Ecrit 1 Mayotte-2025.

Problème 1 : Codage et décodage

Partie A : Equation diophantienne

1. En remarquant que $17 \times 3 = 51$ et que $26 \times 2 = 52$, nous obtenons que :

$$17 \times (-3) - 26 \times (-2) = 1$$

Le couple $(-3\ ;\ -2)$ est une solution particulière de (E).

2. Nous savons que la solution générale d'une équation diophantienne non homogène est la somme d'une solution particulière de cette équation et de la solution générale de l'équation homogène associée, en l'occurrence l'équation $17x - 26y = 0$.

Cette équation homogène admet comme ensemble de solutions l'ensemble : $\{(26k\ ; 17k)\ ; k \in \mathbb{Z}\}$.

L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble S des couples $(u\ ; v)$ d'entiers relatifs :

$$S = \{(u = 26k - 3\ ; v = 17k - 2)\ ; k \in \mathbb{Z}\}.$$

3. Pour tout entier relatif k : $0 \leq 26k - 3 < 26 \iff \frac{3}{26} \leq k < \frac{29}{26}$. Or, l'intervalle $\left[\frac{3}{26}\ ;\ \frac{29}{26}\right[$ contient exactement un entier, l'entier 1.

Il existe un unique couple (u ; v) solution avec $0 \leq u < 26$, le couple $(23\ ; 15)$.

4. Remarquons d'abord que $17 \times 23 = 391 = 15 \times 26 + 1$. De ce fait, nous disposons de la congruence $17 \times 23 \equiv 1\ (26)$.

Nous rappelons pour cette question que la relation de congruence modulo n est compatible avec la multiplication, c'est-à-dire que pour a, b, x entiers relatifs : $a \equiv b\ (n) \implies ax \equiv bx\ (n)$

Considérons deux entiers relatifs *p* et *q*.

D'une part : $17p \equiv q \ (26) \ \Longrightarrow 23 \times 17p \equiv 23 \times q \ (26)$ soit par transitivité $p \equiv 23q \ (26)$.

D'autre part : $p \equiv 23q \ (26) \ \Longrightarrow 17 \times p \equiv 17 \times 23 \times q \ (26)$ soit par transitivité $17p \equiv q \ (26)$.

Il y a donc bien équivalence $17p \equiv q \ (26) \quad \Longleftrightarrow \quad p \equiv 23q \ (26)$.

Partie B : Un exemple de codage.

1. Nous faisons appel à un algorithme Python pour traiter cette question, sachant que le code ASCII des lettres de l'alphabet commence avec $a = 97$

Le mot HUIT est codé en LYCH

```
>>> def codage(mot):
        codenum=[]
        for l in mot:
                x=ord(l)-97
                y=(17*x+22)%26
                codenum=codenum+[y]
        print(codenum)
        codelettre=[]
        for y in codenum :
                codelettre=codelettre+[chr(y+97)]
        return(codelettre)

>>> codage(["h","u","i","t"])
[11, 24, 2, 7]
['l', 'y', 'c', 'h']
>>> 
```

Sachant que $22 \times 23 = 506 = 19 \times 26 + 12$, donc que $22 \times 23 \equiv 12 \ (26)$:

$r \equiv 17n + 22 \ \ (26) \ \Longrightarrow 23r \equiv n + 12 \ (26)$ soit $n \equiv 23r + 14 \ (26)$.

Réciproquement, sachant que $14 \times 17 = 238 = 9 \times 26 + 4$, donc que $14 \times 27 \equiv 4 \ (26)$:

$n \equiv 23r + 14 \ (26) \Longrightarrow 17n \equiv r + 4 \ (26)$ soit $r \equiv 17n + 22 \ (26)$.

La fonction $r \longmapsto g(r) = 23r + 14$ est une fonction de décodage.

Un algorithme Python permet de décoder.

Le mot QWXA se décode en SAXO.

