1- Vérifier que le couple $(11,12)$ est une solution particulière de l'équation (E)

0.75 2- Résoudre dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E)

Partie II : On considère dans $\mathbb{Z}$ l'équation (F) : $x^{41} \equiv 4 \ [43]$

1- Soit $x \in \mathbb{Z}$ une solution de l'équation (F)

0.5 a) Montrer que x et 43 sont premiers entre eux, en déduire que : $x^{42} \equiv 1 \ [43]$

0.5 b) Montrer que : $4x \equiv 1 \ [43]$, en déduire que : $x \equiv 11 \ [43]$

0.5 2- Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ de l'équation (F)

Partie III : On considère dans $\mathbb{Z}$ le système à deux équations suivant (S) : $\begin{cases} x^{41} \equiv 4 \ [43] \\ x^{47} \equiv 10 \ [47] \end{cases}$

1- Soit x une solution du système (S)

0.5 a) Montrer que x est solution du système (S') : $\begin{cases} x \equiv 11 \ [43] \\ x \equiv 10 \ [47] \end{cases}$

0.5 b) En déduire que : $x \equiv 527 \ [2021]$ (On pourra utiliser la partie I)

0.5 2- Donner l'ensemble des solutions dans $\mathbb{Z}$ du système (S)

Eléments de correction

Partie I

1. On peut se contenter de « vérifier » mais il est aussi possible d'obtenir une solution particulière (la même …) avec l'algorithme d'Euclide étendu.

$$\begin{cases} 47 = 1 \times 43 + 4 \implies 4 = 47 - 43 \\ 43 = 10 \times 4 + 3 \implies 3 = 43 - 10 \times (47 - 43) = 11 \times 43 - 10 \times 47 \\ 4 = 1 \times 3 + 1 \implies 1 = 47 - 43 - (11 \times 43 - 10 \times 47) = 11 \times 47 - 12 \times 43 \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi la solution particulière $(11\,;12)$.

2. Un couple d'entiers relatifs $(x\,;y)$ est solution de (E) si et seulement si :

$$47 \times (x - 11) = 43 \times (y - 12)$$

Les entiers 43 et 47 étant premiers entre eux, cette relation équivaut au fait qu'il existe un entier relatif *k* vérifiant simultanément : $\begin{cases} x - 11 = 43k \\ y - 12 = 47k \end{cases}$.

L'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble des couples d'entiers relatifs de la forme :

$(11 + 43k \;;\; 12 + 47k)$ où *k* est un entier relatif.

Partie II

1. Soit *x* un entier relatif solution de (F) c'est-à-dire vérifiant la congruence $x^{41} \equiv 4 \;\; (43)$.

1.a. Le nombre 43 étant un nombre premier, tout entier relatif est ou bien premier avec 43 ou bien un multiple de 43. Soit alors un entier *y* non premier avec 43 quelconque. Cet entier est un multiple de 43 et toutes ses puissances entières strictement positives (y compris sa puissance 41) sont congrues à zéro modulo 43. Un tel entier n'est pas solution de (F).

Par contraposition, si *x* est solution de (F), alors *x* est premier avec 43.

D'après le petit théorème de Fermat, nous savons que, si *p* est un nombre premier, alors pour tout entier *a* non multiple de *p* (donc premier avec *p*), $a^{p-1} \equiv 1 \ (p)$. Nous pouvons appliquer ce théorème à l'entier *x* solution de (F) et avec $p = 43$.

Nous obtenons que si *x* est solution de (F), alors $x^{42} \equiv 1 \ (43)$.

3

1.b. Du fait que $x^{42} = x^{41} \times x$ et en raison de la compatibilité de la congruence modulo 43 avec la multiplication des entiers relatifs : $\begin{cases} x^{42} \equiv 1 \ (43) \\ x^{41} \equiv 4 \ (43) \\ x^{42} = x^{41} \times x \end{cases} \Rightarrow \ 4x \equiv 1 \ (43).$

Puis, par multiplication membre à membre par 11 et sachant que $44 \equiv 1 \ (43)$:

$$4x \equiv 1 \ (43) \Rightarrow \ x \equiv 11 \ (43)$$

2. Des questions précédentes, nous déduisons que si *x* est solution de (F), alors $x \equiv 11 \ (43)$.

Réciproquement, soit *y* un entier relatif vérifiant la congruence $y \equiv 11 \ (43)$.

