Bac Métropole Septembre 2025.

Ce document n'est pas un corrigé. Il propose, au fil des questions, quelques réflexions sur le sujet de bac du mois de septembre.

Exercice 1 : Equations différentielles

Partie A :

1. La fonction *u* est bien une solution particulière de l'équation (E).

Define $u(t)=t\cdot e^{-0.4\cdot t}$	*Terminé*
$\frac{d}{dt}(u(t))$	$\left(1-\frac{2\cdot t}{5}\right)\cdot e^{\frac{-2\cdot t}{5}}$
Define $u(t)=t\cdot e^{-0.4\cdot t}$	*Terminé*
$\frac{d}{dt}(u(t))$	$\left(1-\frac{2\cdot t}{5}\right)\cdot e^{\frac{-2\cdot t}{5}}$
$\frac{d}{dt}(u(t))+0.4\cdot u(t)$	$e^{\frac{-2\cdot t}{5}}$

2.a. Compte tenu de la propriété d'additivité des dérivées, si *g* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $g(t) = f(t) - u(t)$, alors sa fonction dérivée est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $g'(t) = (f-u)'(t) = f'(t) - u'(t)$.

La fonction *g* est solution de l'équation différentielle (H) si et seulement si, pour tout réel *t* :

$$g'(t) + 0{,}4.\, g(t) = 0$$

C'est-à-dire si et seulement si :

$$(f-u)'(t) + 0{,}4.\, (f-u)(t) = 0$$

Soit si et seulement si :

$$f'(t) - u'(t) + 0{,}4.\, f(t) - 0{,}4.\, u(t) = 0$$

Relation qui, pour tout réel t, est équivalente à :

$$\left(f'(t) + 0{,}4.f(t)\right) - \left(u'(t) + 0{,}4.u(t)\right) = \left(f'(t) + 0{,}4.f(t)\right) - \exp(-0{,}4t) = 0$$

Ainsi, la fonction f est une solution de l'équation (E) si et seulement si la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $g(t) = f(t) - u(t)$ est solution de l'équation homogène (H).

2.b. D'après le cours, l'équation (H) a pour solution toutes les fonctions de la forme :

$$g(t) = k.\exp(-0{,}4t)$$

Où k est une constante réelle.

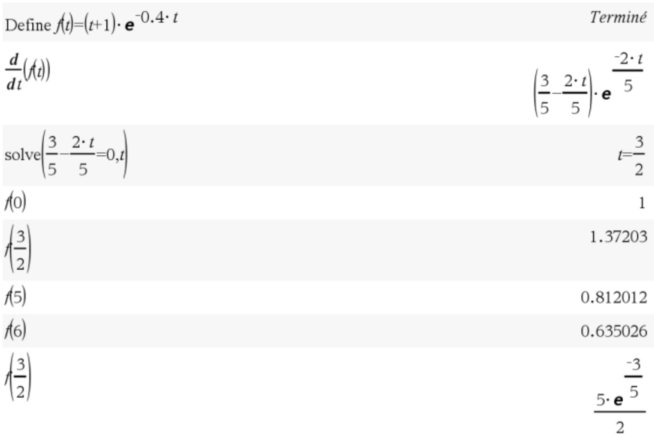
2.c. En vertu de l'équivalence démontrée en **2.a**, une fonction f est solution de l'équation (E) si et seulement si elle est somme de la fonction u et d'une solution de l'équation homogène associée (H), donc si et seulement si f est une fonction de la forme : $f(t) = (t + k)\exp(-0{,}4t)$ où k est une constante réelle.

