CAPES 2026 à Bac+3. « Sujet zéro »

1 Le « sujet 0 » proposé par le jury du CAPES propose quatre exercices testant les connaissances générales des candidats. On note que ce sujet porte majoritairement sur le programme « postbac » et a bizarrement peu à voir, sauf peut-être l'exercice 4, avec les thèmes principaux des programmes de lycée.

On aurait pu s'attendre à au moins un exercice proche de ceux des « Olympiades de Première », ce n'est pas le cas. Ce qui montre que l'esprit d'initiative n'est pas évalué. En tout cas, pas dans ce sujet.

Polynômes.

1. Faux. Par exemple, le polynôme $P(X) = X^4 + 2X^2 + 1 = (X^2 + 1)^2$ est sans racine réelle et est pourtant non irréductible.

2. Faux. Le polynôme $P(X) = X^3 + 2X^2 + X = X(X + 1)^2$ admet zéro comme racine simple. S'il est le polynôme caractéristique d'une matrice, cette matrice admet une droite vectorielle de vecteurs propres associés à la valeur propre 0, c'est-à-dire un noyau non réduit au zéro. Elle n'est donc pas inversible.

Equations différentielles.

3. Vrai. L'équation différentielle est une équation linéaire du second ordre dont l'équation caractéristique associée est l'équation $r^2 + 2ar + a^2 = 0$. Cette équation a pour solution double le nombre réel strictement négatif $-a$. L'ensemble de ses solutions est l'ensemble des fonctions de la forme : $t \longmapsto f(t) = (\alpha t + \beta).\exp(-at)$. En raison de la stricte positivité du coefficient a, toutes ces fonctions ont une limite nulle en plus l'infini, selon les propriétés usuelles des exponentielles.

2

4. Faux. L'énoncé de l'assertion en jeu pose problème en raison de l'hypothèse « quel que soit *x* réel » car la fonction qui est coefficient de *y'* s'annule en zéro.

Considérons par exemple l'équation différentielle $x.y'(x) - y(x) = 0$. Cette équation a pour ensemble de solutions sur $]-\infty\,;0[$ la droite vectorielle formée par les fonctions de la forme $x \longmapsto \frac{k}{x}$ définies sur $]-\infty\,;0[$ et où *k* est une constante réelle. De même, elle a pour ensemble de solutions sur $]0\,;\,+\infty[$ la droite vectorielle formée par les fonctions de la forme $x \longmapsto \frac{k}{x}$ définies sur $]0\,;\,+\infty[$.

Sur $\mathbb{R}^*$, l'équation a pour ensemble de solutions les fonctions de la forme $x \longmapsto \frac{k_1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$ et $x \longmapsto \frac{k_2}{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$ (la constante peut ne pas être la même). Cet ensemble de solutions n'est pas une droite vectorielle.

Sur $\mathbb{R}$ en entier, une seule possibilité de raccordement, lorsque les constantes ci-dessus sont toutes les deux nulles. L'équation n'a pour solution sur $\mathbb{R}$ en entier que la fonction nulle. L'ensemble des solutions étant « réduit au zéro », ce n'est pas une droite vectorielle.

Raisonnements.

5. Faux. Il est exact que $\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P}$ puisque l'annulation universelle de tous les éléments de $\mathcal{F}$en un même point implique que chaque élément de $\mathcal{F}$ s'annule au moins une fois. Mais la réciproque est fausse.

Par exemple, si nous désignons par $\mathcal{F}$l'ensemble des fonctions de la forme $x \to f_a(x) = x - a$ avec *a* paramètre réel, chaque fonction f_a s'annule en un point, le point *a*, mais deux fonctions distinctes s'annulent en des points distincts. $\mathcal{F}$ vérifie $\mathcal{P}$ mais ne vérifie pas $\mathcal{Q}$.