Nous avons de plus vérifié sur un exemple que les foncions de codage et décodage sont réciproques l'une de l'autre.

```
>>> def decodage(mot):
        decodenum=[]
        for l in mot:
                x=ord(l)-97
                y=(23*x+14)%26
                decodenum=decodenum+[y]
        print(decodenum)
        decodelettre=[]
        for y in decodenum :
                decodelettre=decodelettre+[chr(y+97)]
        return(decodelettre)

>>> decodage(["q","w","x","a"])
[18, 0, 23, 14]
['s', 'a', 'x', 'o']
>>> decodage(codage(["h","u","i","t"]))
[11, 24, 2, 7]
[7, 20, 8, 19]
['h', 'u', 'i', 't']
>>> codage(['s', 'a', 'x', 'o'])
[16, 22, 23, 0]
['q', 'w', 'x', 'a']
>>> |
```

Partie C : Cas général

1. Soit *f* une fonction affine définie par $f(n) = an + b$ avec *a* et *b* entiers.

Pour tout couple d'entiers $(n_1\,;\,n_2)$: $f(n_2) - f(n_1) = a(n_2 - n_1)$. La relation de congruence $f(n_2) \equiv f(n_1)$ (26) équivaut à la congruence $a(n_2 - n_1) \equiv 0$ (26) ou encore au fait qu'il existe un entier relatif *k* tel que : $a(n_2 - n_1) = 26k$.

Supposons que *a* et 26 soient premiers entre eux. Alors, d'après le théorème de Gauss, puisque 26 divise $a(n_2 - n_1)$ et est premier avec 26, il divise $(n_2 - n_1)$.

Supposons en outre que n_1 et n_2 soient compris entre 0 et 25. Alors, $n_2 - n_1$ est un entier strictement compris entre -26 et 26. Le seul multiple de 26 possible est zéro. Dans cette hypothèse, $n_2 - n_1 = 0$

En conséquence :

Si *a* et 26 sont premiers entre eux, quels que soient n_1 et n_2 compris entre 0 et 25, alors :

$$f(n_2) \equiv f(n_1)\ (26) \implies n_2 = n_1$$

La fonction *f* admet une fonction de décodage.

2.a. Supposons que *a* et 26 soient premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers relatifs *u* et *v* tels que : $au + 26v = 1$. Cette relation implique : $au \equiv 1 \ \ (26)$.

2.b. Pour tout entier *n* appartenant à $\{0\,;A1\,;\dots;25\}$: $u \times f(n) = u \times (an + b) = (ua).n + bu$.

Compte tenu de la congruence $au \equiv 1 \ \ (26)$ et de la compatibilité de la relation de congruence avec les opérations addition et multiplication, $u.f(n) = (ua).n + bu$ l'égalité implique la congruence modulo 26 : $uf(n) \equiv n + bu \ \ (26)$.

Soit alors *c* un entier relatif tel que : $c \equiv -bu \ \ (26)$.

Nous obtenons : $r \equiv f(n)\ (26) \implies u.r \equiv n - c \ \ (26)$.

Nous en déduisons que la fonction : $r \longmapsto g(r) = u.r + c$ est une fonction de décodage.

2.c. Il n'y a pas unicité de la fonction de décodage car les paramètres *u* et *c* sont définis à une congruence modulo 26 près. Tout couple $(u' = u + 26p\,; c' = c = bu + 26q)$ avec *p* et *q* entiers relatifs peut jouer le même rôle que les paramètres *u* et *c* que nous avons proposés.

Problème 2 : Géométrie de l'espace

NB. On ne peut qu'être surpris par la multiplicité de résultats donnés par l'énoncé. Une grande partie du travail demandé consiste en des « vérifications », en contradiction flagrante avec « l'esprit d'initiative » prôné par l'institution.