2.d. Soit f une fonction solution de (E), c'est-à-dire de la forme indiquée ci-dessus. Sa valeur en zéro est le nombre : $f(0) = k$. Il existe de ce fait une et une seule solution de l'équation (E) telle que : $f(0) = 1$. D'après le théorème de Polichinelle, c'est la fonction étudiée dans la partie B définie par : :

$$f(t) = (t + 1)\exp(-0{,}4t)$$

Partie B : Glycémie

1. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{3}{2}\right]$ puis strictement décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$. Elle admet un maximum en $\frac{3}{2}$ qui vaut $\frac{5}{2}\exp\left(-0{,}6\right)$, soit, d'après une calculatrice, 1,37 à 0,01 près.
D'après les variations comparées de l'exponentielle et d'un polynôme, f admet pour limite zéro en plus l'infini.



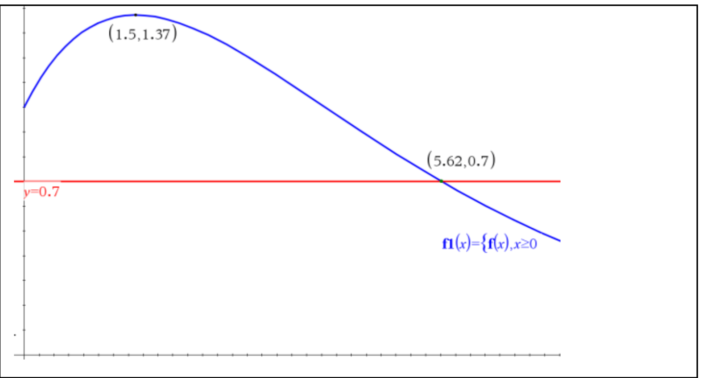
Define $f(t)=(t+1)\cdot e^{-0.4\cdot t}$	*Terminé*
$\frac{d}{dt}(f(t))$	$\left(\frac{3}{5}-\frac{2\cdot t}{5}\right)\cdot e^{\frac{-2\cdot t}{5}}$
solve$\left(\frac{3}{5}-\frac{2\cdot t}{5}=0,t\right)$	$t=\frac{3}{2}$
$f(0)$	1
$f\left(\frac{3}{2}\right)$	1.37203
$f(5)$	0.812012
$f(6)$	0.635026
$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{5\cdot e^{\frac{-3}{5}}}{2}$

2.a. La fonction f est une fonction continue sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. Sa restriction à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image $\left[1\,;\,\frac{5}{2}\exp\left(-0{,}6\right)\right]$. La valeur 0,7 n'appartient pas à cet intervalle image, l'équation $f(t)=0{,}7$ n'admet pas de solution appartenant à l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{3}{2}\right]$.

En revanche, la restriction de f à l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$ est continue et strictement décroissante sur cet intervalle. Elle réalise une bijection de cet intervalle sur l'intervalle image $\left]0\,;\,\frac{5}{2}\exp\left(-0{,}6\right)\right]$.

Or, le nombre 0,7 appartient à cet intervalle image.

L'équation $f(t)=0{,}7$ une solution et une seule appartenant à l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$. Le calcul des images de 5 et de 6 (voir copie d'écran) montre que $f(6)<0{,}7<f(5)$, ce qui permet de localiser cette solution alpha entre 5 et 6.

Une étude graphique amène à 5,62 comme valeur approchée de alpha	
Une étude numérique montre que $f(5{,}62) < 0{,}7 < f(5{,}61)$ ce qui montre que $5{,}61 < \alpha < 5{,}62$	

La copie d'écran montre qu'une valeur approchée à la minute près de l'instant de passage en hypoglycémie est 5 heures et 37 minutes.

3. a et b. Résultats de l'intégration puis calcul de la glycémie moyenne.	$\int f(t)\,dt$: $\left(\frac{-5\cdot t}{2}-\frac{35}{4}\right)\cdot e^{\frac{-2\cdot t}{5}}$ $\int_0^6 f(t)\,dt$: $\frac{35}{4}-\frac{95\cdot e^{\frac{-12}{5}}}{4}$ $\frac{1}{6}\cdot\int_0^6 f(t)\,dt$: 1.09924

3.c. La question aurait pu être mieux posée. C'est une primitive de la fonction *f* que nous aurions pu « obtenir autrement ». Une fois « obtenue autrement » une primitive, le reste ne change pas.