Etudions le comportement des puissances de 11 relativement à la congruence modulo 43.

$$\begin{cases} 11^2 = 121 = 2 \times 43 + 35 \ \Rightarrow \ 11^2 \equiv 35 \ (43) \\ 11 \times 35 = 385 = 8 \times 43 + 41 \ \Rightarrow \ 11^3 \equiv 41 \ (43) \\ 11 \times 41 = 451 = 10 \times 43 + 21 \ \Rightarrow \ 11^4 \equiv 21 \ (43) \\ 11 \times 21 = 231 = 5 \times 43 + 16 \ \Rightarrow \ 11^5 \equiv 16 \ (43) \\ 11 \times 16 = 176 = 4 \times 43 + 4 \ \Rightarrow \ 11^6 \equiv 4 \ (43) \\ 11 \times 4 = 44 = 1 \times 43 + 1 \ \Rightarrow \ 11^7 \equiv 1 \ (43) \end{cases}$$

Cette dernière congruence implique que : $11^{42} = 11^{7 \times 6} \equiv 1 \ (43)$. Par conséquent :

$$y \equiv 11 \ (43) \Rightarrow \ y^{42} \equiv 1 \ (43)$$

La congruence $y \equiv 11 \ (43)$ implique que, réciproquement, *y* est solution de (F).

L'ensemble des solutions de (F) est l'ensemble des entiers qui sont congrus à 11 modulo 43 c'est-à-dire l'ensemble des entiers de la forme $11 + 43k$ où *k* est un entier relatif.

Partie III

1.a. Pour étudier le système (S), il nous reste à étudier la deuxième congruence de ce système.

Soit *x* un vérifiant la congruence $x^{47} \equiv 10\ \ (47)$.

4

Le nombre 47 étant lui aussi un nombre premier, pour tout *x* non multiple de 47, le petit théorème de Fermat nous dit que $x^{46} \equiv 1\ \ (47)$.

Du fait que $x^{47} = x^{46} \times x$ et en raison de la compatibilité de la congruence modulo 43 avec la multiplication des entiers relatifs : $\begin{cases} x^{46} \equiv 1\ \ (47) \\ x^{47} \equiv 10\ \ (47) \\ x^{47} = x^{46} \times x \end{cases} \implies x \equiv 10\ \ (47).$

Ainsi la congruence $x^{47} \equiv 10\ \ (47)$ implique la congruence $x \equiv 10\ \ (47)$.

Réciproquement, soit *y* un entier relatif vérifiant la congruence $y \equiv 10\ \ (47)$.

En appliquant le petit théorème de Fermat à l'entier 10 avec le nombre premier 47 , nous obtenons la congruence : $10^{46} \equiv 1\ \ (47)$ et par conséquent $10^{47} \equiv 10\ \ (47)$

Nous obtenons donc l'implication réciproque : $y \equiv 10\ \ (47) \implies y^{47} \equiv 10\ \ (47)$.

Les deux systèmes (S) et (S') sont des systèmes équivalents.

1.b. Cherchons à résoudre le système (S').

Un entier *x* est solution du système $\begin{cases} x \equiv 11\ \ (43) \\ x \equiv 10\ \ (47) \end{cases}$ si et seulement s'il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que $\begin{cases} x = 11 + 43u \\ x = 10 + 47v \end{cases}$.

Il en est ainsi si et seulement si le couple $(u\ ;\ v)$ vérifie l'équation $11 + 43u = 10 + 47v$, équation équivalente à l'équation $47v - 43u = 1$ résolue dans la partie I.

En vertu des résultats de cette partie I, les couples solutions de cette équation sont exactement les couples de la forme $(u = 12 + 47k\ \ ;\ \ v = 11 + 43k)$ où *k* est un entier relatif.

Nous en déduisons les entiers *x* convenables et eux seuls avec les deux relations concordantes, dans lesquelles *k* est un même entier relatif :

$$\begin{cases} x = 11 + 43(12 + 47k) = 527 + 2021k \\ x = 10 + 47(11 + 43k) = 527 + 2021k \end{cases}$$

Ou, ce qui revient au même : $x \equiv 527 \ (2021)$

5

2. Nous avons pris soin de conserver des équivalences dans la résolution de la question précédente.

Les solutions du système (S) sont les entiers relatifs de la forme $527 + 2021k$

où *k* est un entier relatif.