1.a. Le point *I* est milieu de [CG], ses coordonnées son égales aux demi-sommes des coordonnées homologues de *C* et de *G*. L'énoncé livrant aimablement les coordonnées de nombreux points, dont les points *C* et *G* :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_C + x_G}{2} = \dfrac{4+4}{2} = 4 \\ y_I = \dfrac{y_C + y_G}{2} = \dfrac{4+4}{2} = 4 \\ z_I = \dfrac{z_C + z_G}{2} = \dfrac{0+4}{2} = 2 \end{cases}$$

1.b. Le vecteur $\overrightarrow{BI}$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x_I - x_B = 4 - 4 = 0 \\ y_I - y_B = 4 \\ z_I - z_B = 2 \end{cases}$. Il est colinéaire au vecteur $\vec{u}\,(0\,;2\,;1)$ car $\overrightarrow{BI} = 2\vec{u}$. Ce vecteur $\vec{u}\,(0\,;2\,;1)$ est un vecteur directeur de la droite (*BI*).

Soit $M\,(x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace. Le point *M* appartient à la droite (*BI*) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{BM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{u}$, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel *t* tel que $\overrightarrow{BM} = t.\vec{u}$, égalité vectorielle qui équivaut aux relations : $\begin{cases} x - 4 = 0 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$.

Une représentation paramétrique de la droite (*BI*) est : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1.c. L'énoncé nous fait « admettre » que (*EJ*) et (*BI*) sont sécantes, et par-dessus le marché nous donne les coordonnées du point d'intersection. Une vérification triviale permettrait de régler cette question. Nous préférons, pour la beauté du geste, traiter cette question sans « admettre ».

Cherchons si les droites (*EJ*) et (*BI*) ont un point d'intersection.

Un point $K\ (x\,;y\,;z)$ est situé à la fois sur (*EJ*) et sur (*BI*) si et seulement s'il existe deux réels *s* et *t* vérifiant les trois relations : $\begin{cases} x = 4 = 2s \\ y = 2t = 4s \\ z = t = 4 \end{cases}$. Nous obtenons immédiatement qu'il est nécessaire que $\begin{cases} s = 2 \\ t = 4 \end{cases}$ et la relation $y = 2t = 4s$ est compatible avec ces conditions nécessaires.

Ainsi, les droites (*EJ*) et (*BI*) ont bien un point d'intersection obtenu pour les valeurs $\begin{cases} s = 2 \\ t = 4 \end{cases}$ des paramètres. Il s'agit du point $K\ (4\,;8\,;4)$.

1.d. Exprimons les coordonnées des vecteurs en jeu.

Le vecteur $\overrightarrow{KE}$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x_E - x_K = 0 - 4 = -4 \\ y_E - y_K = 0 - 8 = -8 \\ z_E - z_K = 4 - 4 = 0 \end{cases}$.

Le vecteur $\overrightarrow{KB}$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x_B - x_K = 4 - 4 = 0 \\ y_B - y_K = 0 - 8 = -8 \\ z_B - z_K = 0 - 4 = -4 \end{cases}$.

D'une part : $\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KB} = 64$ en utilisant l'expression du produit scalaire à l'aide des coordonnées.

D'autre part $\overrightarrow{KE}.\overrightarrow{KB} = \|\overrightarrow{KE}\|.\|\overrightarrow{KB}\|.cos\widehat{EKB} = \sqrt{80}.\sqrt{80}.cos\widehat{EKB} = 80.cos\widehat{EKB}$.

Donc, $cos\widehat{EKB} = \frac{64}{80} = \frac{4}{5}$. Une calculatrice nous indique que $36{,}8 < \arccos\left(\frac{4}{5}\right) < 36{,}9$.

L'arrondi au degré près de l'angle $\widehat{EKB}$ est 37°.

2.a. Nous avons vu que la droite (*BI*) a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{u}\ (0\,;2\,;1)$. Un simple coup d'œil sur les équations paramétriques de la droite que l'énoncé nous donne, suffit à nous convaincre que le vecteur $\vec{v}\ (1\,;2\,;0)$ est directeur de la droite (*BJ*). Des calculs triviaux attestent que $\vec{n}.\vec{u} = \vec{n}.\vec{v} = 0$ et montrent que le vecteur $\vec{n}\ (2\,;-1\,;2)$, étant orthogonal à deux vecteurs indépendants de la direction du plan (*BIJ*), est un vecteur normal à ce plan.

