Fonctions absolument monotones

Il s'agit d'un travail personnel, qui ne prétend pas être une correction « officielle ».

Partie 1 : Exemples et résultats généraux.

1.1 Premiers exemples.

1.1.1. La fonction exponentielle est sa propre dérivée. Elle est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée d'ordre *n* est elle-même, quel que soit cet ordre.

La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, il en est de même de toutes ses dérivées : elle est absolument monotone.

1.1.2. La fonction f s'écrit aussi : $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$

La dérivée première de la fonction f est la fonction définie par : $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}$ sur l'intervalle $]0\,;1[$.

Par récurrence, nous pourrions démontrer que pour tout entier strictement positif *n* :

$$f^{(n)}(x) = (n!) \times \left(\frac{1}{(1-x)^{n+1}} + \frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right)$$

De ce fait, f est indéfiniment dérivable sur $]0\,;1[$. Toutes ses dérivées sont strictement positives sur cet intervalle, comme sommes de deux fonctions strictement positives sur $]0\,;1[$.

Cette fonction f est absolument monotone sur $]0\,;1[$.

1.1.3. Une condition suffisante est que tous les coefficients de la fonction polynomiale soient supérieurs ou égaux à zéro (car alors cette fonction est une somme de monômes tous positifs sur $[0\,;\,+\infty[$.

Réciproquement, étudions la contraposée. Supposons qu'une fonction polynômiale $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ ait au moins un coefficient strictement négatif. Soit *p* le plus petit indice pour lequel le coefficient est négatif. La dérivée d'ordre *p* de f est une fonction qui se présente sous la forme : $(p!).a_p + x \times Q(x)$ où *Q* est une fonction polynômiale. $f^{(p)}(0)$ a pour valeur $(p!).a_p$ en zéro, valeur qui est st strictement négative. En conséquence, f a au moins une dérivée qui n'est pas positive ou nulle sur $[0\,;\,+\infty[$, elle n'est pas absolument monotone. Une fonction polynomiale est absolument monotone si et seulement si tous ses coefficients sont positifs ou nuls.

1.2. Un autre exemple

1.2.1. La dérivée première de la fonction f est la fonction définie par : $f'(x) = \frac{1}{1-x}$ sur l'intervalle $[0\,;1[$ Par récurrence, nous pourrions démontrer que pour tout entier strictement positif n :

$$f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n}$$

De ce fait, f est indéfiniment dérivable sur $[0\,;1[$. Toutes ses dérivées sont strictement positives sur cet intervalle. Cette fonction f est absolument monotone sur $[0\,;1[$.

1.2.2. La dérivée de la fonction u_n est définie par :

$$u_n'(x) = \frac{1}{1-x} - \sum_{k=1}^{n-1} x^k = -\frac{x^n}{1-x}$$

Il s'agit d'une fonction négative sur $[0\,;1[$. La fonction u_n est donc décroissante sur $[0\,;1[$.

La dérivée de la fonction $x \longmapsto \frac{x^{n+1}}{1-x}$ est la fonction $x \longmapsto \frac{x^n(n+1-nx}{(1-x)^2}$. De ce fait, on obtient :

$$v_n'(x) = \frac{x^n(n-(n-1)x)}{(1-x)^2}$$

Il s'agit d'une fonction positive sur $[0\,;1[$. La fonction v_n est donc croissante sur $[0\,;1[$.

Les fonctionsu_n et v_n s'annulent toutes deux en zéro, u_n est décroissante tandis que v_n est croissante sur l'intervalle $[0\,;1[$: La fonction u_n est négative, et la fonction v_n est positive sur $[0\,;1[$.

1.2.3. Des deux inégalités précédentes, nous déduisons :

$$-\ln(1-x) \leq u_n(x) \leq -\ln(1-x) + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est encadrée par la constante $-\ln(1-x)$ et par une suite qui converge vers cette même constante (puisque x est un réel de l'intervalle $[0\,;1[$, la suite (x^{n+1}) est une suite géométrique convergente vers zéro). D'après le théorème des gendarmes :

La suite $(u_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge elle-même vers $-\ln(1-x)$.

1.3. Quelques résultats généraux

1.3.1. La positivité de *f* est une hypothèse (*f* est sa dérivée « zéro-ème »).

La croissance de *f* est due au fait que sa dérivée première est par hypothèse positive sur *I*.

La convexité de *f* est due au fait que sa dérivée deuxième est par hypothèse positive sur *I*.

1.3.2. Supposons que *f* soit une fonction absolument monotone. Pour tout entier naturel *n*, la dérivée *n*-ème de la fonction dérivée *f'* est, par définition, la dérivée $(n+1)$-ème de la fonction *f*. L'absolue monotonie de *f* implique que *f'* est indéfiniment dérivable avec toutes ses dérivées positives ou nulles sur *I* : la fonction dérivée *f'* est elle-même absolument monotone.

Réciproquement, si *f* est une fonction dérivable dont la dérivée *f'* est absolument monotone, alors pour tout entier *n* supérieur ou égal à 1 : $f^{(n)}(x) = f'^{(n-1)}(x) \geq 0$ pour tout *x* appartenant à *I*.

L'absolue monotonie de f' assure la positivité des dérivées $f^{(n)}$ à tous les ordres à partir de l'ordre $n = 1$. Si on ajoute comme hypothèse complémentaire « f positive », alors la positivité est acquise aussi pour l'ordre $n = 0$. La fonction *f* est absolument monotone. D'où l'équivalence.

1.3.3. Pour tout entier naturel *n* : $(f+g)^{(n)} = (f)^{(n)} + (g)^{(n)}$. La positivité de $(f)^{(n)}$ et de $(g)^{(n)}$ sur *I* implique celle de leur somme. Ce qui justifie que $(f+g)$ est indéfiniment dérivable avec des dérivées de tous ordres positives. La fonction somme est absolument monotone.