6. Vrai. Car deux entiers sont congrus modulo 2 si et seulement s'ils ont la même parité et sur trois entiers naturels, deux au moins ont la même parité (d'après le « principe des tiroirs »).

Exercice 2 : Fonctions

3

1. La fonction *f* est définie et dérivable (donc continue) sur l'ensemble $]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ qui est une réunion de deux intervalles. En tant que fonction définie par une intégrale, la fonction *F* est définie pour toute valeur de *x* telle que l'intervalle fermé borné $[x\,;2x]$ est inclus ou bien dans l'intervalle $]0\,;1[$, ou bien dans l'intervalle $]1\,;+\infty[$, de façon que dans cet intervalle la fonction *f*, en tant que fonction continue, soit intégrable.

C'est-à-dire telle que ou bien $0 < x < 2x < 1$ ou bien $1 < x < 2x$, conditions qui équivalent au fait que ou bien *x* appartient à $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$ou bien *x* appartient à $]1\,;+\infty[$.

Le domaine de définition de *F* est l'ensemble $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[\,\cup\,]1\,;+\infty[$.

2.a. En tant que fonction continue sur l'intervalle $]0\,;1[$, la fonction *f* admet des primitives sur cet intervalle. Soit *P* l'une d'entre elles.

Une telle primitive a pour dérivée sur $]0\,;1[$ la fonction :$x \longmapsto P'(x) = f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$

2.b. Nous avons alors la relation : $F(x) = P(2x) - P(x)$. Et cela pour toute valeur de *x* appartenant à l'ensemble $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ (pas seulement sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$). Par dérivation :

$$F'(x) = 2P'(2x) - P'(x) = \frac{2}{\ln(2x)} - \frac{1}{\ln(x)} = \frac{2\ln(x) - \ln(2x)}{\ln(x)\,.\ln(2x)} = \frac{2\ln(x) - (\ln(x) + \ln(2))}{\ln(x)\,.\ln(2x)}$$
$$= \frac{\ln(x) - \ln(2)}{\ln(x)\,.\ln(2x)}$$

2.c. Rien ne change par rapport au **2.b** sauf l'intervalle dans lequel on se place, qui est maintenant l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

3. La fonction dérivée *F'* est négative sur l'ensemble $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[\cup\,]1\,;2]$ (ne s'annulant qu'en 2) et ensuite positive sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$. (ne s'annulant qu'en 2)

Il en résulte que la fonction *F* est strictement décroissante sur l'intervalle $\left]0\,;\frac{1}{2}\right[$, puis elle est aussi strictement décroissante sur l'intervalle $]1\,;2]$ puis elle est strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$.

4.a. Sur l'intervalle ouvert $]1\,;+\infty[$, la fonction logarithme népérien est strictement positive et strictement croissante. Sa fonction inverse, sur cet intervalle, est donc strictement positive et strictement décroissante.

Pour tout réel *x* de cet intervalle, l'inégalité 1implique que : $0<\frac{1}{\ln(2x)}<\frac{1}{\ln(x)}$ et de plus, pour tout réel *t* tel que $x\leq t\leq 2x$, la stricte croissance implique que $\frac{1}{\ln(2x)}\leq\frac{1}{\ln(t)}\leq\frac{1}{\ln(x)}$

Par intégration, le sens de ces inégalités est conservé :

$$\int_x^{2x}\frac{dt}{\ln(2x)}\leq\int_x^{2x}\frac{dt}{\ln(t)}\leq\int_x^{2x}\frac{dt}{\ln(x)}$$

$$\left[\frac{t}{\ln(2x)}\right]_x^{2x}\leq F(x)\leq\left[\frac{t}{\ln(x)}\right]_x^{2x}$$

Or : $[t]_x^{2x}=2x-x=x$.

