Ecrit 2 Mayotte-2025.

Problème 1 : Vrai / Faux

1. Faux. Contre-exemple : $\frac{3}{5} = 0{,}6$ est un décimal et son inverse $\frac{5}{3}$ n'en est pas un. (On appelle qu'un rationnel est décimal si et seulement si le dénominateur de sa forme irréductible n'a comme facteurs premiers que des 2 ou des 5).

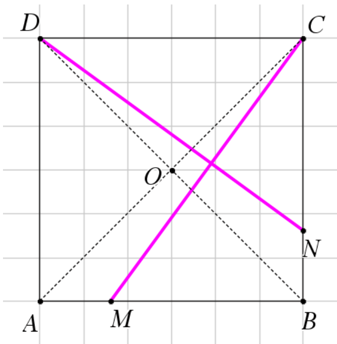
2. Faux. Le volume d'un cylindre est proportionnel au carré de son rayon.

3. Vrai. Car le produit des deux nombres est égal à 1.

4. Faux. Ce sont les réels de l'ensemble $[-3\,;\ -2] \cup [2\,;3]$.

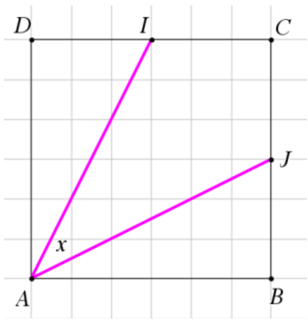
5. Faux. Contre-exemple : $x = -\frac{1}{2}$. Son opposé est strictement plus grand que son carré.

6. Vrai. Soit *O* le centre du carré. On peut supposer le carré *ABCD* direct. La rotation de centre *O* et d'angle droit direct laisse le carré globalement invariant, transforme *A* en *B, B* en *C* et *C* en *D*. Cette rotation transforme le segment [*AB*] et [*BC*] et p uisque $AM = CN$, l'image de *M* est *N*. La droite (*MC*) a pour image (*ND*) et l'angle qu'elles déterminent est égal à l'angle de la rotation. C'est donc un angle droit.



7. Faux. Car $BD = AB - AD = 35 - 21 = 14$ et le triangle *ADE* étant une réduction de *ABC* de rapport $\frac{21}{35} = \frac{3}{5}$, s $DE = \frac{3}{5}BC = \frac{63}{5} = 12{,}6$.

8. Vrai. Désignons par *a* le côté du carré (peu importe que ce soit 2) et par *x* une mesure de l'angle en jeu.



D'une part $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = a^2$ car :

$$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ} = \left(\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right).\left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB}$$

D'autre part $\|\overrightarrow{AI}\| = \|\overrightarrow{AJ}\| = a\frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$\cos(x) = \frac{\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AJ}}{\|\overrightarrow{AI}\|.\|\overrightarrow{AJ}\|} = \frac{4}{5}$$

9. Vrai. Car si les deux angles sont complémentaires, le sinus de l'un est égal au cosinus de l'autre.La somme des carrés de leurs sinus reconstitue la relation $cos^2 + sin^2 = 1$ fondamentale de la trigonométrie.

10. Vrai. Car $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w}) \implies \vec{u}.\vec{v} - \vec{u}.\vec{w} = 0$ et $\vec{v} \perp (\vec{u} - \vec{w}) \implies \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{w} = 0$.

Si les deux orthogonalités sont vérifiées en même temps : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w} = \vec{v}.\vec{w}$, ce qui implique que $\vec{w}.(\vec{v} - \vec{u}) = 0$, c'est-à-dire que $\vec{w} \perp (\vec{v} - \vec{u})$.

11. Vrai. Car si *s* est l'une des deux solutions opposées, pour tout réel *x* :

$ax^2 + bx + c = (x - s)(x + s) = ax^2 - a.s^2$. Les deux polynômes étan identiques, leurs formes développées ont les mêmes coefficients et, en particulier, le coefficient de *x* est nul.

12. Vrai. Les deux fonctions prennent la même valeur en zéro (la valeur -1) et ont pour dérivées les fonctions définies par : $f'(x) = 3x^2 + 3$ et $g'(x) = x^2\cos(x) + (2x + 1).\sin(x) + 3$.

En zéro, les nombres dérivés sont les mêmes (le nombre dérivé en zéro est égal à 3).

Puisque $\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases}$, les courbes ont la même tangente en leur point d'abscisse zéro.

13. Faux. Cette fonction est définie sur $]1\,;\,+\infty[$ (il faut que $\ln(x)$ soit strictement positif).

14.Vrai. Car $\binom{20}{10} = \frac{20!}{10!.10!} = \frac{20}{10} \times \frac{19!}{9!.10!} = 2 \times \binom{19}{10}$.

