

Bac Maroc rattrapage 2025.

Exercice 2 : Complexes

Où comment une situation peut être « complexifiée » au sens propre du terme ... Quelque peu artificiellement, il faut reconnaître. Sujet en fin de document.

Partie I :

On désigne par α un nombre réel de l'intervalle $[0 ; 2\pi[$ et on considère l'équation E_α du second degré :

$$z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha}(1 + 2i)z + i \cdot 2^{2\alpha+1} e^{i.2\alpha} = 0$$

1.a. Le discriminant de cette équation est le nombre :

$$\Delta_\alpha = \left(2^\alpha e^{i\alpha}(1 + 2i)\right)^2 - 4i \cdot 2^{2\alpha+1} e^{i.2\alpha} = 2^{2\alpha} e^{i.2\alpha} (-3 + 4i) - 4i \cdot 2^{2\alpha+1} e^{i.2\alpha}$$

C'est-à-dire que :

$$\Delta_\alpha = 2^{2\alpha} e^{i.2\alpha} [(-3 + 4i) - 8i]$$

Remarquons que : $(-3 + 4i) - 8i = -3 - 4i = (1 - 2i)^2$ ce qui nous donne :

$$\Delta_\alpha = 2^{2\alpha} e^{i.2\alpha} (1 - 2i)^2 = \left(2^\alpha e^{i.\alpha} \cdot (1 - 2i)\right)^2$$

1.b. En conséquence, les deux solutions de l'équation sont :

$$\frac{2^\alpha e^{i\alpha}(1 + 2i) + 2^\alpha e^{i\alpha} \cdot (1 - 2i)}{2} ; \frac{2^\alpha e^{i\alpha}(1 + 2i) - 2^\alpha e^{i\alpha} \cdot (1 - 2i)}{2}$$

C'est-à-dire, par ordre de module croissant :

$$a = 2^\alpha e^{i\alpha} ; b = 2^\alpha e^{i\alpha} \times (2i)$$

2. Du coup : $\frac{b}{a} = 2i$. Et le nombre réel intervenant dans la partie II est : $\lambda = 2$.

Partie II :

1. Retenons de la **partie I** la relation $b = a \times 2i$.

Le nombre complexe h étant défini par la relation $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, nous en déduisons que : $h = \frac{a \cdot b}{a+b}$ ce qui peut également s'écrire : $h = a \times \frac{2ia}{a+2ia} = a \times \frac{2i}{1+2i} = a \times \left(\frac{2}{5}(2+i)\right)$

Nous pouvons remarquer que les propriétés de la configuration étudiée ne dépendent pas des valeurs de a , b et h mais de leurs valeurs *relatives*.

Les affixes des points A , B , H de la configuration générale se déduisent des affixes des points homologues de la configuration particulière obtenue lorsque $\alpha = 0$ en multipliant par a ces affixes. De ce fait, la configuration générale est l'image de la configuration particulière par la similitude directe de centre O , d'angle α et de rapport 2^α . (On sait qu'une telle similitude directe conserve l'alignement, l'orthogonalité et le rapport des distances).

À partir de maintenant, nous pouvons traiter la suite de l'exercice avec :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 2i \\ h = \frac{4}{5} + \frac{2}{5}i \end{cases}$$

Les points correspondants de la configuration particulière sont $A(1; 0)$; $B(0; 2)$; $H\left(\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$.

1.a. $\frac{h}{b-a} = \frac{\frac{2}{5}(2+i)}{2i-1} = -\frac{2}{5}i$.

Ce qui correspond bien à l'indication de l'énoncé.

Il s'agit donc d'un nombre imaginaire pur dont la partie imaginaire est négative. $-\frac{\pi}{2}$ est ainsi un argument de $\frac{h}{b-a}$. Le complexe h est l'afixe du vecteur $\overrightarrow{OH}$ et le complexe $b-a$ est l'afixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Un argument de $\frac{h}{b-a}$ est de ce fait une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OH})$. Cet angle ayant pour mesure $-\frac{\pi}{2}$, il s'agit d'un angle droit (indirect) :

Les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.

1.b. De façon analogue : $\frac{h-a}{b-a} = \frac{\frac{2}{5}(2+i)-1}{2i-1} = \frac{1}{5}$.

Il s'agit d'un réel strictement positif, donc un complexe d'argument nul.

Le complexe $h - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AH}$. Un argument de $\frac{h-a}{b-a}$ est de ce fait une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH})$. Cet angle ayant une mesure nulle, les points A, B, H sont alignés, les points B et H étant, sur la droite d'alignement, d'un même côté du point A .

2.a. Par définition des points I et J : $m = \frac{h}{2} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}i$ et $n = \frac{h+b}{2} = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$.

I est le point de coordonnées $(\frac{2}{5} ; \frac{1}{5})$ et J est le point de coordonnées $(\frac{2}{5} ; \frac{6}{5})$.

Le complexe n est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OJ}$ et le complexe $m - a$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AI}$.

Nous obtenons : $\frac{n}{m-a} = \frac{\frac{2}{5} + \frac{6}{5}i}{\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i} = -2i$.

Ce résultat est le nombre complexe de module 2 et d'argument $-\frac{\pi}{2}$.