Ce qui donne finalement la double inégalité :

$$\frac{x}{\ln(2x)}\leq F(x)\leq\frac{x}{\ln(x)}$$

4.b. La fonction *F* est encadrée par deux fonctions qui ont, toutes deux, pour limite plus l'infini en plus l'infini (d'après les théorèmes usuels de croissance comparée). La fonction *F* a donc (d'après le théorème des gendarmes) plus l'infini comme limite en plus l'infini.

4.c. Nous avons aussi la double inégalité :

$$\frac{1}{\ln(2x)} \leq \frac{F(x)}{x} \leq \frac{1}{\ln(x)}$$

La fonction $\frac{F(x)}{x}$ est encadrée par deux fonctions qui ont, toutes deux, pour limite zéro en plus l'infini.

5 La fonction $\frac{F(x)}{x}$ a donc (d'après le théorème des gendarmes) zéro comme limite en plus l'infini.

5.a. Nous pouvons écrire, de diverses façons :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t.\ln(t)} = [\ln(|\ln(t|))]_x^{2x} = \ln(|\ln(2x)| - \ln(|\ln(x)|) = \ln\left(\frac{|\ln(2x)|}{|\ln(x)|}\right) = \ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{|\ln(x)|}\right)$$

Lorsque *x* appartient à $]1\,;+\infty[$, son logarithme est strictement positif et la « valeur absolue » est inutile dans les formules précédentes. Sous la dernière forme, il apparaît que lorsque *x* appartient à $]1\,;+\infty[$, la limite au point 1 (on fait tendre *x* vers 1 par valeurs plus grandes que 1) de $\frac{\ln(2)}{\ln(x)}$ est plus l'infini et donc celle de ln $\left(1+\frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)$ est aussi plus l'infini.

5.b. Supposons que $1 < x$. Pour tout réel *t* tel que $1 < x \leq t \leq 2x$, nous pouvons écrire : $\frac{1}{t} \leq 1$ et en conséquence : $\frac{1}{t.\ln(t)} \leq \frac{1}{\ln(t)}$

Par intégration, le sens de l' inégalité est conservé :

$$\int_x^{2x} \frac{dt}{t.\ln(t)} \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t)}$$

$$\ln\left(1 + \frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right) \leq F(x)$$

La fonction *F* est minorée par une fonctions qui a pour limite plus l'infini au point 1.

La fonction *F* a elle-même pour limite plus l'infini au point 1.

5.c. Supposons que *x* appartienne à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$. Alors $0 < x < 2x < 1$ et on note que la fonction logarithme népérien est strictement négative sur $]0\,;1[$.

Notons aussi qu'une étude sommaire de la fonction $t \longmapsto t.\ln(t)$ définie sur $]0\,;1[$ montrerait que sur cet intervalle : $-1 < -\frac{1}{\mathrm{e}} < t.\ln(t) < 0$ et, en ce qui concerne les inverses, la relation $0 > \frac{1}{\ln(t)} > \frac{1}{t.\ln(t)}$

Lorsque *x* appartient à $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$, son logarithme, comme celui de $2x$ est strictement négatif. Sous la dernière forme, il apparaît que lorsque *x* appartient à $]1\,;+\infty[$, la limite au point 1 (on fait tendre *x* vers 1 par valeurs plus grandes que 1) de $\frac{\ln(2)}{\ln(x)}$ est plus l'infini et donc celle de ln $\left(1+\frac{\ln(2)}{\ln(x)}\right)$ est aussi plus l'infini.

6.a. Soit *x* un nombre réel appartenant à l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$. Pour tout réel *t* appartenant à l'intervalle $[x\,;2x]$ (intervalle qui est inclus dans l'intervalle $]0\,;1[$, et en raison de la stricte croissance du logarithme népérien sur son domaine de définition : $\ln(x) \leq \ln(t) \leq \ln(2x) < 0$

Par conséquent, les inverses sont rangés ainsi : $0 > \frac{1}{\ln(x)} \geq \frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{\ln(2x)}$

Par intégration, le sens de ces inégalités est conservé, et de façon assez semblable à ce qu'il se passe dans la question 4.a, on obtient :

$$0 > \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(2x)} \geq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(t)} \geq \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(x)}$$

$$0 > \left[\frac{t}{\ln(2x)}\right]_x^{2x} \geq F(x) \geq \left[\frac{t}{\ln(x)}\right]_x^{2x}$$

Or : $[t]_x^{2x} = 2x - x = x$.