La fonction *f* vérifie la relation : $f'(t) + 0{,}4.f(t) = \exp\,(-0{,}4t)$, relation qui est équivalente à la relation : $f(t) = \frac{1}{0{,}4}(\exp(-0{,}4t) - f'(t)) = \frac{5}{2}(\exp(-0{,}4t) - f'(t))$.

Sachant qu'une primitive de $\exp(-0{,}4t)$ est la fonction $\frac{1}{-0{,}4}\exp(-0{,}4t) = -\frac{5}{2}\exp(-0{,}4t)$, nous pouvons construire une primitive de *f*, à savoir la fonction :

$$t \longmapsto F(t) = -\frac{25}{4}\exp(-0{,}4t) - \frac{5}{2}f(t) = -\frac{25}{4}\exp(-0{,}4t) - \frac{5}{2}(t+1)\exp(-0{,}4t)$$

Nous obtenons ainsi, sans aucune intégration par parties, la primitive :

$$F(t) = -\frac{35}{4}\exp(-0{,}4t) - \frac{5}{2}t.\exp(-0{,}4t)$$

Exercice 2 : Géométrie de l'espace

Partie A.

1. La relation $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$ signifie que *M* et *A* sont symétriques par rapport à *B*. Les trois points, *A, B, M* sont alignés sur la droite (*AB*).

Les deux points *F* et *M* appartiennent au plan (*ABF*), la droite (*FM*) est incluse dans ce plan. La droite (*FG*) est perpendiculaire au plan (*ABF*), elle est donc orthogonale à toutes les droites de ce plan, en particulier à la droite (*FM*). De plus, les droites (*FG*) et (*FM*) sont sécantes en *F*. Elles sont donc perpendiculaires.

(*FG*) et (*FM*) sont deux droites perpendiculaires.

2. Montrons que les quatre points *A, M, G et H* appartiennent tous au plan (*ABG*).

- C'est, sans démonstration, le cas des points *A* et *G*.
- C'est aussi le cas du point *M*, situé sur la droite (*AB*) incluse dans ce plan.
- La droite (*GH*) passe par *G* qui appartient au plan (ABG) et est parallèle à une droite incluse dans ce plan, la droite (*AB*). Elle est donc incluse dans ce plan : le point *H* situé sur cette droite appartient à (*ABG*).

Les quatre points *A, M, G, H* sont coplanaires, ils appartiennent tous au plan (*ABG*).

Partie B.

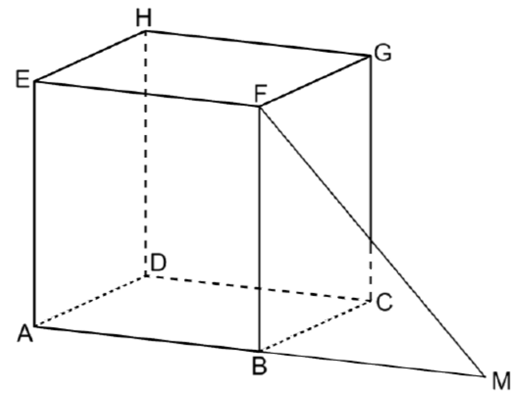
1. Précisons les coordonnées des points utiles :

$$M\ (2,0,0); H(0,1,1); G\ (1,1,1)$$

Déduisons-en les coordonnées des vecteurs en jeu :

$$\overrightarrow{GM} : \begin{cases} x_M - x_G = 1 \\ y_M - y_G = -1 \\ z_M - z_G = -1 \end{cases}$$

$\overrightarrow{AH}$ a les mêmes coordonnées que *H* puisque *A* est l'origine du repère : $\overrightarrow{AH}\ (0,1,1)$.