D'autre part, en ce qui concerne le produit :

$(fg)^{(0)} = (f)^{(0)}(g)^{(0)} = fg$. La positivité sur *I* des deux fonctions *f* et *g* implique celle de leur produit.

Pour tout entier *n* strictement positif nous pouvons appliquer la formule de Leibniz :

$$(fg)^{(n)}\ a = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

La fonction $(fg)^{(n)}$ apparaît comme étant une somme de fonctions positives sur *I*, elle est positive sur *I*.

Le produit *fg* est indéfiniment dérivable avec des dérivées de tous ordres positives.

La fonction produit est absolument monotone.

Il en est ainsi également d'une fonction $k \times f$ où *f* est une fonction absolument monotone et *k* une constante positive. (Une fonction constante positive étant absolument monotone).

Par exemple la fonction $x \longmapsto \frac{x}{1-x^2}$ est absolument monotone sur $]0\,;1[$ parce que son double l'est.

1.3.4. Montrons que pour tout entier naturel *n*, la dérivée *n*-ème de la fonction $\exp(f)$ est de la forme : $(\exp(f))^{(n)} = g_n \times \exp(f)$ où g_n est absolument monotone sur *I*.

Initialisation : $(\exp(f))^{(0)} = 1 \times \exp(f)$. Au rang zéro, g_0 est la fonction constante égale à 1 (qui est absolument monotone).

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel *n*, la propriété $\wp_n$: « $(\exp(f))^{(n)} = g_n \times \exp(f)$ où g_n est absolument monotone sur *I*.» soit vérifiée.

Alors au rang suivant : $(\exp(f))^{(n+1)} = (g_n \times \exp(f))' = (g_n' + f'.g_n) \times \exp(f)$

Les fonctions dérivées g_n' et f' sont absolument monotone d'après **1.2** et le cocktail $g_{n+1} = g_n' + f'.g_n$ est absolument monotone d'après **1.3.** La propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Etant initialisée au rang 0 et héréditaire, la propriété $\wp_n$ est vraie pour tout entier naturel *n*.

Ainsi, quel que soit l'entier naturel *n*, la fonction $(\exp(f))^{(n)} = g_n \times \exp(f)$, en tant que produit d'une fonction absolument monotone et d'une fonction positive, est positive.

La fonction $\exp(f)$ est indéfiniment dérivable et ses dérivées de tous les ordres sont des fonctions positives :

Elle est absolument monotone.

1.3.5. Remarquons que $\ln(g(x)) = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ qui est une fonction strictement positive sur $]0\,;1[$

Sa dérivée est la fonction définie sur $]0\,;1[$ par : $(\ln(g(x)))' = \frac{x}{1-x^2}$.

Nous avons établi que cette fonction est absolument monotone sur $]0\,;1[$.

La fonction $\ln(g(x))$ étant positive et ayant une dérivée absolument monotone l'est aussi, et l'exponentielle de cette fonction, c'est-à-dire *g*, l'est également.

La fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est absolument monotone sur $]0\,;1[$.

1.3.6. D'après les questions précédentes, si *f* et φ sont absolument monotones, leurs dérivées successives sont elles aussi absolument monotones. Pour tout entier naturel *k*, les fonctions $f^{(k)} \circ \varphi$ et $\varphi^{(k)}$ sont de plus des fonctions positives sur l'intervalle *J*.

Etudions ce qu'il se passe quand on dérive une fonction de la forme $\left(f^{(i)} \circ \varphi\right) \times \left(\varphi^{(j)}\right)^k$

Etudions les dérivées de la fonction composée $f \circ \varphi$.

La formule de dérivation d'une fonction composée s'écrit ainsi : $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \times \varphi'$.

La dérivée première est un produit de fonctions positives sur *J*.

Pour la dérivée deuxième : $(f \circ \varphi)^{(2)} = \left((f' \circ \varphi) \times \varphi'\right)' = \left(f^{(2)} \circ \varphi\right) \times (\varphi')^2 + (f' \circ \varphi) \times \varphi^{(2)}$. C'est un cocktail additif de fonctions positives sur *J*, $(f \circ \varphi)^{(2)}$ est positive sur *J*.

On peut considérer la propriété $\wp_n$:

« $(f \circ \varphi)^{(n)}$ est une somme de fonctions de la forme $\left(f^{(i)} \circ \varphi\right) \times \left(\varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_k)}\right)$ où les indices sont tels que $0 \leq i \leq n$ et $j_1 + \cdots + j_k = n$. »

Cette propriété est initialisée aux rangs 0, 1 et 2. Etudions son hérédité.

Etudions pour cela ce qu'il se passe quand on dérive une fonction de la forme $\left(f^{(i)} \circ \varphi\right) \times \left(\varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_k)}\right)$:

$$\left(\left(f^{(i)} \circ \varphi\right) \times \left(\varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_k)}\right)\right)' = \left(f^{(i+1)} \circ \varphi\right) \times \varphi' \times \left(\varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_k)}\right) + \left(f^{(i)} \circ \varphi\right) \times \left(\varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_k)}\right)'$$

On constate que les ordres de dérivation de *f* sont inférieurs ou égaux à $n+1$ (à cause de l'indice $i+1$ et que la somme des ordres de dérivation des fonctions phi est égal à $n+1$, aussi bien dans $\varphi' \times \left(\varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_k)}\right)$ que dans $\left(\varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_k)}\right)' = \sum_{u=1}^{k} \varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_u+1)} \ldots \varphi^{(j_k)}$ (cette somme est $j_1 + \cdots + j_k + 1$ dans chaque cas).

Par conséquent, chaque fonction $\left(f^{(i)} \circ \varphi\right) \times \left(\varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_k)}\right)$ génère par dérivation une somme de fonctions de la forme analogue $\left(f^{(i)} \circ \varphi\right) \times \left(\varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_k)}\right)$ avec maintenant $i \leq n+1$ et $j_1 + \cdots + j_k = n+1$.