Ce qui donne finalement les inégalités :

$$0 > \frac{x}{\ln(2x)} \geq F(x) \geq \frac{x}{\ln(x)}$$

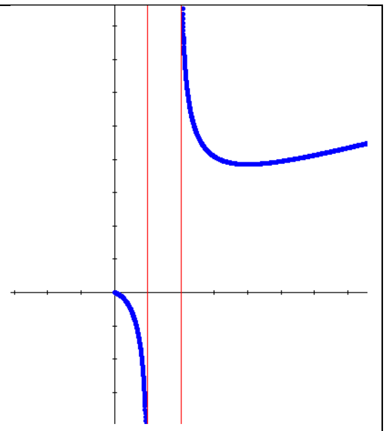
6.b. La fonction *F* est encadrée, dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$, par deux fonctions qui ont pour limite zéro en zéro. Elle a donc elle-même pour limite zéro en zéro. Elle a une limite finie en zéro, elle est donc prolongeable par continuité en zéro. Ceci à condition de poser : $F(0) = 0$.

De plus,

$$0 > \frac{1}{\ln(2x)} \geq \frac{F(x)}{x} \geq \frac{1}{\ln(x)}$$

La fonction $\frac{F(x)}{x}$ est encadrée, dans l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{1}{2}\right[$, par deux fonctions qui ont pour limite zéro en zéro. Le prolongement par continuité en zéro de *F* est dérivable en zéro et a pour nombre dérivé zéro en zéro. La courbe représentative de *F* aura l'axe *Ox* pour tangente à l'origine.

7. Une idée approximative du tracé de la courbe



8. Il est facile de montrer que pour tout réel *t* de l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, $\frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t}$.

Par exemple, une étude de variations sur $[2\,;\,+\infty[$ de la fonction $t \longmapsto u(t) = t - \ln(t)$, dont la dérivée est la fonction $t \longmapsto 1 - \frac{1}{t}$, strictement positive sur $[2\,;\,+\infty[$, montre que *u* est une fonction strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$ à partir du réel strictement positif $2 - \ln(2)$. La fonction *u* est donc strictement positive sur $[2\,;\,+\infty[$, ce qui implique l'inégalité $\frac{1}{\ln(t)} \geq \frac{1}{t}$ sur cet intervalle.

Dès lors, pour tout réel *x* de l'intervalle $[2\,;\,+\infty[$, $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)} \geq \int_2^x \frac{dt}{t} = \ln(x) - \ln(2)$ l'intégrale $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ est minorée par une intégrale divergente vers plus l'infini, elle est elle-même divergente.

L'énoncé nous conduit vers une résolution plus alambiquée.

8.a. L'intégrale $\int_2^x \varphi(t).\,dt$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_2^x \varphi(t).\,dt\right)$ existe et est finie.

Soit $S = \int_2^{+\infty} \varphi(t).\,dt$ cette limite finie.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_2^x \varphi(t).\,dt\right) = S \iff \lim_{x\to+\infty}\left(S - \int_2^x \varphi(t).\,dt\right) = 0$$

Or :

$$S - \int_2^x \varphi(t).dt = \int_2^{+\infty} \varphi(t).dt - \int_2^x \varphi(t).dt = \int_x^{+\infty} \varphi(t).dt$$

On en déduit :

$\int_2^x \varphi(t).dt$ est convergente si et seulement si $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_x^{+\infty} \varphi(t).dt\right) = 0$.

