Structures algébriques : groupes, corps, homomorphismes

1

Au Maroc, le programme de Mathématiques de la classe de Terminale ressemble à l'ancien programme de Mathématiques de la « Terminale C », filière d'excellence morte et enterrée depuis des années, et qui ne ressuscitera plus jamais. Voici quelques exercices sur les structures algébriques. Pour les filières françaises de Terminale, tout ce qui suit est du sanscrit.

.

Un exercice du bac marocain 2011

Sujet

Nous ne retenons que la partie II de ce sujet

Partie II : Soit a un nombre réel .

Pour tout x et y de l'intervalle $I =]a;+\infty[$ on pose : $x * y = (x-a)(y-a)+a$.

1 - **a)** Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I .

b) Montrer que $*$ est une loi commutative et associative.

c) Montrer que $(I,*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

2 - Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

3 - On considère l'application : $\begin{array}{cccc} \phi & : & I & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{x-a} \end{array}$

a) Montrer que ϕ est un isomorphisme de $(I,*)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

b) Résoudre dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)} = a^3 + a$ où $x^{(3)} = x * x * x$.

Eléments de correction

Partie II

1.a. Il s'agit de vérifier que si *x* et *y* appartiennent tous deux à l'intervalle ouvert $]a\,;\ +\infty[$, il en est de même de $x * y$.

Or, si *x* et *y* appartiennent à $]a\,;\ +\infty[$, les deux inégalités $\begin{cases} x > a \\ y > a \end{cases}$ sont vérifiées, et elles impliquent l'inégalité $(x-a)(y-a) > 0$, donc l'inégalité $(x-a)(y-a) + a > a$. Ainsi :

$$\begin{cases} x \in \,]a\,;\ +\infty[\\ y \in \,]a\,;\ +\infty[\end{cases} \implies x * y \in \,]a\,;\ +\infty[.$$

La loi « étoile » est une loi de composition interne sur $]a\,;\ +\infty[$

1.b. La commutativité de la loi « étoile » est une conséquence directe de la commutativité de la multiplication usuelle. Etudions l'associativité en considérant trois éléments quelconques *x, y, z* de l'intervalle $]a\,;\ +\infty[$:

$(x * y) * z = (x * y - a)(z - a) + a = \Big(\big((x-a)(y-a) + a\big) - a\Big)(z-a) + a\Big)$ soit :

$$(x * y) * z = (x-a)(y-a)(z-a) + a$$

$x * (y * z) = (x-a)(y * z - a) + a = (x-a)\Big(\big((y-a)(z-a) + a\big) - a\Big) + a$ soit :

$$x * (y * z) = (x-a)(y-a)(z-a) + a$$

Les deux résultats sont identiques ce qui prouve l'égalité $(x * y) * z = x * (y * z)$ quels que soient les éléments quelconques *x, y, z* de l'intervalle $]a\,;\ +\infty[$.

La loi « étoile » est associative.

Cherchons s'il existe un élément neutre *e*, c'est-à-dire un élément de $]a\,;\ +\infty[$ vérifiant : $e * x = x$ pour tout *x* de $]a\,;\ +\infty[$. Etudions la différence $e * x - x$:

Pour tout *x* de $]a\,;\ +\infty[$, $e * x - x = \big((e-a)(x-a) + a\big) - x = (e - a - 1)(x - a)$.

De ce fait, la différence $e * x - x$ est nulle pour tout *x* si et seulement si $e = a + 1$ et ce nombre réel est bien dans l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$.

La loi « étoile » possède dans $]a\,;\,+\infty[$un élément neutre, l'élément $e = a + 1$.

3

2. La loi « étoile » est une loi de composition interne sur l'intervalle $I =]a\,;\,+\infty[$ qui est associative et qui possède un élément neutre sur cet intervalle. Pour que *I* soit un groupe muni de la loi « étoile », il reste à voir si tout élément de *I* admet un élément inverse.

Soit *x* un élément quelconque de $]a\,;\,+\infty[$.

Cherchons s'il existe un élément *y* de $]a\,;\,+\infty[$ tel que , $x * y = e = a + 1$.

Pour cela, nous devons résoudre l'équation d'inconnue *y* : $(x - a)(y - a) + a = a + 1$.

La résolution de cette équation donne :

$$y = \frac{a.x - a^2 + 1}{x - a} = a + \frac{1}{x - a}$$

Il s'agit bien d'un nombre réel appartenant à l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$car, si $x > a$, alors $\frac{1}{x-a} > 0$ et $y > a$.