Si on suppose qu'à un certain rang *n* entier naturel $(f \circ \varphi)^{(n)}$ est une somme de fonctions de la forme $\left(f^{(i)} \circ \varphi\right) \times \left(\varphi^{(j_1)} \ldots \varphi^{(j_k)}\right)$ où les indices sont tels que $0 \leq i \leq n$ et $j_1 + \cdots + j_k = n$, alors à l'ordre de dérivation $n+1$ $(f \circ \varphi)^{(n+1)}$ $(f \circ \varphi)^{(n)}$ est une somme de fonctions de la même forme où les indices sont tels que $0 \leq i \leq n+1$ et $j_1 + \cdots + j_k = n+1$. Ce qui justifie l'hérédité.

La propriété en jeu est donc vérifiée pour tout entier naturel *n*.

$(f \circ \varphi)^{(n)}$ est de ce fait un cocktail additif et multiplicatif de fonctions positives sur *I*, elle est positive sur *I*.

$f \circ \varphi$ est une fonction absolument monotone puisque toutes ses dérivées sont des fonctions positives.

Partie 2 : Formule de Taylor avec reste intégral

2.1. Formule de Taylor avec reste intégral

2.1.1. Soit *k* un entier strictement positif. Effectuons une intégration par parties sur l'intégrale :

$$R_{k-1} = \int_a^b \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!} f^{(k)}(t).\mathrm{d}t$$

Posons pour cela : $u'(t) = \frac{(b-t)^{k-1}}{(k-1)!}$; $u(t) = -\frac{(b-t)^k}{k!}$; $v(t) = f^{(k)}(t)$; $v'(t) = f^{(k+1)}(t)$

Nous obtenons :

$$R_{k-1} = \left[-\frac{(b-t)^k}{k!} \times f^{(k)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^k}{k!} f^{(k)}(t).\mathrm{d}t$$

Soit :

$$R_{k-1} = \frac{(b-a)^k}{k!} \times f^{(k)}(a) + R_k$$

2.1.2. Calculons d'abord l'intégrale R_0 :

$$R_0 = \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f^{(1)}(t).\mathrm{d}t = \int_a^b f'(t).\mathrm{d}t = [f(t)]_a^b = f(b) - f(a)$$

Puis écrivons la formule de récurrence précédente depuis le rang 1 jusqu'au rang *n* :

$$\begin{cases} f(b) - f(a) = R_0 = (b-a) \times f^{(1)}(a) + R_1 \\ R_1 = \dfrac{(b-a)^2}{2!} \times f^{(2)}(a) + R_2 \\ \ldots \\ R_{n-1} = \dfrac{(b-a)^n}{n!} \times f^{(n)}(a) + R_n \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre ces *n* égalités, nous observons une élimination télescopique des termes R_i. Il reste :

$$f(b) - f(a) = R_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} \times f^{(k)}(a) + R_n$$

Nous pouvons incorporer le terme « $f(a)$ » dans la sommation, à condition d'initier cette sommation à l'indice zéro :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} \times f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t).\mathrm{d}t$$

2.2. Etude de quelques suites.

2.2.1. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que la suite $\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)$, qui est elle aussi une suite de réels strictement positifs, a une limite nulle. En raison de la nullité de cette limite, il existe un entier n_0 tel que :

$$n \geq n_0 \implies 0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \frac{1}{2}$$

Nous obtenons : $n \geq n_0 \implies 0 < x_{n+1} \leq \frac{1}{2} x_n$

À partir de son rang n_0, la suite (x_n) est majorée par une suite géométrique de raison plus petite que 1. Plus précisément : $x_n \leq x_{n_0} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0}$

C'est-à-dire que la suite psitive (x_n) est majorée par une suite qui converge vers zéro :

La suite (x_n) converge elle-même vers zéro.

2.2.2. Soit (x_n) la suite définie explicitement par $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$ où lambda est un réel strictement positif.

Le quotient de deux termes strictement positifs est :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\lambda}{n+1}$$

Il s'agit là d'une suite de réels strictement positifs qui a une limite nulle et qui satisfait les hypothèses de la **question 2.2.1**.

La suite (x_n) définie explicitement par $x_n = \frac{\lambda^n}{n!}$ converge vers zéro.

2.3. Application au calcul d'une limite

2.3.1. On applique la **question 2.1** à la fonction exponentielle avec $a = 0 \,;\, b = x$

2.3.2. Soit *x* un nombre réel non nul.

L'objectif de cette question est de majorer l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} \exp(t)\,.\mathrm{d}t$.

Appliquons à l'intégrale en question le changement de variable : $u = x - t$

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} \exp(t)\,.\mathrm{d}t = \int_x^0 \frac{u^n}{n\,!} \exp(x-u)\,.\,(-\mathrm{d}u) = \int_0^x \frac{u^n}{n\,!} \exp(x-u)\,.\mathrm{d}u$$

Premier cas : x est strictement positif.

Pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;x]$: $0 \leq t \leq x$ donc $1 \leq \exp(t) \leq \exp\,(x)$ et $0 \leq x - t \leq x$.

Nous en déduisons que pour tout réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;x]$:

$$0 \leq \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(t) \leq \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(x)$$

Les intégrales de ces deux fonctions sur l'intervalle $[0\,;x]$ sont dans le même ordre :

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(t)\,.\mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(x)\,.\mathrm{d}t = \exp(x)\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}.\mathrm{d}t = \exp(x)\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)\,!}\right]_0^x$$

Nous obtenons l'inégalité :

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(t)\,.\mathrm{d}t \leq \exp(x).\frac{x^{n+1}}{(n+1)\,!}$$

Deuxième cas : x est strictement négatif.

