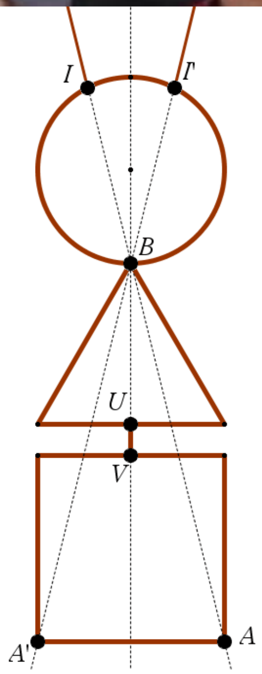
Le justaucorps géométrique

Enoncé

Cet exercice est composé de deux questions. La première est du niveau 3ème. La seconde est plus délicate, bien que les notions en jeu soient aussi du niveau collège ; il est conseillé de s'aider d'un logiciel de calcul formel pour mener à terme le calcul qui y est demandé.

La partie dorsale d'un modèle de justaucorps de patinage artistique est constituée du motif suivant : Un triangle équilatéral de côté a surmonté d'un cercle de diamètre a et surmontant un carré de côté a.
On donne $a = 12$ (en centimètres).



Voici une schématisation de ce motif. Le sommet B du triangle est situé sur le cercle et triangle et carré sont reliés perpendiculairement par un cordon $[UV]$ de longueur :
$UV = 3$ (en centimètres) et de même nature que le motif.

1. Un cordon de 1,25 mètre de long est-il suffisant pour fabriquer le motif ? Justifier.

2. Le motif est relié au justaucorps par deux bretelles attachées au cercle en deux points I et I' de sorte que les points A, B, I d'une part, ainsi que A', B, I' d'autre part, sont alignés. Calculer la distance II'. On en donnera une valeur approchée au millimètre près

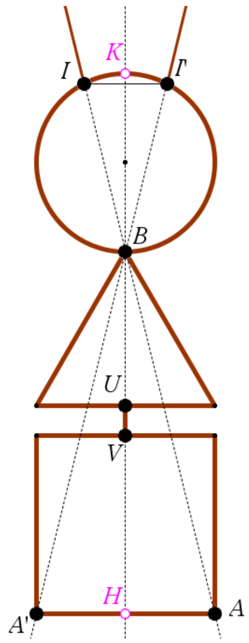
Correction

1. Le motif est constitué de sept segments isométriques (carré et triangle équilatéral de même côté), de longueur 12 cm, d'un segment [*UV*] de longueur 3 cm et de la circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à 6.

La longueur nécessaire de cordon est : $7 \times 12 + 3 + 12\pi = 87 + 12\pi = 124{,}7$ cm (au millimètre près).

Donc, un cordon de 125 cm est en théorie suffisant pour construire le motif

(mais il ne faut pas se louper …)



2. Calculons la distance *AB*, sachant que [*AB*] est l'hypoténuse d'un triangle *BHA* rectangle en *H* (voir figure ci-contre).
Nous avons : $HB = HV + VU + UB = 12 + 3 + 6\sqrt{3} = 15 + 6\sqrt{3}$.
Et aussi $HA = 6$

Ainsi : $AB = \sqrt{\left(15 + 6\sqrt{3}\right)^2 + 36} = 3.\sqrt{41 + 20\sqrt{3}}$

Nous obtenons $AB = 26{,}1$ cm au millimètre près.

Les triangles rectangles *BIK* (voir figure, ce triangle est rectangle en *I* car inscrit dans le cercle de diamètre [*BK*]) et *BHA* sont semblables car leurs angles de sommet *B* sont égaux. Le rapport de similitude est celui de leurs hypoténuses c'est-à-dire $\frac{KB}{AB}$.

Calculons-le : $\frac{KB}{AB} = \frac{12}{3.\sqrt{41+20\sqrt{3}}} = \frac{4}{\sqrt{41+20\sqrt{3}}}$

Nous en déduisons : $\frac{BI}{BH} = \frac{4}{\sqrt{41+20\sqrt{3}}}$ et donc $BI = \frac{4(15+6\sqrt{3})}{\sqrt{41+20\sqrt{3}}}$

Nous obtenons $BI = 11{,}7$ cm au millimètre près.

Pour des raisons de symétrie que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter, les triangles *BAA'* et *BII'* sont des triangles isocèles. Ils sont semblables car leurs angles de sommet *B* sont égaux, et le rapport de similitude est égal à $\frac{BI}{AB}$.

Nous en déduisons : $\frac{II'}{AA'} = \frac{BI}{AB}$

Le calcul explicité ci-dessous montre que :

$$II' = \frac{48.\left(85 - 18\sqrt{3}\right)}{481}$$

Comme nous le constatons, cette valeur exacte peu significative n'a qu'un intérêt anecdotique.

Calculs explicités ci-contre.

3 **Une valeur approchée à un millimètre près de la distance *II'* est 5,4 cm.**

$(15+6\cdot\sqrt{3})^2+36$	$180\cdot\sqrt{3}+369$
Define $ba=\sqrt{180\cdot\sqrt{3}+36}$	*Terminé*
ba	$6\cdot\sqrt{5\cdot\sqrt{3}+1}$
ba	18.6486
Define $ba=\sqrt{180\cdot\sqrt{3}+369}$	*Terminé*
ba	$3\cdot\sqrt{20\cdot\sqrt{3}+41}$
ba	26.0916
Define $r=\frac{12}{ba}$	*Terminé*
Define $bi=r\cdot(15+6\cdot\sqrt{3})$	*Terminé*
bi	$\frac{12\cdot(2\cdot\sqrt{3}+5)\cdot\sqrt{-481\cdot(20\cdot\sqrt{3}-41)}}{481}$
bi	11.6784
Define $ii=\frac{12\cdot bi}{ba}$	*Terminé*
ii	5.37112
ii	$\frac{-48\cdot(18\cdot\sqrt{3}-85)}{481}$

Figure avec quelques mesures de longueur utiles.