Tout élément de l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ admet un inverse pour la loi « étoile ».

L'intervalle $]a\,;\,+\infty[$, muni de la loi « étoile » est un groupe, et ce groupe est commutatif car le loi « étoile est commutative.

3.a. Etudions d'abord les propriétés d'injectivité et surjectivité de l'application phi définie sur l'intervalle : $I =]a\,;\,+\infty[$ par : $x \in I =]a\,;\,+\infty[\longmapsto \varphi(x) = \frac{1}{x-a}$.

Une étude sommaire de cette fonction montre qu'elle est strictement décroissante et continue sur l'intervalle *I* et que ses limites aux bornes de *I* sont respectivement $+\infty$ et 0. Cette fonction phi réalise donc une bijection de *I* sur son intervalle image $J =]0\,;\,+\infty[= \mathbb{R}_+^*$.

Etudions l'image par l'application phi d'une composition $x * y$:

$$\varphi(x * y) = \frac{1}{x * y - a} = \frac{1}{\big((x-a)(y-a)+a\big)-a} = \frac{1}{(x-a)(y-a)} = \frac{1}{x-a} \times \frac{1}{y-a}$$

Nous obtenons la relation : $\varphi(x * y) = \varphi(x) \times \varphi(y)$ ce qui montre que phi est un homomorphisme du groupe $(I,*)$ vers le groupe $(\mathbb{R}_+^*,\times)$. Etant une application bijective, c'est un isomorphisme de groupe.

3.b. Nous trouvons successivement : $x * x = (x-a)^2 + a$ puis : $x * x * x = (x-a)^3 + a$

L'équation à résoudre est équivalente à : $(x-a)^3 = a^3$ soit à $x - a = a$

- Si $a \leq 0$, cette équation n'a pas de solution dans l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$.
- Si $a > 0$, l'équation à résoudre a pour unique solution le nombre $2a$ (qui dans ce cas appartient bien à l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$).

Un exercice du bac marocain 2008

Deux lois et une structure de corps

Sujet

On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ par une loi de composition interne $*$ définie par :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) \;;\; x * y = x + y - 3xy$$

1 - a) Vérifier que : $\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) \;;\; (1-3x)(1-3y) = 1 - 3(x*y)$

b) Montrer que $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$ est un groupe abélien.

2 - a) Montrer que l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\};*\right) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^\star;\times) \\ x & \longmapsto & 1-3x \end{array}$ est un isomorphisme.

b) Montrer que : $\phi^{-1}\left(\mathbb{R}_+^\star\right) = \left]-\infty;\frac{1}{3}\right[$

c) Montrer que $\left(\left]-\infty;\frac{1}{3}\right[;*\right)$ est un sous-groupe de $\left(\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\};*\right)$.

3 - Pour chaque x de l'ensemble $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$ et pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose :

$$x^{(0)} = 0 \quad \text{et} \quad x^{(n+1)} = x^{(n)} * x$$

a) Montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}\right);(\forall n \in \mathbb{N}) \;;\; \phi\left(x^{(n)}\right) = (\phi(x))^n$

b) En déduire $x^{(n)}$ en fonction de x et n.

4 - On munit l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une loi de composition interne $\top$ définie par :

$$\left(\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2\right) \;;\; x \top y = x + y - \frac{1}{3}$$

a) Montrer que $(\mathbb{R};\top)$ est un groupe abélien.

b) Montrer que : $(\mathbb{R};\top;*)$ est un corps commutatif.

Eléments de correction

1.a. Soit $(x\,;y)$ un couple de réels quelconques.

D'une part, par définition de la loi « étoile » : $1-3(x*y)=1-3x-3y+9xy$

D'autre part: $(1-3x)(1-3y)=1-3y-3x+(-3x)\times(-3y)=1-3x-3y+9xy$

Les deux expressions ont des formes développées identiques, elles sont égales.

Pour tout couple $(x\,;y)$ de réels : $1-3(x*y)=(1-3x)(1-3y)$.