2.b. Soit $M\ (x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace. Le point *M* appartient au plan (*BIJ*) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{BM}$ est orthogonal au vecteur $\vec{n}$, c'est-à-dire si et seulement si $\overrightarrow{BM}.\vec{n} = 0$, ce qui équivaut à la relation $2(x-4) - y + 2z = 0$. C'est une équation cartésienne du plan (*BIJ*) et cette équation s'écrit aussi bien : $2x - y + 2z - 8 = 0$, comme l'indique l'énoncé.

3.a. Soit $M\ (x\,;y\,;z)$ un point quelconque de l'espace. Le point *M* appartient à la droite Δ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{DM}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}$, c'est-à-dire si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{DM} = t.\vec{n}$, égalité vectorielle qui équivaut aux relations : $\begin{cases} x = 2t \\ y - 4 = -t \\ z = 2t \end{cases}$.

Une représentation paramétrique de la droite (*BI*) est : $\begin{cases} x = 2t \\ y = 4 - t \\ z = 2t \end{cases}$ où $t \in \mathbb{R}$.

3.b. Déterminons pour quelle valeur du paramètre t ce points appartient au plan (*BIJ*). Le point M_t de coordonnées $(2t\,; 4 - t\,; 2t)$ appartient au plan (*BIJ*) si et seulement si :

$2.(2t) - (4 - t) + 2.(2t) - 8 = 0$ soit si et seulement si : $9t - 12 = 0$.

Nous obtenons $t = \frac{4}{3}$.

Le point d'intersection de la droite Δ avec le plan (*BIJ*) est le point $N = M_{\frac{4}{3}}$ associé à la valeur $t = \frac{4}{3}$ du paramètre et de coordonnées $\left(\frac{8}{3}\,;\frac{8}{3}\,;\frac{8}{3}\right)$.

4.a et b. Le vecteur $\overrightarrow{EJ}$ a pour coordonnées : $\begin{cases} x_J - x_E = 2 \\ y_J - y_E = 4 \\ z_J - z_E = 4 - 4 = 0 \end{cases}$.. Le point *M* défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{EM} = s.\overrightarrow{EJ}$ a des coordonnées telles que $\begin{cases} x = 2s \\ y = 4s \\ z - 4 = 0 \end{cases}$, soit que $\begin{cases} x = 2s \\ y = 4s \\ z = 4 \end{cases}$

Sa distance au point *D*, élevée au carré, est : $DM^2 = 4s^2 + (4s - 4)^2 + 16 = 20s^2 - 32s + 32$..

Nous pouvons l'écrire ainsi : $DM^2 = 20\left(s^2 - \frac{8}{5}s + \frac{8}{5}\right) = 20\left((s - \frac{4}{5})^2 + \frac{24}{25}\right)$.

La distance *DM* est minimale quand $s = \frac{4}{5}$ et cette distance minimale est telle que $DM^2 = \frac{96}{5}$.

La distance minimale est $\sqrt{\frac{96}{5}} = \frac{4\sqrt{30}}{5}$.

Elle est atteinte lorsque $s = \frac{4}{5}$, au point de coordonnées $\left(\frac{8}{5}\,;\frac{16}{5}\,;4\right)$

Problème 3 : Fonctions

Partie A. Représentation graphique

1. La dérivée de la fonction f est la fonction définie par $f'(x) = (1 - x^2).\exp(-x)$

Soit $f'(x) = (1 - x)(1 + x).\exp(-x)$.