Montrons que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

Considérons une combinaison linéaire de ces deux vecteurs $x.\overrightarrow{GM} + y\overrightarrow{AH}$ égale au vecteur nul. Les coordonnées de cette combinaison sont toutes nulles, condition qui équivaut au système:

$\begin{cases} x = 0 \\ -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$, dont la résolution amène à l'unique possibilité $x = y = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{GM}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont non colinéaires.

2.a. Un point *U* de l'espace, de coordonnées (x, y, z) appartient à la droite (*GM*) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{GU}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{GM}$, c'est-à-dire si et seulement s'il existe un réel *t* tel que $\overrightarrow{GU} = t.\overrightarrow{GM}$, relation vectorielle qui se traduit, au niveau des coordonnées par les relations :

$\begin{cases} x - 1 = t \\ y - 1 = -t \\ z - 1 = -t \end{cases}$. Ainsi :

$$N \in (GM) \iff (\exists\ t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

2.b. De même, un point *U* appartient à (*AH*) si et seulement s'il existe un réel *k* tel que $\overrightarrow{AU} = k.\overrightarrow{AH}$, ce qui se traduit au niveau des coordonnées par les équations paramétriques « admises ».

Vu que l'énoncé nous fournit la réponse, il suffit de vérifier qu'il existe une valeur de *t* et une valeur de *k* correspondant aux coordonnées du point donné par l'énoncé *N*, ce qui est trivial.

Si l'énoncé ne nous avait pas fourni la réponse, nous aurions cherché s'il existait deux réels *t* et *k* solutions du système : $\begin{cases} 1+t=0 \\ 1-t=k \\ 1-t=k \end{cases}$**, ce qui aurait conduit à :** $\begin{cases} t=-1 \\ k=2 \end{cases}$ **(ce système de trois équations à deux inconnues est compatible) et au point de coordonnées** $(0, 2, 2)$**.**

3.a. Le point *N* ayant pour abscisse zéro, c'est un point du plan (*ADE*), dont une équation cartésienne est $x = 0$. La droite (*AN*) est incluse dans le plan (*ADE*).

La droite (*AM*) est confondue avec la droite (*AB*) qui est orthogonale au plan (*ADE*) ; cette droite (*AM*) est orthogonale à toutes les droites du plan (*ADE*), en particulier à la droite (*AN*). Les droites (*AM*) et (*AN*) étant orthogonales et sécantes en *A*, ces deux droites sont perpendiculaires et l'angle $\widehat{MAN}$ est un angle droit.

Le triangle *AMN* est rectangle en *A*.

3.a. $Aire(AMN) = \frac{1}{2} \times AM \times AN = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

4.a. La face *BCGF* étant un carré, son centre *J* est le milieu de la diagonale [*BG*] et cette propriété permet d'exprimer les coordonnées de *J* comme demi-sommes des coordonnées de *B* et de *G*. Nous obtenons ainsi : $J\ \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Ce point *J* est milieu commun de [*BG*] et de [*CF*] (ce qui transforme le début de la question 4.c en lapalissade).

4.b, c et d. Le plan (AMN) n'est autre que le plan (ABG) déjà évoqué puisque nous avons déjà vu que A et M sont dans ce plan (ABG) et puisque N appartient à (AH) qui est incluse dans ce plan.

NB. Il n'y a plus lieu de parler de « plan (AMN) », mais désormais de « plan (ABG) », appellation qui utilise des notations antérieures aux notations M et N.

La droite (FJ), incluse dans la face $BCFG$ est perpendiculaire à l'arête (AB) du cube. Elle est aussi perpendiculaire à la deuxième diagonale (BG) du carré $BCGF$, droite incluse dans le plan (ABG). Etant perpendiculaire à deux droites sécantes du plan (ABG), la droite (FJ) est perpendiculaire au plan (ABG). Le vecteur $\overrightarrow{FJ}$ étant un vecteur directeur de (FJ) :

$\overrightarrow{FJ}$ est un vecteur normal au plan (ABG).