1.b. La relation précédente montre que si *x* et *y* sont tous deux distincts du nombre $\frac{1}{3}$, alors le nombre $x*y$ est lui aussi distinct de $\frac{1}{3}$. En effet, dans cette hypothèse, $1-3x$ et $1-3y$ sont tous deux non nuls ce qui implique que leur produit, égal à $1-3(x*y)$, est lui aussi non nul. Concluons :

La loi « étoile » est une loi de composition interne sur l'ensemble $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Etudions son éventuelle associativité en considérant trois réels *x, y, z* tous distincts de $\frac{1}{3}$.

$(x*y)*z=(x*y)+z-3(x*y)z=(x+y-3xy)+z-3(x+y-3xy)z$ soit :

$$(x*y)*z=x+y+z-3xy-3yz-3zx+9xyz$$

$x*(y*z)=x+\ (y*z)+3x(y*z)=x+(y+z-3yz)-3x(y+z-3yz)$ soit :

$$x*(y*z)=\ x+y+z-3xy-3yz-3zx+9xyz$$

Les deux résultats sont identiques ce qui prouve l'égalité $(x*y)*z=x*(y*z)$ quels que soient les éléments *x, y, z* de l'ensemble $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

La loi « étoile » est associative.

Cherchons s'il existe un élément neutre *e*, c'est-à-dire un élément de $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ vérifiant : $e*x=x$ pour tout *x* de $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$.. Etudions pour cela la différence $e*x-x$:

Pour tout *x* de de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, $e * x - x = x + e - 3e.x - x = e(1 - 3x)$

De ce fait, la différence $e * x - x$ est nulle pour tout *x* si et seulement si $e = 0$.

La loi « étoile » possède dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, un élément neutre, l'élément $e = 0$.

7

Cherchons si tout élément de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ admet un élément inverse.

Soit *x* un élément quelconque de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$,

Cherchons s'il existe un élément *y* de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ tel que , $x * y = 0$.

Pour cela, nous devons résoudre l'équation d'inconnue *y* : $x + y - 3xy = 0$ soit $y(1 - 3x) = -x$

La résolution de cette équation donne :

$$y = \frac{x}{3x - 1}$$

En remarquent que $\frac{x}{3x-1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3(3x-1)}$, on justifie que *y* est bien distinct de $\frac{1}{3}$.

Tout élément de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, admet dans ce même ensemble un inverse pour la loi « étoile ».

La loi « étoile » est une loi de composition interne dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, associative, possédant un élément neutre et pour laquelle tout élément de $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ possède un inverse.

L'ensemble $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, muni de la loi « étoile » est un groupe.

La propriété de commutativité de la loi « étoile » est une conséquence directe de la commutativité de l'addition et de la multiplication usuelles. Ce groupe est abélien.

2.a. Etudions d'abord les propriétés d'injectivité et surjectivité de l'application phi définie sur l'intervalle : $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ par : $x \in \mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\} \longmapsto \varphi(x)=1-3x$.

Cette application est la restriction à $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ d'une application affine définie sur $\mathbb{R}$ en entier qui en tant que telle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et qui envoie $\frac{1}{3}$ sur 0. C'est pourquoi la restriction phi à $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ de cette application affine est une bijection de $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Etudions l'image par l'application phi d'une composition $x * y$:

$$\varphi(x * y)=1-3x * y=1-3x-3y+9xy=(1-3x)\times(1-3y)$$

Nous obtenons la relation : $\varphi(x * y)=\varphi(x)\times\varphi(y)$ ce qui montre que phi est un homomorphisme du groupe $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ muni de la loi « étoile » vers le groupe $\mathbb{R}^*$ muni de la multiplication usuelle.

Etant une application bijective, c'est un isomorphisme de groupe.

2.b. La relation $y=\varphi(x)=1-3x$ s'inverse en : $x=\varphi^{-1}(y)=\frac{1}{3}-\frac{y}{3}$.

Or : $y \in \mathbb{R}_+^* \iff y>0 \iff \frac{1}{3}-\frac{y}{3}<\frac{1}{3} \iff \varphi^{-1}(y) \in \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$

L'image de $\mathbb{R}_+^*$ par l'isomorphisme réciproque de phi est l'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$

(Et l'image directe par phi de $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$ est $\mathbb{R}_+^*$).

2.c. Nous savons, par sa stabilité, que l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ est un sous-groupe du groupe $\mathbb{R}^*$ muni de la multiplication usuelle (plus précisément parce que quels que soient les réels strictement positifs *x* et *y*, le nombre $x \times \frac{1}{y}$ est lui aussi strictement positif).