8.b. $\int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t).dt = \int_2^{v(x)} \varphi(t).dt - \int_2^{u(x)} \varphi(t).dt.$

Le théorème de composition des limites s'applique et s'énonce ainsi dans ce cas :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_2^{u(x)} \varphi(t).dt\right) = \int_2^{\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)} \varphi(t).dt = \int_2^{+\infty} \varphi(t).dt = S$$

De même :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_2^{v(x)} \varphi(t).dt\right) = \int_2^{\lim\limits_{x\to+\infty} v(x)} \varphi(t).dt = \int_2^{+\infty} \varphi(t).dt = S$$

La limite d'une différence s'applique :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t).dt\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_2^{v(x)} \varphi(t).dt\right) - \lim_{x\to+\infty}\left(\int_2^{u(x)} \varphi(t).dt\right) = S - S = 0$$

Si l'intégrale $\int_2^x \varphi(t).dt$ est convergente et si les fonctions *u* et *v* ont pour limite plus l'infini en plus l'infini, alors $\int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t).dt$ tend vers zéro quand *x* tend vers plus l'infini.

8.c. En considérant les fonctions définies par : $u(x) = x$ et $v(x) = 2x$, qui ont pour limite plus l'infini en plus l'infini, et la fonction phi définie par $\varphi(t) = \frac{1}{\ln(t)}$, les questions précédentes établissent que dans le cas de cette fonction phi, la fonction définie par l'intégrale $\int_{u(x)}^{v(x)} \varphi(t).dt$ n'a pas pour limite zéro en plus l'infini (d'après l'étude faite, elle est au moins égale à $\int_2^4 \frac{1}{\ln(t)}.dt$ qui est strictement positif). Ainsi, d'après la contraposée du théorème démontré au 8.b, l'intégrale n'est, dans notre contexte, pas convergente.

Exercice 3 : Complexes etc…

1. $\exp\left(i\frac{\theta}{2}\right) = \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\right) \iff \exp(i\theta) = 1 \iff \theta \equiv 0 \ (2\pi)$.

Or l'ensemble des nombres réels qui sont congrus à 0 modulo 2π est l'ensemble $2\pi\mathbb{Z}$.

2. Soit *u* un nombre réel et soit *z* le nombre complexe : $z = \exp(iu) - 1 = \cos(u) - 1 + i.\sin(u)$

Compte tenu des identités : $\cos(u) = 1 - 2.\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)$ et $\sin(u) = 2.\cos\left(\frac{u}{2}\right).\sin\left(\frac{u}{2}\right)$, on obtient la relation :

$$z = \exp(iu) - 1 = -2.\sin^2\left(\frac{u}{2}\right) + i.2.\cos\left(\frac{u}{2}\right).\sin\left(\frac{u}{2}\right) = 2.\sin\left(\frac{u}{2}\right).\left(-\sin\left(\frac{u}{2}\right) + i.\cos\left(\frac{u}{2}\right)\right)$$

Ainsi nous obtenons l'identité :

$$\exp(iu) - 1 = 2.\sin\left(\frac{u}{2}\right).\exp\left(i.\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

.

2.a. E_n est la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique de terme initial 1 et de raison $\exp(i.\theta)$.

Lorsque θ n'appartient pas à l'ensemble $2\pi\mathbb{Z}$, la raison $\exp(i.\theta)$ de cette suite géométrique est distincte de 1 et on peut appliquer l'identité usuelle $1 + q + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$, légitime pour $q \neq 1$.