Appliquons à l'intégrale le changement de variable : $u = x - t$, ce qui a pour effet de mettre les deux bornes d'intégration « dans le bon ordre » puisque $x < 0$:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(t)\,.\mathrm{d}t = \int_x^0 \frac{u^n}{n\,!}\exp(x-u)\,.\,(-\mathrm{d}u) = \int_x^0 \left(-\frac{u^n}{n\,!}\right)\exp(x-u)\,.\mathrm{d}u$$

Pour tout réel t tel que $x \leq t \leq 0$

Appliquons à l'intégrale le changement de variable : $u = t - x$:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(t)\,.\mathrm{d}t = \int_{-x}^0 \frac{(-u)^n}{n\,!}\exp(x+u)\,.\mathrm{d}u$$

Pour tout réel t tel que $x \leq t \leq 0$, nous avons $0 \leq u \leq -x$ (la variable u est positive) et $x \leq u + x \leq 0$ donc $\exp\,(x) \leq \exp(x+u) \leq 1$ et *a fortiori* $\exp(x+u) \leq \exp\,(|x|)$.

En conséquence, pour tout réel t tel que $x \leq t \leq 0$, :

$$\left|\frac{(-u)^n}{n\,!}\exp(x+u)\right| = \frac{|u^n|}{n!}\times\exp(x+u) = \frac{u^n}{n!}\times\exp(x+u) \leq \frac{u^n}{n!}\times\exp(|x|)$$

Considérons, en valeur absolue, les intégrales :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(t)\,.\mathrm{d}t\right| = \left|\int_{-x}^0 \frac{(-u)^n}{n\,!}\exp(x+u)\,.\mathrm{d}u\right| = \left|\int_0^{-x} \frac{(-u)^n}{n\,!}\exp(x+u)\,.\mathrm{d}u\right|$$

En raison de leur compatibilité avec la relation d'ordre :

$$\left|\int_0^{-x} \frac{(-u)^n}{n\,!}\exp(x+u)\,.\mathrm{d}u\right| \leq \int_0^{-x} \frac{u^n}{n!}\times\exp(|x|)\,.\mathrm{d}u = \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\times\exp(|x|)$$

En fin de compte, quel que soit le signe de x, nous pouvons regrouper les deux inégalités en une seule :

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(t)\,.\mathrm{d}t\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\times\exp(|x|)$$

2.3.4. Pour x fixé, la suite $\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\times\exp(|x|)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers zéro en vertu du résultat de la **question 2.2.**

La suite $\left(\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(t)\,.\mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée en valeur absolue par une suite qui converge vers zéro, elle converge elle-même vers zéro.

2.3.5. Et de la relation trouvée en **2.3.1** nous pouvons déduire que :

$$\left|\exp(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(t)\,.\mathrm{d}t\right|$$

La suite $\left(\left|\exp(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro donc :

$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\exp(x)$.

Partie 3 : Développement en série entière et théorème de Bernstein

3.1. Théorème de Bernstein

3.1.1. Soit f une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $[0\,;a[$ (fermé en zéro) et absolument monotone sur l'intervalle $]0\,;a[$ (ouvert en zéro).

La fonction f étant de classe C^∞ sur l'intervalle $[0\,;a[$, cette fonction est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $[0\,;a[$, et pour tout entier naturel n, la fonction $f^{(n)}$ est une fonction continue en zéro.

De ce fait : $f^{(n)}(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^{(n)}(x)$.

Or, la positivité de la fonction $f^{(n)}$ sur l'intervalle $]0\,;a[$ implique que sa limite en zéro est positive ou nulle : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f^{(n)}(x) \geq 0$. Nous en déduisons que :

$f^{(n)}(0) \geq 0$ pour tout entier naturel n.

3.1.2. Par hypothèse, *x* est un réel vérifiant $0 < x < a$.

Appliquons la formule de Taylor avec reste intégral sur l'intervalle $[0\,;x]$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t).\mathrm{d}t = S_n(x) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t).\mathrm{d}t$$

Pour calculer le reste intégral, effectuons le changement de variable $t = xu$. Nous obtenons :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t).\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(x-xu)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(xu).(x.\mathrm{d}u)$$

Soit, en remarquant que $(x-xu)^n = x^n \times (1-u)^n$:

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t).\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}}{n\,!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$$

Nous retrouvons bien :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n\,!} f^{(n+1)}(t).\mathrm{d}t = R_n(x)$$

Ce qui prouve que : $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$

3.1.3. Soit *n* un entier naturel.
Nous avons démontré dans la **question 3.1** que toutes les dérivées de *f* étaient positives ou nulles en zéro, ce qui justifie que $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k)}(0) \geq 0$.

Par ailleurs, par hypothèse, $f^{(n+1)}$ est une fonction positive. L'intégrale $\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$ est celle d'une fonction positive sur l'intervalle $[0\,;1]$, cette intégrale est positive.

Par conséquent : $S_n(x) \geq 0\,;\ R_n(x) \geq 0$

3.1.4. Le fait que $f(x) = S_n(x) + R_n(x)$ et que $R_n(x) \geq 0$ implique que, pour *x* fixé, la suite $\left(S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée par $f(x)$. Or, cette suite $\left(S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante car somme de termes tous positifs. (La différence $S_{n+1}(x) - S_n(x)$ vaut $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \times f^{(n+1)}(0)$ qui est positif).

La suite $\left(S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée, elle converge.

3.1.5. La fonction en question est ici la fonction $x \longmapsto \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$ définie sur l'intervalle $]0\,;a[$. Nous avons vu que, *f* étant supposée absolument monotone sur cet intervalle, toutes ses dérivées sont des fonctions croissantes sur $]0\,;a[$. En particulier, c'est le cas de la fonction $f^{(n+1)}$.

Ainsi : $0 < x_1 < x_2 < a \implies 0 \leq x_1 u < x_2 u < a$ pour tout u de $[0\,;1]$ et en raison de la croissance de la fonction $f^{(n+1)}$, $0 < x_1 < x_2 < a \implies 0 \leq f^{(n+1)}(x_1 u) \leq f^{(n+1)}(x_2 u)$ pour tout u de $[0\,;1]$. Ce qui implique une inégalité de même sens : $(1-u)^n f^{(n+1)}(x_1 u) \leq (1-u)^n f^{(n+1)}(x_2 u)$ pour tout u de $[0\,;1]$.