Ces résultats peuvent être vérifiés à l'aide d'un algorithme Python, affichant les entiers solutions qui appartiennent à un intervalle donné :

```
>>> def bacmaroc2021(a,b):
        s=[]
        for x in range (a,b+1):
                if x%43==11 and x%47==10:
                        s=s+[x]
        return s

>>> bacmaroc2021(-10000,10000)
[-9578, -7557, -5536, -3515, -1494, 527, 2548, 4569, 6590, 8611]
```

Un exercice du bac marocain 2016

6

Sujet

Partie I

1. Soit *a* un entier relatif. Montrer que si *a* et 13 sont premiers entre eux alors : $a^{2016} \equiv 1 \ (13)$.

2. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation (*E*) : $x^{2015} \equiv 2 \ (13)$.et *x* une solution de (*E*).

2.1. Montrer que *x* et 13 sont premiers entre eux.

2.2. Montrer que : $x \equiv 7 \ (13)$

3. Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation (*E*) est : $S = \{7 + 13k \ ; k \in \mathbb{Z}\}$.

Partie II

Considérons une urne *U* contenant cinquante boules numérotées de 1 à 50 indiscernables au toucher.

1. On tire au hasard une boule de l'urne. Quelle est la probabilité de tirer une boule portant un nombre solution de l'équation (*E*).

2. On tire au hasard une boule de l'urne, on note son numéro et on la remet dans l'urne. On répète cette expérience trois fois de suite. Est-il vrai ou faux que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule portant un nombre solution de l'équation(*E*) est supérieure à $\frac{1}{5}$?

Eléments de correction

Partie I

7

1. D'après le petit théorème de Fermat appliqué avec le nombre premier 13, pour tout entier relatif *a* premier avec 13, $a^{12} \equiv 1 \ (13)$. Or nous remarquons que $2016 = 168 \times 12$ et donc pour tout entier *a,* qu'il soit ou non premier avec 13 : $a^{2016} = (a^{12})^{168}$.

Par conséquent, pour tout entier relatif *a* premier avec 13 :

$$a^{2016} \equiv (a^{12})^{168} \equiv 1^{168} \equiv 1 \ (13)$$

2. Considérons un entier relatif *x* vérifiant a congruence $x^{2015} \equiv 2 \ (13)$.

2.a. Le nombre 13 étant un nombre premier, tout entier non premier avec 13 est un multiple de 13. Soit alors *y* un entier relatif non premier avec 13. En tant que multiple de 13, cet entier vérifie la congruence $y \equiv 0 \ (13)$, congruence qui implique la congruence $y^{2015} \equiv 0 \ (13)$,

La puissance 2015 d'un tel entier n'est donc pas congrue à 2 modulo 13.

$$y \text{ non premier avec } 13 \implies y^{2015} \not\equiv 2 \ (13),$$

Par contraposition, si *x* est un entier relatif vérifiant la congruence $x^{2015} \equiv 2 \ (13)$, alors *x* est nécessairement premier avec 13 :

$$x^{2015} \equiv 2 \ (13) \implies x \text{ premier avec } 13.$$

2.b. Soit un entier relatif *x* vérifiant la congruence $x^{2015} \equiv 2 \ (13)$. Alors :

$$\begin{cases} x^{2016} = x^{2015} \times x \\ x^{2015} \equiv 2 \ (13) \\ x^{2016} \equiv 1 \ (13) \end{cases} \implies 2x \equiv 1 \ (13)$$

Or : $7 \times 2 = 14 = 1 + 13$ donc $7 \times 2 \equiv 1 \ (13)$

En multipliant par 7 chacun des deux membres de la congruence $2x \equiv 1 \ (13)$, nous obtenons :

$$x^{2015} \equiv 2 \ (13) \implies x \equiv 7 \ (13).$$

L'ensemble des entiers *x* vérifiant la congruence $x^{2015} \equiv 2 \ (13)$ est inclus dans l'ensemble des entiers congrus à 7 modulo 13.