15. Vrai. Puisqu'on se fiche du résultat du premier tirage.

16. Vrai. La variable aléatoire X prend les valeurs 0 et 2, chacune avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

17.Vrai. La probabilité qu'Axel ait au plus une réponse correcte est : $\left(\frac{3}{4}\right)^4 + 4 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{189}{256}$. La probabilité de l'évènement contraire est $1 - \frac{189}{256} = \frac{67}{256} > \frac{64}{256} \; (= \frac{1}{4})$.

18. Faux. Peu importe que l'objet ait 15 ans car la loi exponentielle est une loi sans mémoire. S'il dure depuis 15 ans, la probabilité qu'il tombe en panne dans les 5 ans qui suivent est la même que celle qu'un objet neuf dure moins de 5 ans. C'est $1 - \exp(-5 \times 0{,}25)$ soit 0,71 au centième près.

19. Faux. Contre-exemple : 3 et 4 divisent 12, mais leur somme 7 n'est pas un diviseur de 12.

20. Vrai. Car tout entier naturel a la même parité que son carré et que la somme et la différence de deux nombres de même parité est un nombre pair. Il ne peut pas y avoir ni un seul carré impair, ni 3 carrés impairs. Il y a ou bien deux, ou bien aucun carré impair, donc ou bien aucun nombre impair ou bien deux parmi les entiers *x, y z*.

Problème 2 : Géométrie de l'espace

1.Le point *D* appartient au deux plans (*AEH*) et (*BGD*) tandis que le point *B* appartient au plan (*BGD*) mais non pas au plan (*AEH*) : Les deux plans ne sont ni confondus, ni d'intersection vide. Donc ils ne sont pas parallèles.

2. Les côtés du triangle *BGD* sont des diagonales de faces (faces qui sont isométriques). Ce triangle est un triangle équilatéral.

3.a. Oui, le triangle *CDE* est rectangle car l'arête (*CD*) du cube est perpendiculaire à la face (*ADE*i. Cette arête est orthogonale à toutes les droites du plan (*ADE*) donc, en particulier, à la droite (*DE*). L'angle de sommet *D* du triangle *CDE* est un angle droit.

3.b. Non, ces droites ne sont pas orthogonales car le triangle *DBE* est équilatéral (pour la même raison qu'à la question 2). Les angles de ce triangle ont pour mesure 60°.

3.c. Dans le cube, les segments [*FD*] et [*AG*] sont deux des quatre « grandes diagonales » du cube (joignant deux sommets opposés). La symétrie centrale de centre le centre *O* du cube échange deux à deux ces commets opposés. Les quatre grandes diagonales du cube sont donc concourantes au centre du cube. Les segments [*FD*] et [*AG*] en particulier sont sécants en leur milieu et le quadrilatère *ADGF* constitue l'intersection du plan (*ADF*) avec le cube. Or ce quadrilatère est un rectangle dont la longueur est la diagonale d'une face et la largeur une arête du cube. Ce rectangle n'étant pas un carré, ses arêtes ne sont pas perpendiculaires. Les droites (*FD*) et (*AG*) ne sont pas orthogonales.

Problème 3 : Suites

1.a. Calcul des premiers termes de la suite avec un algorithme Python.

```
>>> def suitemayo():
        u=0
        for n in range(0,5):
                print("Le terme numéro",n,"est :",u)
                u=4*u-9*n+6

>>> suitemayo()
Le terme numéro 0 est : 0
Le terme numéro 1 est : 6
Le terme numéro 2 est : 21
Le terme numéro 3 est : 72
Le terme numéro 4 est : 267
>>> |
```

1.b. Une suite est arithmétique si et seulement si la différence de deux termes consécutifs es une constante.

Nous remarquons que :

$$u_2 - u_1 = 15 \neq u_1 - u_0$$

Ce contre-exemple montre que la suite n'est pas arithmétique.

1.c. Montrons, à l'aide d'une démonstration par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$: « Le terme u_n est un entier multiple de 3 » est vérifiée pour tout entier *n*.

Initialisation : Le terme de rang zéro est $u_0 = 0$. Il s'agit bien d'un entier multiple de 3. La propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que pour un certain entier naturel *n* la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée, c'est-à-dire supposons qu'il existe un entier relatif k_n tel que $u_n = 3.k_n$. Exprimons le terme suivant :

$$u_{n+1} = 4u_n - 9(n+1) + 6 = 12k_n - 9(n+1) + 6 = 3 \times (4k_n - 3n - 1)$$

Le terme u_{n+1} est bien un multiple de 3, de la forme $u_{n+1} = 3.k_{n+1}$ avec $k_{n+1} = 4k_n - 3n - 1$ (entier relatif car cocktail multiplicatif et additif d'entiers relatifs).