J étant à la fois sur la perpendiculaire issue de F au plan (ABG) et dans ce plan, il s'agit du projeté orthogonal de F sur ce plan.

5. La pyramide $BCGFM$ a pour base une face carrée du cube (la face $BCGF$), face dont l'aire est égale à 1, et pour hauteur [BM], segment de longueur 1. Le volume de cette pyramide est donc égal à $\frac{1}{3}$.

Le tétraèdre $AMNF$ a pour base le triangle AMN dont nous avons calculé l'aire (égale à $2\sqrt{2}$) et pour hauteur correspondante le segment [FJ].

Calculons la longueur FJ, sachant que F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$ et que J a pour coordonnées $J\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ donc que $\overrightarrow{FJ}$ a pour coordonnées $\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$: $FJ = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Nous en déduisons le volume du tétraèdre $AMNF$: $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 2\sqrt{2} = \frac{2}{3}$

Le tétraèdre $AMNF$ a pour volume $\frac{2}{3}$, ce qui est bien le double du volume de la pyramide $BCGFM$.

Exercice 3 : Suites en folie

Un exercice stupide, de nature à apporter de l'eau au moulin du discrédit portant sur la pertinence de l'enseignement français actuel des mathématiques.

Partie A

1. Soit *f* l fonction définie sur l'intervalle $I = [2\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{3x-2}$.

La fonction *f* est la composée d'une fonction affine continue et strictement croissante sur l'intervalle *I*, appliquant *I* sur l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$ et de la fonction racine carrée continue et strictement croissante sur l'intervalle $[4\ ;\ +\infty[$, appliquant cet intervalle sur l'intervalle *I*. Par conséquent *f* est une fonction continue et strictement croissante sur $I = [2\ ;\ +\infty[$, réalisant une bijection de cet intervalle sur lui-même (cet intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, est stable par *f*). En particulier vérifie au point 2 la relation $f(2) = 2$, ce qui fait de 2 un point fixe de *f*

La stabilité de $[2\ ;\ +\infty[$ par *f* garantit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie dès lors que son terme initial appartient à $[2\ ;\ +\infty[$.

Si nous avions défini la fonction *f* pour $x \geq \frac{2}{3}$, nous aurions eu deux points fixes, 1 et 2.

2.a. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ de l'entier *n* : « $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$

Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel *n.*

Initialisation. Le terme initial est $u_0 = 6$ et le terme de rang 1 est $u_1 = f(6) = 4$.

Nous obtenons le rangement : $2 \leq u_0 \leq u_1 \leq 6$: la propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité. Supposons que pour un certain entier naturel *n* la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée, c'est-à-dire supposons que $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$. La fonction *f* étant strictement croissante sue l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, elle y conserve le sens des inégalités.

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6 \implies f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \leq f(6).$$

Or : $\begin{cases} f(2) = 2 \\ f(u_{n+1}) = u_{n+2} \\ f(u_n) = u_{n+1} \\ f(6) = 4 \leq 6 \end{cases}$. Ainsi : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6 \implies 2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1} \leq 6$.

Nous obtenons l'implication $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion. Etant initialisée au rang zéro et héréditaire, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n* : $2 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 6$.

2.b. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée par 2, elle est convergente.

3.a. Montrons la propriété « admise ». Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ où *f* est continue sur un intervalle fermé *I* stable par *f* et contenant le terme initial de la suite. Montrons que si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite finie ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$ appartenant à *I*. (Autrement dit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger que vers un point fixe de *f*). En effet :

- La stabilité par *f* de l'intervalle *I* garantit que tous les termes de la suite appartiennent à *I*.
- La fermeture de l'intervalle assure que ℓ appartient à *I*.
- $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}) = \ell$ car un décalage d'indexation n'influe pas sur la valeur de la limite d'une suite.
- Puisque *f* est continue sur *I*, $\lim\limits_{n\to\infty}(f(u_n)) = f(\ell)$ d'après le théorème de composition des limites.

En passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, nous obtenons par unicité de la limite la relation : $\ell = f(\ell)$

Le fait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2 n'est plus qu'une formalité.

4. D'après la définition d'une limite de suite, dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2, c'est dire que quel que soit le réel ε strictement positif, il existe un entier naturel n_0 tel que : $$n \geq n_0 \implies \lvert u_n - 2\rvert \leq \varepsilon.$$	`>>> from math import *`
	`>>> def rang(a):`
	`        u=6`
	`        n=0`
	`        while u>=a:`
	`                u=sqrt(3*u-2)`
	`                n=n+1`
	`        return n`
	
	`>>> rang(2.000001)`
	`49` .

Vu que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante et converge vers 2, quel que soit le réel ε strictement positif, il existe un entier naturel n_0 tel que : $n \geq n_0 \implies 2 \leq u_n \leq 2+\varepsilon$.

C'est pourquoi la fonction « rang » renvoie une valeur pour tout réel *a* strictement supérieur à 2, en particulier pour $a = 2 + 10^{-6}$.

Partie B

Dans cette partie, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente définie par la relation de récurrence $v_{n+1} = g(v_n)$ où *g* est la fonction $x \longmapsto g(x) = 3 - \frac{2}{x}$, que nous pouvons définir sur l'intervalle $[2\,;6]$. La fonction *g* est continue et strictement croissante sur cet intervalle, réalisant une bijection de $[2\,;6]$ sur l'intervalle image $\left[2\,;\frac{8}{3}\right]$, intervalle qui est inclus dans $[2\,;6]$.

L'intervalle $[2\,;6]$ est donc stable par *g* et sur cet intervalle la fonction *g* admet un point fixe puisque nous remarquons que $g(2) = 2$

1. $v_1 = \frac{8}{3}$.

Nous disposons ainsi de l'inégalité $2 < v_1 \leq v_0 \leq 6$ (inégalité stricte après 2 utile ici), qui initialise la propriété « $2 < v_{n+1} \leq v_n \leq 6$, propriété que nous pourrions montrer par récurrence sans difficulté pour tout entier naturel *n* comme nous l'avons fait dans la partir précédente. Ce qui éviterait d'avoir à « admettre » que v_n est toujours distinct de 2.

2. **L'énoncé prend l'option de parachuter une suite auxiliaire providentielle …**

Pour tout entier naturel *n* :

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1} - 1}{v_{n+1} - 2} = \frac{\left(3 - \frac{2}{v_n}\right) - 1}{\left(3 - \frac{2}{v_n}\right) - 2} = \frac{2v_n - 2}{v_n - 2} = 2w_n$$

La relation de récurrence obtenue est celle d'une suite géométrique de raison 2. Le premier terme de cette suite est $w_0 = \frac{v_0 - 1}{v_0 - 2} = \frac{5}{4}$.

Nous en déduisons que la formule explicite définissant le terme de rang *n* est :

$$w_n = \frac{5}{4} \times 2^n = 5 \times 2^{n-2}.$$

2.b. La relation explicite liant, inversement, un terme de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au terme de même rang de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$w_n = \frac{v_n - 1}{v_n - 2} \iff v_n = \frac{2w_n - 1}{w_n - 1} = 2 + \frac{1}{w_{n-1} - 1}$$

Il y a bien équivalence car, d'une part tous les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont distincts de 2 (il est possible de calculer w_n connaissant v_n pour tout indice *n*) et d'autre part tous les termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont distincts de 1 (il est possible de calculer v_n connaissant w_n pour tout indice *n*).