Cette dérivée est négative sur $[1\,;\,+\infty[$ et ne s'annule qu'en 1 : la fonction f est strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

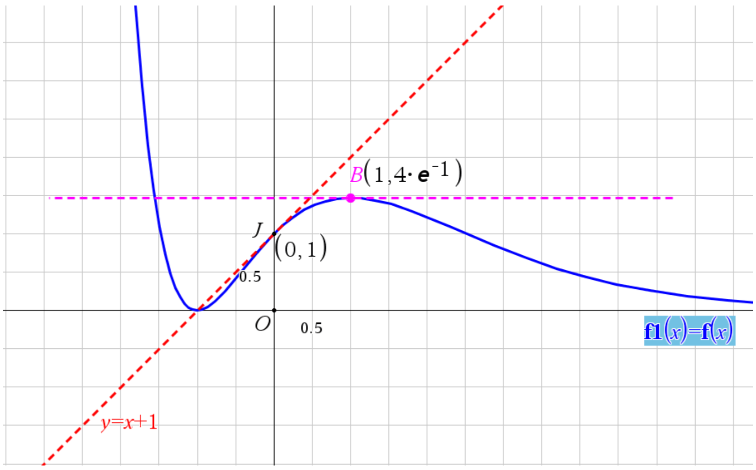
Le sommet de la courbe représentative de f est le point B de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{4}{e}\right)$

Define $f(x)=(x+1)^2\cdot e^{-x}$	*Terminé*
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$-(x-1)\cdot(x+1)\cdot e^{-x}$
$f(1)$	$4\cdot e^{-1}$
$f(0)$	1
$\frac{d}{dx}(f(x))\vert x=0$	1
$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))$	0

3. Le sommet de la courbe représentative de f est le point B de coordonnées $\left(1\,;\,\frac{4}{e}\right)$ et la tangente en ce point est la droite d'équation $y = \frac{4}{e}$

4. La courbe (C) coupe l'axe des ordonnées au point $J(0,1)$, point en lequel (C) admet une tangente d'équation $y = x + 1$ qui est parallèle à la droite d'équation$y = x$ et qui passe par le point $A(-1,0)$,

5. La fonction f ayant pour limite zéro en plus l'infini, la courbe (C) admet l'axe Ox comme asymptote.



Partie B. Recherche d'une intersection

1. Une calculatrice nous indique que :

$$1{,}471 < f(1) < 1{,}472$$

$$1{,}394 < f\left(\frac{3}{2}\right) < 1{,}395$$

$f(1)$	1.47152
$f\left(\frac{3}{2}\right)$	1.39456
$f(x)$	$(x+1)^2 \cdot \mathbf{e}^{-x}$

L'arrondi au centième de $f(1)$ est 1,47 et celui de $f\left(\frac{3}{2}\right)$ est 1,39

2. Nous avons vu que la fonction f est strictement décroissante et continue sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$. Sa restriction à l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est une fonction strictement décroissante et continue sur cet intervalle. La question précédente montre de plus que $1 < f\left(\frac{3}{2}\right) < f(1) < \frac{3}{2}$.

Il en résulte que l'image par f de l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est un intervalle emboîté dans l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$.

L'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est stable par *f*.

C'est-à-dire que pour tout réel *x* : $x \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right] \Rightarrow f(x) \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$.

En ce qui concerne les termes de la suite récurrente à étudier, cette stabilité assure que :

$u_n \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right] \Rightarrow u_{n+1} \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ c'est-à-dire ***l'hérédité*** de l'appartenance à l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$.

Le premier terme de la suite étant $u_0 = \frac{3}{2}$, l'appartenance à l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est **initialisée** au rang zéro.

Etant initialisée au rang zéro et héréditaire, la propriété d'appartenance à l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est vérifiée à tous les rangs.

Quel que soit l'entier naturel *n*, u_n apparient à l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$.

Partie B. Recherche d'une intersection

1. Une calculatrice nous indique que :

$$1{,}471 < f(1) < 1{,}472$$

$$1{,}394 < f\left(\frac{3}{2}\right) < 1{,}395$$

$f(1)$	1.47152
$f\left(\frac{3}{2}\right)$	1.39456
$f(x)$	$(x+1)^2 \cdot e^{-x}$

L'arrondi au centième de $f(1)$ est 1,47 et celui de $f\left(\frac{3}{2}\right)$ est 1,39

2. Nous avons vu que la fonction *f* est strictement décroissante et continue sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$. Sa restriction à l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est une fonction strictement décroissante et continue sur cet intervalle. La question précédente montre de plus que $1 < f\left(\frac{3}{2}\right) < f(1) < \frac{3}{2}$.