2.b. De ce fait, par interprétation géométrique du module et de l'argument d'un quotient :

$$\frac{n}{m-a} = -2i \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{OJ}{AI} = |-2i| = 2 \\ (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{OJ}) = \arg(-2i) = -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases}$$

Nous en déduisons que les droites (AI) et (OJ) sont perpendiculaires puisque l'angle $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{OJ})$ est un angle droit et que $OJ = 2 \cdot AI$.

2.c. Nous allons montrer que les quatre points en jeu sont tous sur le cercle de diamètre $[IJ]$.

Puisque les droites (AI) et (OJ) sont perpendiculaires, leur point d'intersection K est tel que l'angle géométrique $\widehat{IKJ}$ est un angle droit. Le point K est donc un point du cercle de diamètre $[IJ]$.

D'autre part, un argument du nombre $\frac{h-n}{h-m} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i}{\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i} = -2i$, est $-\frac{\pi}{2}$, et c'est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{JH})$. Cet angle ayant pour mesure $-\frac{\pi}{2}$, il s'agit d'un angle droit (indirect) : les droites (IH) et (JH) sont perpendiculaires et l'angle géométrique $\widehat{IHJ}$ est aussi un angle droit. Le point H est donc lui aussi un point du cercle de diamètre $[IJ]$.

Les points I, J, H, K sont sur le cercle de diamètre $[IJ]$.

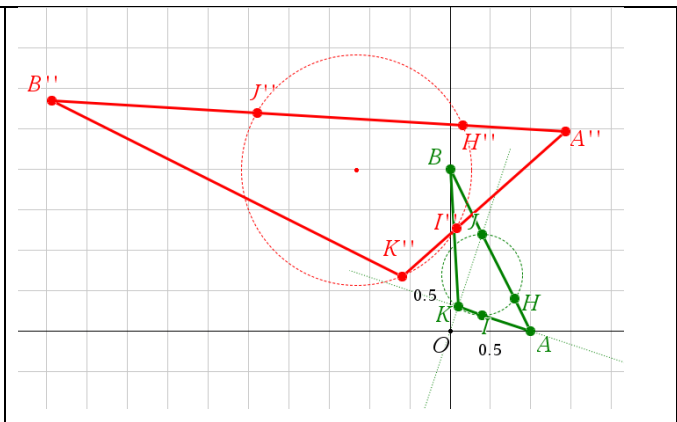
2.d. Pour montrer que les droites (IJ) et (OA) sont perpendiculaires, étudions le complexe $\frac{n-m}{a}$ dont un calcul simple laissé au lecteur montre qu'il est égal à i .

$$\frac{n-m}{a} = i \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{IJ}{OA} = 1 \\ (\widehat{OA, IJ}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \end{cases}$$

L'angle $(\widehat{OA, IJ})$ étant un angle droit, les droites (OA) et (IJ) sont perpendiculaires.

Et, accessoirement, nous avons démontré que $OA = IJ$.

Ci-contre, en vert, la configuration particulière correspondant au cas où $\alpha = 0$ et en rouge, à titre d'exemple, la configuration correspondant au cas $\alpha = \frac{\pi}{3}$ que l'on obtient à partir de la configuration verte par similitude directe de centre O , d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de rapport $\exp(\frac{\pi}{3})$.



EXERCICE2 : (3.5 points)

Soit $\alpha \in [0; 2\pi[$

On considère dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) d'inconnue z :

$$(E_\alpha) : z^2 - 2^\alpha e^{i\alpha} (1 + 2i)z + i 2^{2\alpha+1} e^{i2\alpha} = 0$$

Partie I :

- 0.25 1- a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est : $\Delta_\alpha = (2^\alpha e^{i\alpha} (1 - 2i))^2$
- 0.5 b) En déduire les deux solutions a et b de l'équation (E_α) avec $|a| < |b|$
- 0.25 2- Vérifier que $\frac{b}{a}$ est un imaginaire pur.

Partie II :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On note par $M(z)$ le point d'affixe le nombre complexe z

On pose $\frac{b}{a} = \lambda i$ avec $\lambda = \text{Im}\left(\frac{b}{a}\right)$

- 1- On considère les points $A(a)$, $B(b)$ et $H(h)$ avec $\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$
- 0.5 a) Montrer que : $\frac{h}{b-a} = -\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+1}\right)i$ puis en déduire que les droites (OH) et (AB) sont perpendiculaires.
- 0.5 b) Montrer que : $\frac{h-a}{b-a} = \frac{1}{\lambda^2+1}$ puis en déduire que les points H, A et B sont alignés.
- 2- Soient $I(m)$ le milieu du segment $[OH]$ et $J(n)$ le milieu du segment $[HB]$
- 0.5 a) Montrer que : $\frac{n}{m-a} = -\lambda i$
- 0.5 b) En déduire que les droites (OJ) et (AI) sont perpendiculaires et que $OJ = |\lambda| AI$
- 0.25 c) Soit K le point d'intersection des droites (OJ) et (AI)
Montrer que les points K, I, H et J sont cocycliques.
- 0.25 d) Montrer que les droites (IJ) et (OA) sont perpendiculaires.