Nous en déduisons que pour tout entier naturel *n* :

$$v_n = 2 + \frac{1}{5 \times 2^{n-2}. - 1}$$

2.c. La suite géométrique $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant un premier terme strictement positif et une raison strictement supérieure à 1, elle diverge vers plus l'infini. Son inverse converge vers zéro.

Par conséquent : la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2.

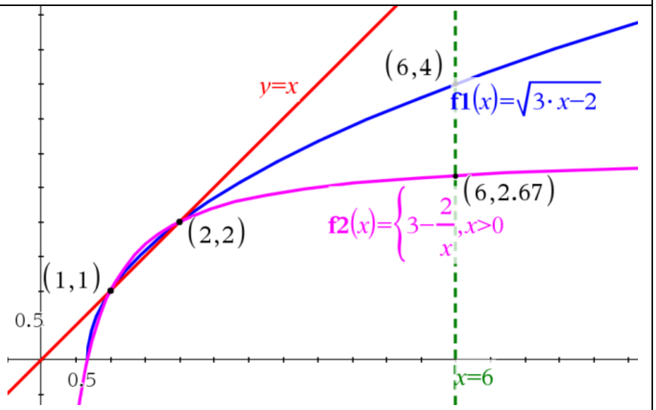
3. Ecrivons une condition pour que $v_n < 2{,}01$:

$$v_n < 2{,}01 \iff \frac{1}{5\times 2^{n-2}.-1} < 0{,}01 \iff 2^{n-2} > 20{,}2 \iff n > 2 + \frac{\ln(20{,}2)}{\ln(2)}$$

Une calculatrice nous indique que : $6{,}3 < 2 + \frac{\ln(20{,}2)}{\ln(2)} < 6{,}4.$

$v_n < 2{,}01$ à partir du terme de rang 7.

Partie C

L'algorithme « rang » renvoie 17 comme première valeur pour laquelle $u_n < 2{,}01$	`>>> rang(2.01)` `17`
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 2 plus rapidement que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourrait démontrer que pour $x \geq 2$: $\sqrt{3x-2} - 2 = \frac{3(x-2)}{\sqrt{3x-2}+2} \leq \frac{3}{4}(x-2)$ Ce qui permettrait de démontrer les majorations : $0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{3}{4}(u_n - 2)$ puis : $0 < u_n - 2 \leq 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$	

Pour tout entier naturel $n \geq 17$, nous avons en même temps les inégalités : $\begin{cases} 2 < u_n < 2{,}01 \\ 2 < v_n < 2{,}01 \end{cases}$.

En particulier, avec les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, il ne faut pas moins de 17 radicaux imbriqués pour parvenir à approcher 2 à moins d'un centième près. Belle performance !

Aucun terme de ces suites n'appartient à l'intervalle $[1{,}99\,;\,2]$ puisque nous avons démontré que ces suites étaient toutes deux strictement décroissantes et minorées par 2.

Analysons ce qui est demandé dans cet exercice.

1. L'utilité de ces suites.

Elle est nulle. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approche un nombre entier à l'aide de nombres rationnels, et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ approche ce même nombre entier à l'aide de nombres irrationnels. Les suites n'ont pas été inventées pour converger vers des nombres entiers, mais pour converger vers des nombres réels « difficiles d'accès ».

2. Les fonctions *f* et *g* associées à ces suites récurrentes et leur effet.

Il s'agit de deux fonctions strictement croissantes qui ont les mêmes points fixes. Le terme de rang 1 étant dans chaque cas plus petit que le terme de rang zéro, les deux suites à l'étude sont toutes deux strictement décroissantes. De ce point de vue, les deux situations sont similaires. La propriété qui différencie ces deux fonctions tient au fait que la fonction *g* a une variation plus lente que *f* ce qui induit une convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plus rapide.

On peut démontrer les inégalités $0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{3}{4}(u_n - 2)$ et $0 < v_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2}(v_n - 2)$ puis étudier leurs effets. Mais ce point n'est pas abordé par le sujet.