Il en résulte que l'image par *f* de l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est un intervalle emboîté dans l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$.

L'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est stable par *f*.

C'est-à-dire que pour tout réel *x* : $x \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right] \Longrightarrow f(x) \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$.

En ce qui concerne les termes de la suite récurrente à étudier, cette stabilité assure que :

$u_n \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right] \Longrightarrow u_{n+1} \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ c'est-à-dire ***l'hérédité*** de l'appartenance à l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$.

Le premier terme de la suite étant $u_0 = \frac{3}{2}$, l'appartenance à l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est **initialisée** au rang zéro.

Etant initialisée au rang zéro et héréditaire, la propriété d'appartenance à l'intervalle $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ est vérifiée à tous les rangs.

Quel que soit l'entier naturel *n*, $u_n \in \left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$.

3.a et b. Dès lors que l'on « admet » que le point fixe de *f* appartient à $\left[1\,;\,\frac{3}{2}\right]$ et que l'on « admet » également la majoration indiquée par l'énoncé, la majoration demandée n'est plus qu'une question d'effet domino laissé au lecteur. La suite de terme général $|u_n - x_0|$ étant majorée par une suite géométrique convergeant vers zéro, elle converge elle-même vers zéro, ce qui montre que la suite (u_n) converge vers le point fixe de *f*.

4. La stricte décroissance de *f* et la relation $x_0 > u_0$ impliquent que $f(x_0) < f(u_0) = u_1$, c'est-à-dire, compte tenu que x_0 est point fixe de *f*, $x_0 < u_1$.

Nous avons la double inégalité : $u_1 < x_0 < u_0$.

Montrons que pour tout entier naturel *p* : $u_{2p+1} < x_0 < u_{2p}$

Initialisation : Cette propriété est initialisée au rang $p = 0$.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel *p*, la relation $u_{2p+1} < x_0 < u_{2p}$ soit vérifiée. La fonction *f* étant strictement décroissante :

$$u_{2p+1} < x_0 < u_{2p} \quad \Longrightarrow \quad u_{2p+2} = f\left(u_{2p+1}\right) > f(x_0) = x_0 > f\left(u_{2p}\right) = u_{2p+1}$$

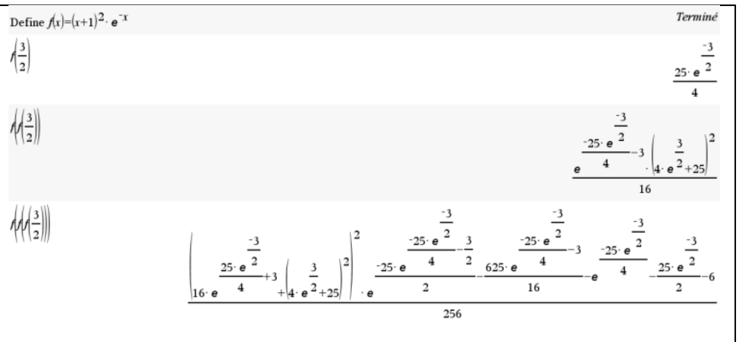
En appliquant une deuxième fois la fonction *f* :

$$u_{2p+2} > x_0 > u_{2p+1} \quad \Longrightarrow \quad u_{2p+3} = f\left(u_{2p+2}\right) < f(x_0) = x_0 < f\left(u_{2p+1}\right) = u_{2p+2}$$

Ainsi : $u_{2p+1} < x_0 < u_{2p} \quad \Longrightarrow \quad u_{2p+3} < x_0 < u_{2p+2}$

Ce qui prouve l'hérédité de la double inégalité $u_{2p+1} < x_0 < u_{2p}$.

Etant initialisée au rang zéro et héréditaire, l'inégalité $u_{2p+1} < x_0 < u_{2p}$ est vérifiée pour tout entier naturel *p*. Les termes de rangs impairs sont plus petits que le point fixe, et les termes de rangs pairs plus grands.