Les intégrales sur $[0\,;1]$ de ces fonctions sont dans le même ordre :

$$0 < x_1 < x_2 < a \implies \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(x_1 u).\mathrm{du} \leq \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(x_2 u).\mathrm{du}$$

La fonction $x \longmapsto \frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est une fonction croissante sur $[0\,;1]$.

3.1.6. En raison de la croissance de la fonction étudiée dans la question précédente :

$$0 < x < y < a \implies \frac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leq \frac{R_n(y)}{y^{n+1}}$$

En conséquence :

$$0 < x < y < a \implies R_n(x) \leq \left(\frac{x^{n+1}}{y^{n+1}}\right) R_n(y)$$

D'autre part, $f(y) = S_n(y) + R_n(y) \geq R_n(y) \geq 0$ puisque nous avons vu que S_n et R_n sont des fonctions positives. En fin de compte :

$$0 \leq x < y < a \implies 0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x^{n+1}}{y^{n+1}}\right) R_n(y) \leq \left(\frac{x^{n+1}}{y^{n+1}}\right) f(y)$$

3.1.7. Soit x un nombre réel fixé appartenant à l'intervalle $[0\,;a[$.

Nous avons vu que $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k)}(0) + R_n(x)$.

Appliquons l'inégalité de la **question 3.1.7** avec : $y = \frac{x+a}{2}$:

$$R_n(x) \leq \left(\frac{2x}{x+a}\right)^{n+1} f\left(\frac{x+a}{2}\right) = \left(\frac{2}{1+\frac{a}{x}}\right)^{n+1} f\left(\frac{x+a}{2}\right).$$

Le nombre $\frac{2}{1+\frac{a}{x}}$ est strictement compris entre 0 et 1. La suite géométrique de terme général $\left(\frac{2}{1+\frac{a}{x}}\right)^{n+1}$ converge donc vers zéro. La suite positive $\left(R_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par une suite qui converge vers zéro, elle converge elle-même vers zéro, ce qui implique que :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k)}(0)\right)$$

Nous pouvons définir cette limite ainsi :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k)}(0) = f(x)$$

3.2. Extension du théorème de Bernstein à un intervalle centré en zéro

3.2.1. Ce résultat a été démontré dans la **question 3.1.**

3.2.2. Soit *b* un nombre réel fixé appartenant à l'intervalle $[0\,;a[$. D'après la question précédente :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b^k}{k!} \times f^{(k)}(0) = f(b)$$

La suite de terme général $\frac{b^k}{k!} \times f^{(k)}(0)$ est celle des termes de cette série convergente : nécessairement, elle converge vers zéro.

3.2.3. La relation : $R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{n\,!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu).du$ reste valable lorsque $x \in \left]-a\,;0\right[$.

Nous avons vu que la fonction $f^{(n+1)}$ était une fonction positive et croissante sur son domaine de définition.

Pour tout réel *x* de l'intervalle $]-a\,;0[$ et tout *u* de l'intervalle $[0\,;1]$: $-a < xu \leq 0$.

Donc dans ces conditions : $0 \leq f^{(n+1)}(xu) \leq f^{(n+1)}(0)$

Par intégration : $0 \leq \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u \ \leq f^{(n+1)}(0).\int_0^1 (1-u)^n.\mathrm{d}u = f^{(n+1)}(0) \times \frac{1}{n+1}$.

Nous obtenons :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n\,!} \times \left(f^{(n+1)}(0) \times \frac{1}{n+1}\right) = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\,!} \times \left(f^{(n+1)}(0)\right)$$

En vertu du résultat de la **question 2.2.2**, la suite $\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)\,!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers zéro.

La suite $\left(R_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée en valeur absolue par une suite qui converge vers zéro, elle converge elle-même vers zéro.

Du fait que pour tout entier naturel *n*, $S_n(x) = f(x) - R_n(x)$ nous déduisons que :

La suite $\left(S_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite qui converge vers $f(x)$.

3.3. Application à la fonction tangente

3.3.1. Les deux fonctions sinus et cosinus sont définies et indéfiniment dérivables sur l'intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$, intervalle sur lequel la fonction cosinus ne s'annule pas. Leur fonction quotient, la fonction tangente, est définie et indéfiniment dérivable sur cet intervalle ouvert $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$.

Sa dérivée première est la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ par : $f'(x) = (\tan(x))' = 1 + (\tan(x))^2$

Les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de la fonction tangente d'après TI-Nspire

$\frac{d}{dx}(f(x))$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$
$\frac{d^2}{dx^2}(f(x))$	$\frac{2\cdot\sin(x)}{(\cos(x))^3}$
$\frac{d^3}{dx^3}(f(x))$	$\frac{2\cdot\left(2\cdot(\sin(x))^2+1\right)}{(\cos(x))^4}$

3.2.2. D'après le résultat de la question précédente : $f'(x) = 1 + (f(x))^2$

La fonction f' et la fonction f^2 diffèrent d'une constante. Elles ont la même fonction dérivée, et plus généralement, pour tout entier *n* au moins égal à 1 : $f^{(n+1)} = (f^2)^{(n)}$

Nous pouvons appliquer la formule de Leibniz à propos du carré de le fonction *f* :

Pour tout entier *n* au moins égal à 1 :

$$f^{(n+1)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}.$$

3.2.3. Démontrons par récurrence forte la positivité sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ des fonctions $f^{(n)}$ pour tout entier naturel *n*.

Initialisation.

La fonction tangente est le quotient de deux fonctions positives sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ (les fonctions sinus et cosinus). Elle est donc positive sur cet intervalle et il en est de même de sa fonction dérivée première (qui, quant à elle, est strictement positive vu son expression). La positivité de sur l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ des fonctions $f^{(n)}$ est donc vérifiée pour les rangs 0 et 1.

Hérédité.