Par conséquent, $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$ étant l'image du sous-groupe $\mathbb{R}_+^*$ par l'isomorphisme réciproque de phi est un sous-groupe du groupe $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ muni de la loi « étoile ».

L'intervalle $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$ muni de la loi « étoile » est un sous-groupe du groupe $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{3}\right\}$ (muni de cette même loi « étoile »).

3.a. La propriété de l'entier *n* : $\varphi\left(x^{(n)}\right) = (\varphi(x))^n$ est initialisée au rang zéro par la convention :

$x^{(0)} = 0$ qui implique que l'on a bien $\varphi\left(x^{(0)}\right) = \varphi(0) = 1 = (\varphi(x))^0$

Elle est héréditaire en vertu de la nature « homomorphisme de groupes » de l'application phi.

Elle est donc vérifiée pour tout entier naturel *n*.

3.b. Compte tenu de la propriété démontrée, $\varphi\left(x^{(n)}\right) = (1-3x)^n$

Et par conséquent :

$$x^{(n)} = \varphi^{-1}((1-3x)^n) = \frac{1}{3} - \frac{(1-3x)^n}{3}$$

4.a. La loi T est par construction une loi de composition interne sur ℝ. Sa commutativité découle immédiatement de la commutativité de l'addition usuelle.

Etudions son éventuelle associativité en considérant trois réels *x, y, z*.

$$(x \top y) \top z = (x \top y) - \frac{1}{3} = \left(x + y - \frac{1}{3}\right) + z - \frac{1}{3} = x + y + z - \frac{2}{3}$$

$$x \top (y \top z) = x + \ (y \top z) - \frac{1}{3} = x + \left(y + z - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = x + y + z - \frac{2}{3}$$

Les deux résultats sont identiques ce qui prouve l'égalité $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$ quels que soient les réels *x, y, z*.

La loi « té » est associative.

Cherchons s'il existe un élément neutre *e*, c'est-à-dire un réel vérifiant : $e \top x = x$ pour tout réel *x*

Etudions pour cela la différence $e \top x - x$:

Pour tout réel *x*, $e \top x - x = x + e - \frac{1}{3} - x = e - \frac{1}{3}$

De ce fait, la différence $e \top x - x$ est nulle pour tout x si et seulement si $e = \frac{1}{3}$.

La loi « té » possède un élément neutre, l'élément $e = \frac{1}{3}$.

10 Cherchons si tout réel admet un élément inverse (un « opposé »).

Soit x un réel. Cherchons s'il existe un réel y tel que , $x \top y = \frac{1}{3}$, soit tel que $x + y - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Nous obtenons comme opposé :

$$y = -x + \frac{2}{3}$$

Tout réel admet un opposé pour la loi « té ».

La loi « té » est une loi de composition interne associative, possédant un élément neutre et pour laquelle tout réel possède un opposé.

L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la loi « té » est un groupe abélien.

4.b. Pour démontrer que $(\mathbb{R},\ \top,\ *)$ est un corps, il ne reste qu'à vérifier le distributivité de la loi « étoile » sur la loi « té ». Pour cela, considérons trois réels *x, y, z*

D'une part : $x * (y \top z) = x * \left(y + z - \frac{1}{3}\right) = x + \left(y + z - \frac{1}{3}\right) - 3x\left(y + z - \frac{1}{3}\right)$

Soit : $x * (y \top z) = -3xy - 3xz + 2x + y + z - \frac{1}{3}$

D'autre part :

$$(x * y) \top (x \star z) = (x + y - 3xy) + (x + z - 3xz) - \frac{1}{3} = -3xy - 3xz + 2x + y + z - \frac{1}{3}$$

Nous obtenons deux expressions développées identiques. Par conséquent, pour tout triplet de réels :

$$x * (y \top z) = (x * y) \top (x \star z)$$

La loi « étoile » est distributive sur la loi « té ».

Ce qui achève de démontrer que $(\mathbb{R},\ \top,\ *)$ est un corps.

Un exercice du bac marocain 2014

Sujet

11 **Une loi relativement « classique » définie sur un intervalle borné. Nous avons modifié l'énoncé de la partie II.**

On pose $\mathbf{J} =]-1, 1[$

<u>**Partie I :**</u> Soient $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ deux éléments de l'intervalle $\mathbf{J}$, on pose : $\mathbf{a} * \mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{1+\mathbf{ab}}$

1 - Vérifier que $\left(\forall (\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathbf{J}^2\right); \mathbf{1} + \mathbf{ab} > \mathbf{0}$, puis en déduire que $*$ est une loi de composition interne dans $\mathbf{J}$.