4.c. Nous sommes allés avec TI-NSpire jusqu'à l'expression du terme de rang 4 pour mettre en évidence l'inanité de la question posée, telle qu'elle est rédigée.	

Et nous avons utilisé un algorithme Python, nous permettant de dire avec les termes de rangs 4 et 5 que :

$$\mathbf{1,416368 < x_0 < 1,416758}$$

Nous en déduisons que 1,4165 est une valeur approchée à 3×10^{-5} près du point fixe de *f*.

```
>>> from math import *
>>> def mayotte():
        u=3/2
        for n in range (1,6):
                v=((u+1)**2)*exp(-u)
                print("Terme de rang",
                u=v


>>> mayotte()
Terme de rang 1 : 1.3945635009276864
Terme de rang 2 : 1.4216787888178988
Terme de rang 3 : 1.4151609062255455
Terme de rang 4 : 1.4167576549337166
Terme de rang 5 : 1.4163682211915454
>>>
```

Partie C. Un calcul d'aire

Nous avons fait confiance à TI-Nspire CAS pour traiter cette question. Il apparaît qu'une primitive de *f* est la fonction *F* définie par :

$$F(x) = -(x^2 + 4x + 5)\exp(-x)$$

La fonction « aire » est notée *g* ci-contre. Si $a < 0$ (le cas étudié dans cette partie) c'est :

$$g(a) = \int_a^0 f(x).dx = F(0) - F(a)$$

Define $f(x)=(x+1)^2\cdot e^{-x}$	*Terminé*
$\int f(x)\,dx$	$(-x^2-4\cdot x-5)\cdot e^{-x}$
Define $g(a)=\int_a^0 f(x)\,dx$	*Terminé*
$g(a)$	$(a^2+4\cdot a+5)\cdot e^{-a}-5$
$g(-1)$	$2\cdot e-5$
$g(a)-5$	$(a^2+4\cdot a+5)\cdot e^{-a}-10$
$g(-2)$	2.38906
$g(-3)$	35.1711
nSolve$(g(a)=5,a)$	-2.24452
$g(-2.25)$	5.08072
$g(-2.24)$	4.93439

F étant la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -(x^2 + 4x + 5)\exp(-x)$, qui est une primitive de *f*, nous pouvons dire que cette fonction, ayant pour dérivée la fonction *f*, qui est une fonction positive sur $\mathbb{R}$, est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Il en résulte que la fonction « aire » est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$. Elle y est dérivable, donc continue. Elle prend une valeur plus grande que 35 en -3 et une valeur plus petite que 3 en -2. D'après le théorème des valeurs intermédiaire, elle prend une fois et une seule la valeur 5, et elle le fait pour une valeur située entre en -3 et -2.

Une étude empirique (nous n'avons pas jugé bon d'enclencher une dichotomie pour si peu) montre que la valeur 5 est atteinte pour une valeur de a située entre $-2{,}25$ et $-2{,}24$, comme l'atteste la copie d'écran.

NB. Fe façon générale, si *a* «étaitun réel quelconque, la fonction « aire » (nous la noterons $g(a)$) n'aurait pas la même expression suivant que *a* est positif ou négatif.

- **Si $a > 0$, c'est $g(a) = \int_0^a f(x).dx = F(a) - F(0)$.**
- **Si $a < 0$ (le cas étudié dans cette partie) c'est $g(a) = \int_a^0 f(x).dx = F(0) - F(a)$.**

Peut-être alors aurait-il été pertinent de calculer l'aire comprise entre le point *A*, l'axe *Ox* et la courbe.	Define $h(a)=\int_{-1}^{a} f(x)\,dx$ *Terminé* $h(a)$ $2\cdot e-(a^2+4\cdot a+5)\cdot e^{-a}$ $\lim\limits_{a \to \infty}\left(2\cdot e-(a^2+4\cdot a+5)\cdot e^{-a}\right)$ $2\cdot e$
Ce domaine, tout en étant illimité, admet une aire finie, égale à $2.\exp(1)$. **Il existe aussi une deuxième valeur de *a*, positive cette fois, pour laquelle l'aire sous la courbe est égale à 5.**