Supposons que, pour un certain rang *n* au moins égal à 1, toutes les dérivées jusqu'à celle d'ordre *n* soient positives sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. La formule $f^{(n+1)} = (f^2)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}$ montre que si toutes les dérivées jusqu'à celle d'ordre *n* sont positives sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$, alors il en est de même de $f^{(n+1)}$ en tant que cocktail (additif et multiplicatif) de fonctions positives sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. La positivité des dérivées est vérifiée jusqu'à l'ordre $(n+1)$. Cette propriété est héréditaire.

Etant initialisée au rangs 0 et 1 et héréditaire à partir du rang 1, elle est vérifiée pour tout entier naturel *n*.

Toutes les fonctions $f^{(n)}$ sont des fonctions positives sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ (*n* entier naturel).

La fonction tangente est ainsi absolument monotone sur cet intervalle.

3.2.4. Les deux premières valeurs sont : $a_0 = \tan(0) = 0$ et $a_1 = 1 + \tan^2(0) = 1$

Ensuite, en appliquant en zéro la formule de la question précédente, nous obtenons la relation de récurrence :

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k . a_{n-k} .$$

La liste des 9 premiers nombres dérivés *n*-èmes en zéro d'après TI Nspire	$\operatorname{seq}\left(\frac{d^n}{dx^n}(\tan(x))\vert x=0,n,0,9\right)$ $\{0,1,0,2,0,16,0,272,0,7936\}$

On remarque que les coefficients de rangs pairs sont nuls, au moins jusqu'au rang 8.

3.2.5. Démontrons par récurrence forte que pour tout entier naturel *p*, $a_{2p} = 0$

Initialisation.

La question précédente établit que cette propriété est vérifiée pour $0 \leq p \leq 4$.

Hérédité.

Supposons que, pour un certain rang *p* au moins égal à 1, tous les coefficients pairs de rangs inférieurs ou égaux à $2p$ soient nuls. Le prochain coefficient de rang pair est :

$$a_{2p+2} = \sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} a_k . a_{2p+1-k}$$

Or, dans chaque produit $a_k . a_{2p+1-k}$, la somme des indices $k + (2p + 1 - k) = 2p + 1$ est un nombre impair, ce qui implique qu'il y a un indice pair et un indice impair, l'indice pair étant entre 0 et $2p$. Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence, dans chaque produit $a_k . a_{2p+1-k}$, l'un des deux facteurs est nul. Ce qui implique que la somme $\sum_{k=0}^{2p+1} \binom{2p+1}{k} a_k . a_{2p+1-k}$ est nulle.

Si tous les coefficients pairs de rangs inférieurs ou égaux à $2p$ sont nuls, il en est de même de tous les coefficients pairs de rangs inférieurs ou égaux à $2p + 2$: la propriété de nullité des coefficients de rangs pairs est héréditaire.

Etant initialisée aux rangs 0 et 1 et héréditaire à partir du rang 1, cette propriété est vérifiée pour tous les rangs.

Tous les coefficients de rang pair sont nuls.

Autre justification : Nous savons que la dérivée d'une fonction paire (resp. impaire) est une fonction impaire (resp. paire). La fonction tangente définie sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ est une fonction impaire. Par conséquent, toutes ses dérivées de rang pair sont des fonctions impaires. Ces fonctions impaires s'annulent toutes en zéro.

3.3.6.

Premier cas : x est positif.

Nous avons vu que la fonction tangente est absolument monotone sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$. Nous pouvons appliquer le résultat de la **question 3.1.7** :

$\tan(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\times f^{(k)}(0)\right)$ où f désigne la fonction tangente.

Soit : $\tan(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\times a_k\right)$ car par définition $f^{(k)}(0) = a_k$

Or, la somme $\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\times a_k$ se résume à la somme des termes d'indices impairs, puisque tous ceux d'indices pairs sont nuls. Il nous est possible de ne retenir qu'eux. Nous obtenons :

$$\tan(x) = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}\times a_{2p+1}\right)$$

Nous obtenons bien la relation voulue.

Deuxième cas : x est strictement négatif.

Le résultat est une conséquence immédiate de l'imparité de la fonction tangente.

En fin de compte, quel que soit le signe de x, nous pouvons regrouper les deux inégalités en une seule :

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n\,!}\exp(t)\,.\mathrm{d}t\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\times\exp(|x|)$$

Partie 4 : D'autres propriétés

4.1. Théorème de Bernstein sur $\mathbb{R}$.

Soit *f* une fonction absolument monotone sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout réel *x* :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\times f^{(k)}(0)\right)$$

En effet, nous pouvons appliquer les résultats de la **question 3.2** sur tout intervalle $[-a\,;a]$, le réel strictement positif *a* étant aussi grand que l'on veut. Pour un réel *x* donné, il suffit de choisir un intervalle $[-a\,;a]$ auquel *x* appartient.

4.1.1. Soit maintenant x_0 un nombre réel.

La fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(u) = f(x + x_0)$ est elle aussi absolument monotone sur $\mathbb{R}$ puisque pour tout entier naturel *n* sa dérivée d'ordre *n* est définie par $g^{(n)}(u) = f^{(n)}(x + x_0)$.

Nous pouvons appliquer à cette fonction *g* la remarque ci-dessus. Pour tout réel *u* :

$$g(u) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}\times g^{(k)}(0)\right)$$

Considérons un réel *x* quelconque.

Appliquons ce résultat au nombre $u = x - x_0$, nombre tel que : $g(u) = f\big((x - x_0) + x_0\big) = f(x)$

$$g(x - x_0) = f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(x - x_0)^k}{k!}\times g^{(k)}(0)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(x - x_0)^k}{k!}\times f^{(k)}(x_0)\right)$$

Retenons que pour tout couple de réels $(x\,;\ x_0)$:

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(x - x_0)^k}{k!}\times f^{(k)}(x_0)\right)$$

4.1.2. Soit *f* une fonction absolument monotone sur $\mathbb{R}$ et prenant la valeur zéro en un point *b*.

Nous avons vu qu'une fonction absolument monotone sur un intervalle était positive et croissante sur cet intervalle. Par conséquent, pour tout réel *x* tel que $x \leq b$, nous avons l'inégalité $0 \leq f(x) \leq f(b) = 0$.