3. Réciproquement, soit *y* un entier congru à 7 modulo 13.

Etudions le comportement de certaines des puissances de 7 relativement à la congruence modulo 13. Plus particulièrement, nous pouvons appliquer le résultat de la question 1 à cet entier 7 qui est premier avec 13, c'est-à-dire que $7^{2016} \equiv 1 \ (13)$.

8

Or : $7^{2016} = 7 \times 7^{2015}$, donc $7 \times 7^{2015} \equiv 1 \ (13)$.

En multipliant par 2 chacun des deux membres de cette congruence, et puisque $7 \times 2 \equiv 1 \ (13)$, nous obtenons la congruence :

$$7^{2015} \equiv 2 \ (13).$$

Par conséquent, réciproquement : $y \equiv 7 \ (13) \implies y^{2015} \equiv 2 \ (13)$.

Réciproquement l'ensemble des entiers congrus à 7 modulo 13 est inclus dans l'ensemble des entiers *x* vérifiant la congruence $x^{2015} \equiv 2 \ (13)$.

L'ensemble des entiers *x* vérifiant la congruence $x^{2015} \equiv 2 \ (13)$ est exactement l'ensemble des entiers congrus à 7 modulo 13, c'est-à-dire de la forme $7 + 13k$ où *k* est un entier relatif.

Partie II

Il est facile de créer de toutes pièces un exercice de probabilité, en s'intéressant à une « expérience » où l'on note la réalisation d'un évènement *A*. C'est le cas ici.

1. En l'occurrence nous disposons d'un univers $\Omega = \{1 ; 2 ; \ldots ; 50\}$ de 50 éléments muni de l'équiprobabilité et l'évènement *A* « Obtenir une boule dont le numéro est solution de l'équation (E) » est réalisé si ce numéro est 7, 20, 33 ou 46. Autrement dit ;

$$A = \{7 ; 20 ; 33 ; 46\} \ ; \ P(A) = \frac{4}{50} = \frac{2}{25} = 0{,}08$$

2. Si l'on effectue trois répétitions de cette expérience, la variable aléatoire *X* égale au nombre de réalisations de *A* suit une loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = 0{,}08$.

La probabilité d'une non-réalisation de *A* est de ce fait $q = 1 - p = 0{,}92$.

9

L'évènement « Obtenir au moins une boule dont le numéro est solution de l'équation (E) » est le contraire de l'évènement « $X = 0$ » La probabilité de cet évènement est :

$$1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}92^3 = 0{,}221312$$

Soit un peu plus de 22 %. L'affirmation « plus d'une chance sur cinq » est exacte.

Un exercice du bac marocain 2017

Sujet

10

On admet que le nombre 2017 est premier et que $2016 = 2^5 3^2 7$
Soit p **un nombre premier supérieur ou égale à** 5

1 - Soit le couple $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que : $px + y^{p-1} = 2017$

a) Vérifier que : $p < 2017$.

b) Montrer que p ne divise pas y

c) Montrer que : $y^{p-1} \equiv 1\ [P]$ puis en déduire que p divise 2016

d) Montrer que : $p = 7$

2 - Déterminer ,suivant les valeurs de p, les couples (x, y) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ vérifiant : $px + y^{p-1} = 2017$.

3. Qu'est-ce qui changerait si, au lieu de supposer « *P* nombre premier au moins égal à 5 » , on supposait « *p* nombre premier impair » ?

S'aider éventuellement d'un algorithme pour répondre à cette question.

1.a. Le nombres *x* et *y* sont des entiers strictement positifs, de même que le nombre y^{p-1} en tant que puissance strictement positive de *y*.

- La relation $px = 2017 - y^{p-1}$ et le fait que $y^{p-1} > 0$ montrent que $px < 2017$.
- Le fait que *x* est un entier strictement positif, donc un nombre au moins égal à 1, montre que l'inégalité $x \leq px$ est vérifiée.

Nous en déduisons : $x \leq px < 2017.*$

1.b. Supposons que *p* divise *y*. Alors il diviserait la puissance y^{p-1} de *y* : il existerait un entier *k* strictement positif tel que $y^{p-1} = kp$.

Alors *p* diviserait la somme $px + y^{p-1}$ et il s'agirait d'un diviseur strict puisqu'on aurait la relation $px + y^{p-1} = p \times (x + k)$ avec $x + k \geq 2$. Le nombre *p* serait donc un diviseur strict du nombre 2017, ce qui est impossible puisque 2017 est un nombre premier.