De ce fait :

$$E_n = \frac{1 - \exp\,(i(n+1)\theta)}{1 - \exp\,(i\theta)}$$

En appliquant l'identité du préalable, aussi bien au numérateur qu'au dénominateur :

$$E_n = \frac{2.\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right).\exp\left(i.\left(\frac{(n+1)\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right)}{2.\sin\left(\frac{\theta}{2}\right).\exp\left(i.\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

$$E_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\exp\left(i.\left(\frac{(n+1)\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-i.\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Finalement :

$$E_n = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\exp\left(i.\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right)$$

2.b. Nous avons affaire dans cette question à la partie réelle et à la partie imaginaire du nombre complexe $\frac{E_n}{n}$ car, par construction, $E_n = n(S_n + i.T_n)$.

$$S_n = \frac{1}{n} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

$$T_n = \frac{1}{n} \times \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)$$

2.c. Les deux nombres réels S_n et T_n sont, aussi bien l'un que l'autre, majorés en valeur absolue par le nombre réel $\frac{1}{n.\left|sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}$.

Les suites (S_n) et (T_n) sont majorées en valeur absolue par la suite $\left(\frac{1}{n.\left|sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|}\right)$ qui est une suite convergente vers zéro. Donc, elles convergent elles-mêmes vers zéro.

3. Si θ appartient à l'ensemble $2\pi\mathbb{Z}$, pour tout entier *n* strictement positif, $S_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, la suite de ces nombres converge vers 1, et $T_n = 0$.

4. La matrice de l'application $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} r_k$ est la matrice $\begin{pmatrix} S_n & -T_n \\ T_n & S_n \end{pmatrix}$ qui, d'après ce qui précède, converge vers la matrice nulle lorsque *n* tend vers plus l'infini. Lorsqu'on applique ces transformations à un vecteur donné *x*, on obtient une suite de vecteurs qui converge vers le vecteur nul.

5. L'axe d'une rotation de l'espace est l'ensemble de ses vecteurs invariants. La restriction d'une rotation d'axe *D* à cet axe est l'identité. En vertu de la question 3, si *x* est un vecteur de *D*, l'image de *x* par $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} r_k$ est le vecteur $\frac{n+1}{n}x$.

La suite des vecteurs images converge vers le vecteur *x* lui-même.

6. Tout vecteur *x* de l'espace se décompose en somme d'un vecteur x_D appartenant à l'axe *D* et d'un vecteur x_P appartenant au plan *P* orthogonal à *D*, plan qui est globalement invariant par *r*.

L'image par *r* du vecteur *x* est le vecteur : $r(x) = x_D + r(x_P)$ et l'image $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} r_k$ de ce même vecteur *x* est le vecteur : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} x_D + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} r_k\,(x_P)$ c'est-à-dire $\frac{n+1}{n} x_D + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} r_k\,(x_P)$.

La suite des vecteurs $\frac{n+1}{n} x_D$ converge vers x_D et la suite des vecteurs $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} r_k\,(x_P)$ converge vers le vecteur nul.

La suite des images du vecteur *x* par $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} r_k$ converge vers le vecteur x_D

.

Exercice 4 : Probabilités

1.a. S'il n'y a qu'un seul lancer, il est certain qu'il n'y a qu'une seule série de mêmes résultats consécutifs. $\boldsymbol{N_1}$ ne prend que la valeur 1 avec la probabilité 1 et a pour espérance 1.

.

1.b. S'il y a deux lancers, les séquences possibles sont *PP, PF, FP, FF*. La variable N_2 prend la valeur 1 avec la probabilité $p^2 + q^2$ et la valeur 2 avec la probabilité $2pq$.

Son espérance est $(p^2 + q^2\ ) + 2 \times (2pq) = (p + q)^2 + 2pq = 1 + 2pq.$

2. S'il y a *n* lancers, la séquence de lancers obtenue est formée de *n* éléments. Le nombre de séries consécutives peut aller de 1 (lorsque la séquence n'est formée que d'une même lettre) jusqu'à *n* (lorsqu'il y a alternance de lettres).

Parmi les $\boldsymbol{2^n}$ séquences possibles, deux réalisent l'évènement « $\boldsymbol{N_n = 1}$ » (les séquences *PP…P* et *FF…F*) de probabilités respectives $\boldsymbol{p^n}$et $\boldsymbol{q^n}$deux autres réalisent l'évènement « $\boldsymbol{N_n = n}$ » (les séquences *PFPF…* et *FPFP…*).