3. La cohérence des questions posées.

Aucune méthode n'est évaluée dans cet exercice. Lorsqu'une propriété utile présente une quelconque difficulté, elle est « admise ». La conséquence est que le sujet ne présente aucun enchaînement significatif illustrant une quelconque démarche. Quant aux approximations, on se demande pourquoi introduire une approche au millionième (inaboutie d'ailleurs) pour ensuite revenir à une approche au centième, sans pour autant avoir demandé une étude permettant de répondre correctement à la question (estimation de la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Le sujet présente ainsi une série de questions erratiques, sans liens significatifs les unes avec les autres.

Les deux situations proposées auraient peut-être un certain intérêt pour comparer deux cas, un cas où l'on n'a pas recours à une suite auxiliaire (la première situation où l'on exploiterait la majoration $0 < u_{n+1} - 2 \leq \frac{3}{4}(u_n - 2)$, encore que la suite choisie n'a rien de folichon) et un cas où l'on a recours à une suite auxiliaire géométrique (la deuxième situation, permettant d'obtenir une formule explicite)

Exercice 4 : Vrai / Faux

1. Faux. Puisque le premier chiffre du code est distinct de 0, il y a 9 possibilités pour le choix de ce premier chiffre. Les trois autres chiffres constituent un triplet de trois chiffres distincts choisis parmi les 9 chiffres qui sont différents du premier chiffre du code. Il y a $9 \times 8 \times 7$ possibilités pour le choix de ce triplet.

Le nombre de codes complets est donc $9 \times 9 \times 8 \times 7 = 4536$

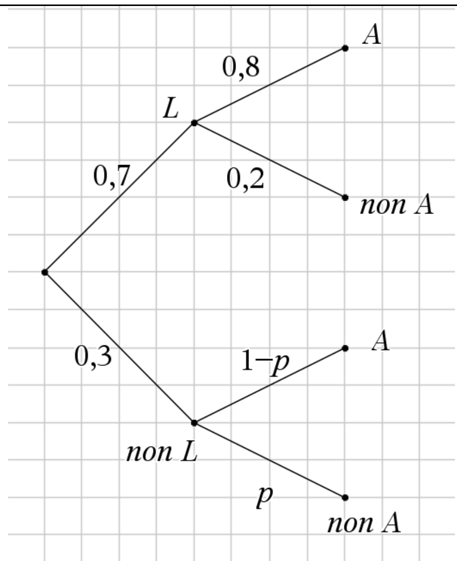
Et non pas 5040 qui correspondrait au produit $10 \times 9 \times 8 \times 7$.

2. Faux. Les informations de l'énoncé nous permettent de construire l'arbre de probabilité ci-contre (où p est la probabilité conditionnelle de ne pas prendre un audioguide sachant que le billet n'a pas été pris en ligne.
Nous pouvons exprimer la probabilité de ne pas prendre un audioguide :

$0{,}7 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times p = 0{,}3p + 0{,}14$

Cette probabilité étant, d'après l'énoncé, égale à 0,32, nous en déduisons que : $0{,}3p + 0{,}14 = 0{,}32$, c'est-à-dire que : $p = \frac{0{,}18}{0{,}3} = 0{,}6$.

Cette probabilité est plus petite que 2/3.



3. Vrai. La probabilité en question est :$\binom{12}{6} \times 0{,}32^6 \times (1 - 0{,}32)^6$ et nous vérifions bien que $\binom{12}{6} = 924$ et que $0{,}32 \times 0{,}68 = 0{,}2176$

4. Faux. L'espérance mathématique en question est (exprimée en minutes) :

$$E(X) = 50 \times 0{,}1 + 80 \times 0{,}6 + 100 \times 0{,}3 = 83E(X) = 50 \times 0{,}1 + 80 \times 0{,}6 + 100 \times 0{,}3 = 83$$