L'hypothèse « *p* divise *y* » est à rejeter.

Nous en déduisons que : *p* ne divise pas *y*.

1.c. Puisque *p* est un nombre premier qui ne divise pas *y*, le nombre *y* est premier avec *p* et nous pouvons lui appliquer le petit théorème de Fermat avec le nombre premier *p*.

En vertu de ce théorème : $y^{p-1} \equiv 1 \ \ (p)$

11

1.d. L'égalité $px = 2017 - y^{p-1}$ implique la relation $2017 - y^{p-1} \equiv 0 \ \ (p)$.

Compte tenu de la congruence $y^{p-1} \equiv 1 \ \ (p)$, nous obtenons $2017 - 1 \equiv 0 \ \ (p)$, c'est-à-dire que $2016 \equiv 0 \ \ (p)$, ce qui montre que : *p* divise 2016.

2. Compte tenu de la décomposition de 2016 en produit de facteurs premiers, les seuls nombres premiers qui divisent 2016 sont les nombres premiers 2, 3 et 7. La condition « *p* au moins égal à 5 » ne laisse que la possibilité : $p = 7$.

Nous devons résoudre l'équation : $7x + y^6 = 2017$.

Vu que la puissance sixième de 4 est égale à 4096 (donc > 2017), le nombre *y* ne peut prendre que les valeurs 1, 2 ou 3.

- Si $y = 1$, nous obtenons $x = 288$.
- Si $y = 2$, nous obtenons $7x = 1953$ puis $x = 279$.
- Si $y = 3$, nous obtenons $7x = 1288$ puis $x = 184$.

Il y a donc trois solutions, les couples $(288\ ;1), (279\ ;2), (184, 3)$.

Si maintenant on suppose « *p* nombre premier impair », la valeur $p = 3$ devient possible ce qui ajoute peut-être des solutions.

Nous devons résoudre l'équation : $7x + y^2 = 2017$.

L'examen de la racine carrée de 2017 montre que *y* peut prendre les valeurs entières de 1 à 44.

```
>>> def maroc2017():
        for y in range(1,45):
                u=2017-y*y
                if u%7==0:
                        print([int(u/7),y])


>>> maroc2017()
[288, 1]
[283, 6]
[279, 8]
[264, 13]
[256, 15]
[231, 20]
[219, 22]
[184, 27]
[168, 29]
[123, 34]
[103, 36]
[48, 41]
[24, 43]
>>>
```

Pour terminer ce document d'arithmétique, un exercice sauce harissa. Toujours des congruences et la grain de sel de Fermat.

13

Un exercice du bac marocain 2020

Sujet

Soient p et q deux nombres premiers vérifiant : $p<q$ et $9^{p+q-1}\equiv 1\ [pq]$

1 - a) Montrer que p et 9 sont premiers entre eux.

b) En déduire que : $9^{p-1}\equiv 1\ [p]$ et que $9^{q}\equiv 1\ [p]$

2 - a) Montrer que $p-1$ et q sont premiers entre eux.

b) En utilisant le théorème de BEZOUT, montrer que : $p=2$

3 - a) En utilisant le théorème de FERMAT, montrer que : $9^{q-1}\equiv 1\ [q]$

b) En déduire que : $q=5$

Eléments de correction

1.a. Supposons que la congruence $9^{p+q-1} \equiv 1 \ (pq)$ soit vérifiée. Il existe un entier relatif *k* tel que $9^{p+q-1} = 1 + k \times (pq)$, relation qui peut s'écrire : $(9^{p+q-2}) \times 9 - (kq) \times q = 1$

14

Dans cette relation, 9^{p+q-2} est une puissance de 9 d'exposant au moins égal à *q* (puisque *p* est un nombre premier, il est au moins égal à 2).

Il existe deux entiers relatifs *u* et *v* qui sont les entiers $u = 9^{p+q-2}$; $v = -kp$ tels que $9u + pv = 1$.

D'après le théorème de Bézout, les entiers 9 et *p* sont premiers entre eux.

Nous en déduisons que *p* est un nombre premier distinct de 3 car le seul nombre premier qui n'est pas premier avec 9 est le n ombre premier 3.