2 - a) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative dans $\mathbf{J}$.

b) Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre dans $\mathbf{J}$ qu'on déterminera.

c) Montrer que $(\mathbf{J}, *)$ est un groupe commutatif.

<u>**Partie II :**</u> On considère l'application $\mathbf{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{e^{\mathbf{x}}-1}{e^{\mathbf{x}}+1}$

1 - Montrer que la fonction $\mathbf{f}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbf{J}$.

2. Démontrer que f est un isomorphisme du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(J, *)$.

12

Eléments de correction

Partie I

1. Notons que, en raison du fait que l'intervalle *J* est centré en zéro, pour tout réel *x* nous disposons de l'équivalence suivante : $x \in J \iff -1 < x < 1 \iff |x| < 1$.

Considérons deux réels *a* et *b* appartenant à *J*.

$$(a\,;b) \in J \times J \implies \begin{cases}|a| < 1\\ |b| < 1\end{cases} \implies |ab| = |a| \times |b| < 1 \implies -1 < ab < 1 \implies 0 < 1 + ab < 2.$$

Le fait que lorsque $(a\,;b) \in J \times J$, le nombre $1 + ab$ est strictement positif (donc *a fortiori* non nul) justifie l'existence du réel $\frac{a+b}{1+ab}$

Il reste à vérifier si ce réel appartient à l'intervalle *J*.

Or : $\frac{a+b}{1+ab} - 1 = -\frac{(1-a)(1-b)}{1+ab}$ et : $\frac{a+b}{1+ab} + 1 = \frac{(1+a)(1+b)}{1+ab}$

Lorsque *a* et *b* sont deux éléments de *I*, les cinq nombres $1 - a\,; 1 - b\,; 1 + a\,; 1 + b\,; 1 + ab$ sont tous des nombres strictement positifs, donc $-\frac{(1-a)(1-b)}{1+ab}$ est strictement négatif tandis que $\frac{(1+a)(1+b)}{1+ab}$ est strictement positif.

Nous obtenons donc les inégalités : $\frac{a+b}{1+ab} - 1 < 0$ et $\frac{a+b}{1+ab} + 1 > 0$ soit $-1 < \frac{a+b}{1+ab} < 1$ quels que soient *a* et *b* appartenant à *J*. Ce qui montre l'appartenance à *J* du nombre $\frac{a+b}{1+ab}$.

$$(a\,;b) \in J \times J \implies a * b \in J$$

La loi « étoile » est une loi de composition interne sur *J*.

2.a. La commutativité de la loi « étoile » est une conséquence directe de la commutativité de l'addition et de la multiplication usuelles. Etudions l'associativité en considérant trois éléments quelconques *a, b, c* de l'intervalle *J* :

$$(a * b) * c = \frac{(a * b) + c}{1 + (a * b).c} = \frac{\frac{a+b}{1+ab} + c}{1 + \frac{a+b}{1+ab}.c} = \frac{abc + a + b + c}{1 + ab + bc + ca}$$

$$a * (b * c) = \frac{a + (b * c)}{1 + a.(b * c)} = \frac{a + \frac{b + c}{1 + bc}}{1 + a.\frac{b + c}{1 + bc}} = \frac{abc + a + b + c}{1 + ab + bc + ca}$$

Les deux résultats sont identiques ce qui prouve l'égalité $(a * b) * c = a * (b * c)$ quels que soient les éléments quelconques *a, b, c* de l'intervalle *J*.

La loi « étoile » est associative.

2.b. Cherchons s'il existe un élément neutre *e*, c'est-à-dire un élément de $]a\,;\ +\infty[$ vérifiant : $e * a = a$ pour tout *a* de *J*. Etudions la différence $e * a - a$:

Pour tout *a* de *J* :

$$e * a - a = \frac{e + a}{1 + e.a} - a = \frac{(1 - a^2)e}{1 + ae}$$

.

De ce fait, la différence $e * a - a$ est nulle pour tout *a* si et seulement si $e = 0$et ce nombre réel est bien dans l'intervalle *J*.

La loi « étoile » possède dans *J* un élément neutre, l'élément $e = 0$.