Nous avons démontré que $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

Conclusion : Etant initialisée au rang zéro e héréditaire, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pour tout entier naturel *n*.

Pour tout entier naturel *n* le terme u_n est un entier multiple de 3.

2. Forme explicite

2.a. Pour tout entier naturel *n* :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3(n+1) + 1 = (4u_n - 9n + 6) - 3(n+1) + 1 = 4u_n - 12n + 4$$

$$v_{n+1} = 4(v_n + 3n - 3) - 12n + 4 = 4v_n$$

Le relation de récurrence entre deux termes consécutifs est celle d'une suite géométrique de raison 4. D'autre part, $v_0 = 1$.

La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 4.

Sa formule explicite est $v_n = 4^n$ et donc : $u_n = v_n + 3n - 1 = 4^n + 3n - 1$

3. Propriété « caractéristique » (sic).

3. Nous rappelons que la somme et la différence de deux entiers de même parité sont des entiers pairs et que la somme et la différence de deux entiers de parités différentes sont des entiers impairs.

Nous rappelons aussi qu'un produit de deux entiers est impair si et seulement si chacun des deux entiers est un nombre impair.

$\Longrightarrow$: Supposons que u_n soit pair. Alors $3n = u_n - (4^n - 1)$ est la différence d'un nombre pair et d'un nombre impair. Donc 3*n* est impair, et il en est de même de *n* lui-même. Ce qui démontre l'implication « u_n pair $\Longrightarrow$ *n* impair ».

$\Longleftarrow$: Supposons que *n* soit impair. Le nombre $(3n - 1)$ est pair et $u_n = 4^n + (3n - 1)$ est la somme de deux nombres pairs, c'est un nombre pair. Ce qui démontre l'implication « *n* impair $\Longrightarrow$ u_n pair ».

Par une double implication nous avons démontré l'équivalence : « u_n pair $\Longleftrightarrow$ *n* impair ».

Quant à affirmer que cette propriété « caractérise » la suite (u_n), c'est carrément exagéré. Nous n'y adhérons pas, en aucune façon.

4. Comportement de la suite (u_n).

4.a. La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est la somme de deux suites strictement croissantes, en l'occurrence la suite géométrique (4^n) et la suite arithmétique $(3n - 1)$. Elle est donc strictement croissante.

4.b. La suite $(\boldsymbol{u_n})$ est la somme de deux suites divergeant vers plus l'infini, en l'occurrence la suite géométrique (4^n) et la suite arithmétique $(3n - 1)$. Elle diverge elle-même vers plus l'infini.

La seule propriété de divergence vers plus l'infini assure par définition de cette divergence que, quel que soit le réel S, il existe un entier n_S tel que $n \geq n_S \implies u_n > S$. L'ensemble des entiers n qui vérifient $u_n > S$ est donc non vide.

La propriété de croissante justifie que, dès qu'on atteint le plus petit élément de l'ensemble non vide précédent, tous les termes d'indices supérieurs vérifient $u_n > S$. Le premier entier vérifiant $u_n > S$ est l'entier n_S et tous les termes suivants vérifient l'inégalité.

4.c et d. Un algorithme Python répond à ces questions. Etant donné un seuil s, ce algorithme affiche le premier terme au-dessus du seuil et le dernier terme au-dessous.

```
>>> def seuil(s):
        n=0
        u=0
        while u<=s:
                n=n+1
                u=4**n+3*n-1
        print("Le terme de rang",n,"est :",u)
        print("Le terme de rang",n-1,"est :",4**(n-1)+3*n-4)


>>> seuil(50)
Le terme de rang 3 est : 72
Le terme de rang 2 est : 21
>>> seuil(250)
Le terme de rang 4 est : 267
Le terme de rang 3 est : 72
>>> seuil(10**9)
Le terme de rang 15 est : 1073741868
Le terme de rang 14 est : 268435497
>>>
```

Problème 4 : Fonctions

Nous en proposons délibérément une étude lapidaire, étant donné qu'une banale calculatrice fournit les principales réponses. Nous ne pensons pas que des questions d'ordre calculatoire soient, pour une évaluation CAPES judicieuse, d'un intérêt majeur.