1.b. Rappelons que si *m* et *n* sont deux entiers strictement positifs, la congruence $a \equiv 1 \ (m \times n)$, qui signifie qu'il existe un entier relatif *k* tel que $a = 1 + k \times (mn) = 1 + (kn) \times m = 1 + (km) \times n$ implique chacune des congruences $\begin{cases} a \equiv 1 \ (m) \\ a \equiv 1 \ (n) \end{cases}$.

Puisque 9 est premier avec *p* nous pouvons lui appliquer le petit théorème de Fermat avec l'entier premier *p*. En vertu de ce théorème : $9^{p-1} \equiv 1 \ (p)$.

La congruence $9^{p+q-1} \equiv 1 \ (pq)$ implique, compte tenu du rappel, la congruence $9^{p+q-1} \equiv 1 \ (p)$. Or : $9^{p+q-1} = 9^{p-1} \times 9^q$. En raison de la compatibilité des congruences avec la multiplication des entiers : $\begin{cases} 9^{p-1} \times 9^q \equiv 1 \ (p) \\ 9^{p-1} \equiv 1 \ (p) \end{cases} \Rightarrow 9^q \equiv 1 \ (p)$

2.a. L'entier *p* étant un nombre premier strictement inférieur à *q*, l'inégalité $2 \leq p \leq q - 1$ est vérifiée, c'est-à-dire que $1 \leq p - 1 \leq q - 2$.

En tant que nombre premier, nous savons que *q* est premier avec tous les entiers strictement positifs qui lui sont strictement supérieurs. En particulier, *q* est premier avec $p - 1$.

2.b. Appliquons le théorème de Bézout aux entiers premiers entre eux $p-1$ et q : il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que : $(p-1)\times u + q \times v = 1$.

Considérons alors le nombre $9^{(p-1)\times u+q\times v}$. D'une part ce nombre est égal à 9 puisque son exposant est égal à 1.

15

D'autre part : $9^{(p-1)\times u+q\times v} = (9^{p-1})^u \times (9^v)^v$. Si nous considérons une congruence modulo *p*, les entiers 9^{p-1} et 9^v sont tous deux congrus à 1 modulo *p*. Par conséquent $(9^{p-1})^u \times (9^v)^v \equiv 1\ (p)$.

Nous en déduisons la congruence : $9 \equiv 1\ (p)$. Cette congruence élimine les valeurs possibles 3, 5 et 7 de *p* ainsi que tous les nombres premiers supérieurs à 9. Il reste comme seule valeur possible la valeur 2, pour laquelle la congruence est bien vérifiée.

Nécessairement, $p = 2$.

2.c. La congruence $9^{p+q-1} \equiv 1\ (pq)$ devient : $9^{q+1} \equiv 1\ (2q)$.

Cette congruence implique la congruence $9^{q+1} \equiv 1\ (q)$ comme nous l'avons vu dans le « rappel ».

Nous en déduisons que $q \neq 3$ car cette congruence n'est pas vérifiée pour la valeur 3. Ce nombre premier *q* étant distinct de 3, l'entier 9 est premier avec *q* et nous pouvons lui appliquer le petit théorème de Fermat : $9^{q-1} \equiv 1\ (q)$.

Compte tenu de ces deux congruences modulo *q*

$$\begin{cases} 9^{q+1} \equiv 1\ (q) \\ 9^{q-1} \equiv 1\ (q) \\ 9^{q+1} = 9^{q-1} \times 9^2 \end{cases} \Rightarrow 9^2 \equiv 1\ (q) \Rightarrow \begin{cases} 9 \equiv 1\ (q) \\ ou\ bien \\ 9 \equiv -1\ (q) \end{cases}$$

Ces congruences éliminent tous les entiers premiers supérieurs à 9 et éliminent aussi les nombres premiers 3 et 7, pour lesquels aucune des deux congruences possibles n'est vérifiée.

En revanche : $9 \equiv -1\ (5)$, ce qui fait de 5 un nombre premier un candidat.

Vérifions lorsque $p = 2$; $q = 5$. Dans ce cas $p \times q = 2$ et $9^{p+q+1} = 9^6 = 531441$ et ce nombre est bien congru à 1 modulo 10 puisque son chiffre des unités est un « 1 ».

Le couple $(p = 2\ ;\ q = 5)$ est solution et c'est le seul possible.