La fonction *f* est identiquement nulle au moins sur l'intervalle $]-\infty\,;b]$.

Soit maintenant un réel *x* tel que $x > b$. Appliquons le résultat de la question précédente avec un réel x_0 appartenant à l'intervalle $]-\infty\,;b]$: $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\times f^{(k)}(x_0)\right)$

La fonction f étant identiquement nulle sur cet intervalle, il en est de même de toutes ses dérivées et c'est le cas en particulier au point x_0. Pour tout entier naturel k, $f^{(k)}(x_0) = 0$, et en conséquence pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \times f^{(k)}(x_0) = 0$.

Nous en déduisons que : $f(x) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \times f^{(k)}(x_0) \right) = 0$. Ainsi, la fonction f est aussi identiquement nulle sur l'intervalle $]b\ ;\ +\infty[$. En fin de compte :

Si f s'annule en un point b, alors f est identiquement sur $\mathbb{R}$.

4.1.3. Nous avons vu que, si f est absolument monotone sur un intervalle, alors toutes ses dérivées sont aussi absolument monotones sur ce même intervalle. Il en est ainsi lorsque f est absolument monotone sur $\mathbb{R}$.
S'il existe un entier strictement positif p et un réel c tels que $f^{(p)}(c) = 0$, alors la fonction $f^{(p)}$ est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$ en vertu de la question **4.1.2.**

Il en résulte que la fonction f est une fonction polynomiale de degré inférieur à p.

4.2. Il suffit de démontrer ces propriétés en zéro, car il est possible ensuite, par translation, d'en déduire la même propriété au voisinage d'un réel quelconque comme dans la question précédente.
Reprenons pour cela la relation :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k)}(0) + \frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^n f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$$

(Où f une fonction absolument monotone sur $\mathbb{R}$).

4.2.1. Appliquons à l'ordre $n-1$) cette relation au cas de la fonction dérivée, qui est elle aussi absolument monotone sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k+1)}(0) + \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k+1)}(0) + \frac{x^n}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$$

On obtient :

$$x \times f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{k!} \times f^{(k+1)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$$

Soit :

$$x \times f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \times (k+1) f^{(k+1)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$$

Dans cette relation, le terme $\frac{x^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$ tend vers zéro lorsque n tend vers plus l'infini, et la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \times (k+1) f^{(k+1)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \times f'(x)$.

Par le changement d'indice $j = k+1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1!} \times (k+1) f^{(k+1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x^j}{j!} \times j \times f^{(j)}(0)$$

On peut débuter la sommation à l'indice 0 car ça ne change pas la valeur de la somme.

Ce qui établit que :

$$\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \times j \times f^{(j)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } x \times f'(x).$$

4.2.2. Appliquons à l'ordre $n-2$ cette relation au cas de la fonction dérivée seconde, qui est elle aussi absolument monotone sur $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k+2)}(0) + \frac{x^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$$

On obtient :

$$x^2 \times f''(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{k+2}}{k!} \times f^{(k+2)}(0) + \frac{x^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$$

Soit :

$$x^2 \times f''(x) = \sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \times (k+2) \times (k+1) f^{(k+2)}(0) + \frac{x^{n-1}}{n!} \int_0^1 (1-u)^{n-1} f^{(n+1)}(xu).\mathrm{d}u$$

Dans cette relation, le terme intégrale tend vers zéro lorsque n tend vers plus l'infini, et la suite $\left(\sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \times (k+2) \times (k+1) f^{(k+2)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x^2 \times f''(x)$.

Par le changement d'indice $j = k+2$:

$$\sum_{k=0}^{n-2} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} \times (k+2) \times (k+1) f^{(k+2)}(0) = \sum_{j=2}^{n} \frac{x^j}{j!} \times j(j-1) \times f^{(j)}(0)$$

On peut débuter la sommation à l'indice 0 car ça ne change pas la valeur de la somme.

Ce qui établit que :

$\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!} \times j(j-1) \times f^{(j)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x^2 \times f''(x)$.

4.2.3. Pour tout entier naturel *n* :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times k^2 \times f^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times k(k-1) \times f^{(k)}(0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times k \times f^{(k)}(0)$$

Les deux suites du second membre étant des suites convergentes, leur somme est une suite convergente dont la limite est la somme de leurs limites.

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times k^2 \times f^{(k)}(0)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la somme $x^2 \times f''(x) + x \times f'(x)$.

Comme nous l'avons vu dans une question précédente, en appliquant ces résultats non pas à la fonction *f*, mais à la fonction *g* définie par : $g(x) = f(x+a)$, qui a des propriétés analogues, nous obtenons que ces propriétés se maintiennent par une translation.

Quel que soit les réels *a* et *x* :

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} \times f^{(k)}(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} \times k \times f^{(k)}(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x-a)f'(x)$.

La suite $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} \times k^2 \times f^{(k)}(a)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(x-a)^2 \times f''(x) + (x-a) \times f'(x)$,

4.2.4. Supposons que $x > 0$.

Considérons d'une part la suite de terme général $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times k \times f^{(k)}(0)\right)^2$ et d'autre part la suite de terme général $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times k^2 \times f^{(k)}(0)\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k)}(0)\right)$

Il s'agit de deux suites dont les termes peuvent être rangés suivant les puissances de x, cette puissance allant de l'exposant 0 à l'exposant $2n$.

Si nous supposons que $x > 0$, toutes les puissances de x sont strictement positives, et de ce fait tous les termes figurant dans l'une ou l'autre de ces sommes sont positifs.

Pour un exposant m tel que $0 \leq m \leq 2n$, étudions pour chaque suite le terme en x^m et le coefficient qui lui est affecté.