2.c. La loi « étoile » est une loi de composition interne sur l'intervalle *J* qui est associative et qui possède un élément neutre sur cet intervalle. Pour que *J* soit un groupe muni de la loi « étoile », il reste à voir si tout élément de *j* admet un élément inverse.

Soit *a* un élément quelconque de *J*.

Cherchons s'il existe un élément *x* de *J* tel que , $x * a = e = 0$, c'est-à-dire tel que $\frac{x+a}{1+x.a} = 0$

Pour cela, il faut nécessairement que $x = -a$. Chaque élément *a* de *J* a pour inverse pour la loi « étoile » (son opposé $-a$ au sens usuel du terme est aussi son inverse pour la loi « étoile »).

Il s'agit bien d'un nombre réel appartenant à *J* puisque *J* est centré en zéro.

Tout élément de l'intervalle *J* admet un inverse pour la loi « étoile ».

L'intervalle *J*, muni de la loi « étoile » est un groupe abélien.

Partie II

1. Faisons une étude sommaire des variations de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x \in \mathbb{R} \longmapsto f(x) = \frac{\exp(x) - 1}{\exp(x) + 1}$$

Il s'agit de la composée de :

- La fonction exponentielle, définie, strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, qui réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son intervalle image $]0\ ;\ +\infty[$
- Puis la fonction $X \longmapsto u(X) = \frac{X-1}{X+1} = 1 - \frac{2}{X+1}$, définie sur $]0\ ;\ +\infty[$, strictement croissante et continue sur cet intervalle, qui réalise une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ sur son intervalle image $]-1\ ;\ 1[= J$

La composée *f* de ces deux fonctions est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle *J*.

2. Soit *x* et *y* deux nombres réels. Comparons la composée par la loi « étoile » des images par *f* de ces deux nombres avec l'image par *f* de leur somme. D'une part :

$$f(x+y) = \frac{\exp(x+y) - 1}{\exp(x+y) + 1} = \frac{\exp(x)\,.\exp(y) - 1}{\exp(x)\,.\exp(y) + 1}$$

D'autre part :

$$f(x) * f(y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x).f(y)} = \frac{\frac{\exp(x) - 1}{\exp(x) + 1} + \frac{\exp(y) - 1}{\exp(y) + 1}}{1 + \frac{\exp(x) - 1}{\exp(x) + 1} \cdot \frac{\exp(y) - 1}{\exp(y) + 1}}$$

$$f(x) * f(y) = \frac{(\exp(x) - 1)(\exp(y) + 1) + (\exp(x) - 1)(\exp(y) + 1)}{\big((\exp(x) + 1)(\exp(y) + 1)\big) + (\exp(x) - 1)(\exp(y) - 1)}$$

$$f(x) * f(y) = \frac{2(\exp(x)\,.\exp(y)) - 2}{2(\exp(x)\,.\exp(y)) + 2} = \frac{\exp(x)\,.\exp(y) - 1}{\exp(x)\,.\exp(y) + 1}$$

Nous obtenons deux expressions identiques, ce qui démontre que :

$f(x+y) = f(x) * f(y)$ quels que soient les réels *x* et *y*. L'application *f* est un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe $(J, *)$. Etant une bijection, *f* est un isomorphisme de groupes.

La fonction *f* est la fonction « tangente hyperbolique ».

Un exercice du bac marocain 2017

Sujet

Une loi non commutative.

On note par $M_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre deux.

On rappelle que $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau non commutatif unitaire d'unité $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe commutatif.

On considère le sous-ensemble E de $M_2(\mathbb{R})$ défini par : $E=\left\{\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R} \text{ et } y\in\mathbb{R}^*\right\}$.

1 - **a)** Montrer que E est une partie stable de $(M_2(\mathbb{R}),\times)$.

b) Montrer que la multiplication n'est pas commutative dans E.

c) Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall y\in\mathbb{R}^*)$; $\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-\frac{x}{y}\\0&\frac{1}{y}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&x\\0&y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

2 - Montrer que $(E,\times)$ est un groupe non commutatif.

3 - On considère le sous-ensemble F de E défini par : $F=\left\{M(x)=\begin{pmatrix}x&x-1\\0&x\end{pmatrix}/x\in\mathbb{R}^*\right\}$

a) Montrer que l'application φ définie par : $(\forall x\in\mathbb{R}^*)$; $\varphi(x)=M(x)$ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E,\times)$.

b) En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif dont on précisera l'élément neutre.