Nous en déduisons que $\boldsymbol{P(N_n = 1) = p^n + q^n}$.

Quant à l'expression de $\boldsymbol{P(N_n = n)}$, elle dépend de la parité de *n*.

- Si *n* est pair, de la forme $\boldsymbol{n = 2k}$, il y a autant de « pile » que de « face » en cas d'alternance. Dans ce cas, $\boldsymbol{P(N_{2k} = 2k) = 2p^k q^k}$.
- Si *n* est impair, de la forme $\boldsymbol{n = 2k + 1}$, en cas d'alternance la séquence alternée se termine par la même lettre que celle qui la commence, il y a un « pile » de plus ou un « face » de plus . Dans ce cas, $\boldsymbol{P(N_{2k+1} = 2k + 1) = p^{k+1}q^k + p^k q^{k+1} = p^k q^k (p + q) = p^k q^k}$.

3. Dérivons la fonction G_k. Par additivité de la dérivation :

$$G'_k(t) = \sum_{i=1}^{n} P(N_k = i) \times (i.t^{i-1})$$

Pour $k < i \leq n$, nous avons des probabilités nulles : $P(N_k = i) = 0$, car la variable N_k ne prend aucune valeur strictement supérieure à *k*. Il est possible de limiter la sommation en allant jusqu'à l'indice *k* seulement :

$$G'_k(t) = \sum_{i=1}^{k} P(N_k = i) \times (i.t^{i-1})$$

Pour la valeur $t = 1$, nous obtenons l'expression :

$$G'_k(1) = \sum_{i=1}^{k} i \times P(N_k = i)$$

Ce qui est exactement l'expression de l'espérance de la variable aléatoire N_k.

4. Remarquons que $P_k = (P_k \cap P_{k-1}) \cup (P_k \cap F_{k-1})$ et considérons les effets des évènements en jeu :

Lorsque $P_k \cap P_{k-1}$ est réalisé, la série de lancers en cours se prolonge et $N_k = N_{k-1}$.

Lorsque $P_k \cap F_{k-1}$ est réalisé, la série de lancers précédente est terminée et une nouvelle série commence, dans ce cas $N_k = N_{k-1} + 1$.

Considérons maintenant l'évènement $(N_k = i) \cap P_k = (N_k = i) \cap [(P_k \cap P_{k-1}) \cup (P_k \cap F_{k-1})]$.

$(N_k = i) \cap (P_k \cap P_{k-1})$ est réalisé si et seulement si $N_{k-1} = i$ et une série en cours continue.

$(N_k = i) \cap (P_k \cap F_{k-1})$ est réalisé si et seulement si $N_{k-1} = i - 1$ et une nouvelle série en cours continue.

Ainsi : $(N_k = i) \cap P_k = [(N_{k-1} = i) \cap (P_k \cap P_{k-1})] \cup [(N_{k-1} = i - 1) \cap (P_k \cap F_{k-1})]$

Or : $P[(N_{k-1} = i) \cap (P_k \cap P_{k-1})] = P[(N_{k-1} = i) \cap P_{k-1}] \times P(P_k) = \frac{1}{2} \times P[(N_{k-1} = i) \cap P_{k-1}]$.

Et de même :

$$P[(N_{k-1} = i) \cap (P_k \cap F_{k-1})] = P[(N_{k-1} = i - 1) \cap P_{k-1}] \times P(F_k)$$

$$= \frac{1}{2} \times P[(N_{k-1} = i - 1) \cap F_{k-1}]$$

On en déduit :

$P[(N_k = i) \cap P_k] = \frac{1}{2} \times P[(N_{k-1} = i) \cap P_{k-1}] + \frac{1}{2} \times P[(N_{k-1} = i - 1) \cap F_{k-1}]$.