Son expression n'est pas la même suivant la valeur de m :

	Première suite	Deuxième suite
$0 \leq m < n$	$\sum_{j=0}^{m} \frac{j.f^{(j)}(0)}{j!} \times \frac{(m-j).f^{(m-j)}(0)}{(m-j)!}$	$\sum_{j=0}^{m} \frac{j^2.f^{(j)}(0)}{j!} \times \frac{f^{(m-j)}(0)}{(m-j)!}$
$m = n$	$\sum_{j=0}^{n} \frac{j.f^{(j)}(0)}{j!} \times \frac{(n-j).f^{(n-j)}(0)}{(n-j)!}$	$\sum_{j=0}^{n} \frac{j^2.f^{(j)}(0)}{j!} \times \frac{f^{(n-j)}(0)}{(n-j)!}$
$n < m < 2m$	$\sum_{j=m-n}^{n} \frac{j.f^{(j)}(0)}{j!} \times \frac{(m-j).f^{(m-j)}(0)}{(m-j)!}$	$\sum_{j=m-n}^{n} \frac{j^2.f^{(j)}(0)}{j!} \times \frac{f^{(m-j)}(0)}{(m-j)!}$

Considérons les deux termes d'indices « symétriques ». d'indices j et $(m-j)$.

Dans la deuxième suite, leur somme est :

$$[j^2 + (m-j)^2] \times \frac{f^{(j)}(0).f^{(m-j)}(0)}{j!.(m-j)!}$$

Dans la première suite, leur somme est :

$$[2j(m-j)] \times \frac{f^{(j)}(0).f^{(m-j)}(0)}{j!.(m-j)!}$$

Or, pour chaque indice j :

$$[j^2 + (m-j)^2] - [2j(m-j)] = \left(j - (m-j)\right)^2 = (2j-m)^2 \geq 0$$

C'est donc que la somme des deux termes « symétriques » est toujours plus grande dans la deuxième suite que dans la première.

Par addition de ces termes deux à deux, il en résulte que :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times k^2 \times f^{(k)}(0)\right) \times \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times f^{(k)}(0)\right) \geq \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times k \times f^{(k)}(0)\right)^2$$

Ces propriétés se maintiennent par une translation.

Quel que soit le réel a et quel que soit le réel x tel que $x > a$:

$$\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}\times k^2\times f^{(k)}(a)\right)\times\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}\times f^{(k)}(a)\right)\geq\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}\times k\times f^{(k)}(a)\right)^2$$

En passant aux limites lorsque n tend vers plus l'infini des diverses suites en jeu :

$$[(x-a)^2\times f''(x)+(x-a)\times f'(x)]\times(f(x))\geq((x-a)\times f'(x))^2$$

Autrement dit :

$$(x-a)\times[(x-a)\times f''(x)+f'(x)]\times f(x)\geq(x-a)^2\times(f'(x))^2$$

Vu que par hypothèse $x > a$, on ne change pas le sens de l'inégalité en multipliant ses deux membres par le nombre $\frac{1}{x-a}$. Nous obtenons :

$$[(x-a)\times f''(x)+f'(x)]\times f(x)\geq(x-a)\times(f'(x))^2$$

4.2.5. La relation précédente s'écrit aussi bien :

$$(x-a)[f''(x).f(x)-(f'(x))^2]+f'(x).f(x)\geq 0$$

Supposons qu'il existe x tel que $[f''(x).f(x)-(f'(x))^2]<0$.

Dans ce cas, pour x fixé, il serait possible de choisir une valeur de a assez voisine de moins l'infini pour que l'inégalité $(x-a)|f''(x).f(x)-(f'(x))^2|>f'(x).f(x)$ soit vérifiée, ce qui impliquerait pour une telle valeur de a l'inégalité $(x-a)[f''(x).f(x)-(f'(x))^2]+f'(x).f(x<0$, contrairement à ce que nous venons de démontrer. L'hypothèse $[f''(x).f(x)-(f'(x))^2]<0$ doit être rejetée. Nécessairement :

Pour tout réel x : $f''(x).f(x)-(f'(x))^2\geq 0.$

4.2.6. Nous avons vu que la nullité d'une fonction f absolument monotone sur $\mathbb{R}$ en un seul point implique le fait que f est identiquement nulle. Par contraposition, si f est une fonction absolument monotone sur $\mathbb{R}$ (donc, entre autres propriétés, positive ou nulle) non identiquement nulle, elle ne s'annule en aucun point. Elle est donc strictement positive sur $\mathbb{R}$.

De ce fait, la fonction g : $x\longmapsto g(x)=\ln(f(x))$ est légitimement définie sur $\mathbb{R}$.

- Sa dérivée première est la fonction définie par : $g'(x) = \frac{f\prime(x)}{f(x)}$.
- Sa dérivée deuxième est la fonction définie par : $g''(x) = \frac{f''(x).f(x)-(f\prime(x))^2)}{(f(x))^2}$. Compte tenu de la question précédente, il s'agit d'une fonction positive sur $\mathbb{R}$, ce qui est une condition suffisante de convexité.

La fonction g : $x \longmapsto g(x) = \ln(f(x))$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

4.3. Soit f absolument monotone sur $\mathbb{R}$ et telle que $f(0) = f'(0) = 1$.

Cette fonction n'est pas identiquement nulle, donc elle vérifie les hypothèses de la **question 4.** Elle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \longmapsto g(x) = \ln(f(x))$ est une fonction convexe sur $\mathbb{R}$.

Or, cette fonction est telle que : $g(0) = \ln\left(f(0)\right) = 0$ et : $g'(0) = \frac{f\prime(0)}{f(0)} = 1$

La fonction g étant convexe, sa courbe représentative est « au-dessus de ses tangentes », en particulier au-dessus de sa tangente en son point d'abscisse zéro, laquelle a pour équation l'équation $y = x$.

En d'autres termes : $g(x) = \ln\left(f(x)\right) \geq x$ quel que soit le réel *x*.

La fonction exponentielle conservant le sens des inégalités : $\ln\left(f(x)\right) \geq x \implies f(x) \geq \exp(x)$

Pour tout réel *x*, $f(x) \geq \exp(x)$.