Attention, dans la question 3 il faut lire : $M(x)=\begin{pmatrix}1&x-1\\0&x\end{pmatrix}$

Eléments de correction

Partie I

16

1.a. Pour *x* réel quelconque et *y* réel non nul, posons : $A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$

Soit *x* et *x'* deux réels quelconques, ainsi que *y* et *y'* deux réels non nuls. Nous obtenons le produit matriciel suivant :

$$A(x,y) \times A(x',y') = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x' + x.y' \\ 0 & y.y' \end{pmatrix}$$

Nous obtenons la relation : $A(x,y) \times A(x',y') = A(x' + x.y'\ ,\ y.y')$ où le nombre $x' + x.y'$ est un réel et le nombre $y.y'$ est un réel non nul puisque produit de deux réels non nuls.

Le produit de deux matrices de *E* est une matrice de *E* : L »'ensemble *E* est stable pour la multiplication des matrices.

1.b. Considérons par exemple les matrices $A(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Nous constatons que :

$A(1,1) \times A(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A(3,2)$ tandis que $A(1,2) \times A(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = A(2,2)$.

Ce contre-exemple, où l'on constate que $A(1,1) \times A(1,2) \neq A(1,2) \times A(1,1)$ suffit à démontrer que la multiplication dans *E* n'est pas une loi commutative.

1.c. Observons déjà que *E* contient la matrice-unité qui est la matrice $A(0,1)$.

Soit $A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ une matrice de *E*. Cherchons s'il existe une matrice $A(x',y')$ de *E* telle que :

$$A(x,y) \times A(x',y') = \begin{pmatrix} 1 & x' + x.y' \\ 0 & y.y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette égalité matricielle a lieu si et seulement si : $\begin{cases} x' + x.y' = 0 \\ y.y' = 1 \end{cases}$.

17

Ce système conduit à : $\begin{cases} x' = -x.y' = -\frac{x}{y} \\ y' = \frac{1}{y} \end{cases}$. (Rappelons que *y* est un réel non nul). Il existe donc toujours un couple (x', y') solution.

Toute matrice $A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & y \end{pmatrix}$ de *E* admet pour inverse la matrice $A\left(-\frac{x}{y}, \frac{1}{y}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{x}{y} \\ 0 & \frac{1}{y} \end{pmatrix}$

2. Pour démontrer que *E* est un groupe, il reste à vérifier la propriété d'associativité de la multiplication dans *E*. Cette propriété est conséquence directe de l'associativité de la multiplication usuelle des matrices 2x2, sa vérification effective (que nous donnons ci-dessous) est facultative.

$$\begin{aligned} \big(A(x_1,y_1) \times A(x_2,y_2)\big) \times A(x_3,y_3) &= A(x_2 + x_1.y_2, y_1y_2) \times A(x_3,y_3) \\ &= A(x_1y_2y_3 + x_2y_3 + x_3, y_1y_2y_3) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} A(x_1,y_1) \times \big(A(x_2,y_2) \times A(x_3,y_3)\big) &= A(x_1,y_1) \times A(x_3 + x_2.y_3, y_2y_3) \\ &= A(x_1y_2y_3 + x_2y_3 + x_3, y_1y_2y_3) \end{aligned}$$

Nous obtenons bien le même résultat.

L'ensemble *E* muni de la multiplication des matrices est un groupe non commutatif.

3.a. La matrice $M(x)$ est la matrice $A(x-1, x)$ avec les notations que nous avons utilisées.

Soit *x* et *y* deux réels non nuls. Alors :

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & y-1 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & xy-1 \\ 0 & xy \end{pmatrix} = M(xy)$$

Ce qui montre que : $\varphi(x) \times \varphi(y) = \varphi(x.y)$: l'application phi est un homomorphisme du groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$ vers le groupe $(E, \times)$.

3.b. En tant qu'image d'un groupe commutatif par un homomorphisme, l'ensemble *F* est lui-même un groupe commutatif.

De plus, de façon triviale : $\varphi(x) = \varphi(y) \implies x = y$, l'application phi est injective. Son image dans *E* est donc isomorphe au groupe de départ.

18 L'ensemble *F* est un sous-groupe de *E* et un groupe isomorphe au groupe multiplicatif $\mathbb{R}^*$.

Nous avons ici avec *F* l'exemple d'un sous-groupe commutatif d'un groupe qui ne l'est pas.