5.a. Les évènements P_k et F_k sont des évènements complémentaires. De ce fait :

$(N_k = i) = [(N_k = i) \cap P_k] \cup [(N_k = i) \cap F_k]$ et en termes de probabilités :

$P(N_k = i) = P[(N_k = i) \cap P_k] + P[(N_k = i) \cap F_k]$.

Appliquons les deux résultats de la question précédente :

$$P(N_k = i) = \frac{1}{2} \times P[(N_{k-1} = i) \cap P_{k-1}] + \frac{1}{2} \times P[(N_{k-1} = i-1) \cap F_{k-1}]$$
$$+ \frac{1}{2} \times P[(N_{k-1} = i) \cap F_{k-1}] + \frac{1}{2} \times P[(N_{k-1} = i-1) \cap P_{k-1}].$$

Or : $P[(N_{k-1} = i) \cap P_{k-1}] + P[(N_{k-1} = i) \cap F_{k-1}] = P(N_{k-1} = i)$ car les évènements P_{k-1} et F_{k-1} sont des évènements complémentaires et pour la même raison :

$P[(N_{k-1} = i-1) \cap P_{k-1}] + P[(N_{k-1} = i-1) \cap F_{k-1}] = P(N_{k-1} = i-1)$.

Par conséquent :

$$P(N_k = i) = \frac{1}{2} \times P(N_{k-1} = i) + \frac{1}{2} \times P(N_{k-1} = i-1).$$

5.b. Appliquons cette formule dans l'expression de la fonction génératrice :

$$G_k(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2} \times P(N_{k-1} = i) + \frac{1}{2} \times P(N_{k-1} = i-1)\right) \times t^i$$

En séparant en deux la sommation :

$$G_k(t) = \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^{n} (P(N_{k-1} = i)) \times t^i + \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^{n} (P(N_{k-1} = i-1)) \times t^i$$

Par une changement d'indexation dans la deuxième somme (en notant $i - 1 = i$):

$$G_k(t) = \frac{1}{2} \times G_{k-1}(t) + \frac{1}{2} \times \sum_{i=0}^{n-1} (P(N_{k-1} = i)) \times t^{i+1}$$

Or, $P(N_{k-1} = 0) = P(N_{k-1} = n) = 0$. Il n'y aucune modification sur la deuxième somme si l'on effectue la sommation de l'indice 1 à l'indice *n*.

$$\sum_{i=0}^{n-1} (P(N_{k-1} = i)) \times t^{i+1} = t \times \sum_{i=1}^{n} (P(N_{k-1} = i)) \times t^i = t \times G_{k-1}(t).$$

$$G_k(t) = \frac{t+1}{2} \times G_{k-1}(t).$$

5.c. Sachant que $G_1(t) = t$, la relation $G_k(t) = t \times \left(\frac{t+1}{2}\right)^{k-1}$ se démontre par récurrence évidente.

Cette relation s'écrit, de façon équivalente : $G_k(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times t \times (t+1)^{k-1}$

6.a. Dérivons l'expression de $G_k(t)$ que nous avons obtenue :

$$G'_k(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^{k-1} + t \times \frac{k-1}{2^{k-1}}(t+1)^{k-2}$$

En particulier :

$$E(N_k) = G'_k(1) = 1 + \frac{k-1}{2} = \frac{k+1}{2}$$

6.b. Développons l'expression de $G_k(t)$ en utilisant la formule du binôme :

$$G_k(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times t \times \sum_{j=0}^{j=k-1} \binom{k-1}{j} t^j = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \sum_{j=0}^{j=k-1} \binom{k-1}{j} t^{j+1}$$

En modifiant l'indexation (en posant $i = j + 1$), on obtient :

$$G_k(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \sum_{i=1}^{i=k} \binom{k-1}{i-1} t^i$$

En identifiant les coefficients de ce polynôme avec ceux de la définition de $G_k(t)$:

$$P(N_k = i) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \times \binom{k-1}{i-1}$$