Partie A. Etude mathématique

1. Les principaux calculs demandés, sans grand intérêt au demeurant, sont pris en charge par TI Nspire.

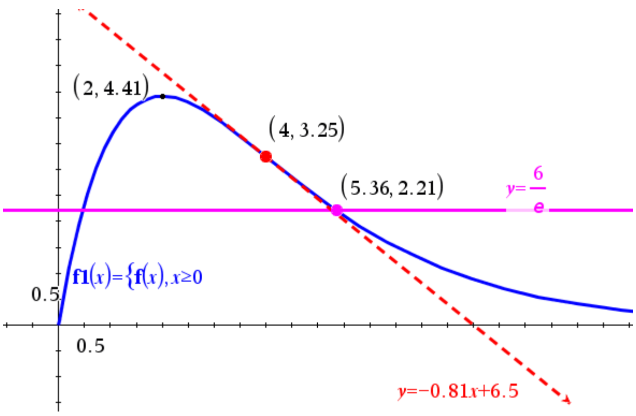
Il apparaît que la fonction f est maximale en 2, strictement croissante sur $[0\ ;2]$ et strictement décroissante sur $[2\ ;\ +\infty[$.

Elle est convexe sur $[0\ ;4]$ et concave sur $[4\ ;\ +\infty[$. Il y a une inflexion en 4.

Define $f(x)=6\cdot x\cdot e^{\frac{}{2}}$	
$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))$	0
$\left\{\frac{d}{dx}(f(x)),\frac{d^2}{dx^2}(f(x))\right\}$	$\left\{(6-3\cdot x)\cdot e^{\frac{-x}{2}},\left(\frac{3\cdot x}{2}-6\right)\cdot e^{\frac{-x}{2}}\right\}$
$\{f(2),f(4)\}$	$\{12\cdot e^{-1},24\cdot e^{-2}\}$
$\{f(2),f(4)\}$	$\{4.41455,3.24805\}$
$\frac{6}{e}$	2.20728
$f(5)$	2.46255
$f(6)$	1.79233
$f(5.36)$	2.20499
$f(5.35)$	2.21191

3. La fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, prend la valeur $\frac{12}{e}$ et a pour limite zéro en plus l'infini. Elle réalise une bijection de l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ sur l'intervalle image $\left]0\ ;\ \frac{12}{e}\right]$. En particulier, f prend sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$ une fois et une seule la valeur intermédiaire $\frac{6}{e}$. Nous pouvons localiser la valeur α dont l'image est $\frac{6}{e}$ entre 5 et 6 puis plus finement entre 5,35 et 5,36. Une valeur approchée de α au centième près par excès est 5,36.

Nous avons un petit peu décoré la représentation graphique avec le point d'inflexion et sa tangente, ainsi qu'avec un point d'ordonnée égale à la moitié du maximum.



5. Dès lors que l'énoncé nous donne le résultat, déléguons les calculs à TI-Nspire. L'intégrale calculée représente « l'aire sous la courbe ». Dans ce contexte, cette intégrale représente la quantité de médicament absorbée de l'instant zéro à l'instant *A*.

$\int f(x)\,dx$	$-12\cdot(x+2)\cdot e^{\frac{-x}{2}}$
$\int_0^a f(x)\,dx$	$12\cdot e^{\frac{-a}{2}}\cdot\left(2\cdot e^{\frac{a}{2}}-a-2\right)$
$\lim\limits_{a\to\infty}\left(12\cdot e^{\frac{-a}{2}}\cdot\left(2\cdot e^{\frac{a}{2}}-a-2\right)\right)$	24

Partie B. Application

1. La concentration maximale dans le sang est celle de l'instant 2. Elle est égale à $\frac{12}{e}$ soit 4,41au centième près (en milligrammes par litre).

2. La demi-vie est la valeur alpha, soit 5,36 h (5 heures et 22 minutes à une minute près).

3. La vitesse d'élimination correspond à la valeur absolue de la dérivée de f. Elle a un sens dans la phase de décroissance (lorsque $x \geq 2$).

Define $f(x)=6\cdot x\cdot e^{\frac{-x}{2}}$	*Terminé*
$f(4)$	$24\cdot e^{-2}$
$f(4)$	3.24805
$\frac{d}{dx}(f(x))\vert x=4$	$-6\cdot e^{-2}$
$\frac{d}{dx}(f(x))\vert x=4$	-0.812012

Cette vitesse d'élimination est maximale à l'inflexion, quand $x = 4$ et ce maximum vaut $\frac{6}{e^2}$ (soit 0,81 au centième près comme l'indique la calculatrice).

4. La quantité de médicament qui est passée par l'organisme est égale à 24 milligrammes par litre de sang.