

OLYMPIADES 2025 ; EXERCICES NATIONAUX

NB. Ceci n'est pas un « corrigé » type. Des coquilles ne sont pas exclues.

Exercice 1

1. Plus fort (sic)

Commençons par une étude générale :

Considérons une horloge divisée en n graduations.

Supposons que la petite aiguille avance de x heures à partir de la graduation 1.

Effectuons la division euclidienne de x par n : $x = q \times n + r$ avec $0 \leq r < n$. La petite aiguille aura fait q tours de cadran complets et aura encore avancé de r graduations.

- Si $0 \leq r \leq n - 2$, alors la petite aiguille sera sur la graduation $r + 1$.
- Si $r = n - 1$, alors la petite aiguille sera sur la graduation zéro.

1.a. Dans cette question, $n = 5$.

La division euclidienne de 6 par 5 s'écrit : $6 = 1 \times 5 + 1$. Dans ce cas, $r = 1$, ce qui justifie la relation donnée par l'énoncé « $1 + 6 = 2$ »

La division euclidienne de 12 par 5 s'écrit : $12 = 2 \times 5 + 2$. Dans ce cas, $r = 2$, ce qui selon l'énoncé s'écrirait : « $1 + 12 = 3$ »

1.b. pour que l'on ait « $1 + 12 = 2$ », il faut que $r = 1$ c'est-à-dire que la division euclidienne de 12 par n puisse s'écrire : $12 = q \times n + 1$. Autrement dit que : $q \times n = 11$.

Vu que n est un nombre premier, il n'y a qu'une possibilité : $n = 11$

(Dessin laissé au lecteur)

2. Traduction. Mon point de vue personnel sur cette question :

Désignons par GC l'ensemble des grands compositeurs, par S l'ensemble des sourds et par b l'individu Beethoven.

Traduisons d'abord l'affirmation : « S'il n'avait pas été sourd, Beethoven n'aurait pas été un grand compositeur ». Elle signifie : « $x \notin S \Rightarrow x \notin GC$ ». Cette affirmation est équivalente à sa contraposée : « $x \in GC \Rightarrow x \in S$ » c'est-à-dire que « $GC \subset S$ »

Nions cette affirmation : GC n'est pas inclus dans S c'est-à-dire : « $(\exists x \in GC) : x \notin S$ »

Mais cette négation est fausse (puisque l'affirmation est « indéniable »).

Nions la négation : « $(\forall x \in GC) : x \in S$ ».

Je proposerais pour ma part l'énoncé suivant :

Il est évident que tous les grands compositeurs sont sourds.

NB. Cette double négation sort du même tonneau que « Vous n'êtes pas sans ignorer que ... »

2.b. J'ai du mal à comprendre l'objectif de cette question. Je proposerais :

- *Un arrêté municipal interdit le ramassage des escargots.*
- *L'association OPCVE conteste cet arrêté.*
- *Malgré la contestation, la municipalité maintient son arrêté.*
- *En conséquence, lors des cargolades, griller de la saucisse catalane.*

3. Celle qui fait des mathématiques, c'est celle qui ne boit pas

La partie occupée par le liquide dans un verre de champagne rempli à ras bord se présente comme un cône de hauteur h et dont la base est un disque de rayon r .

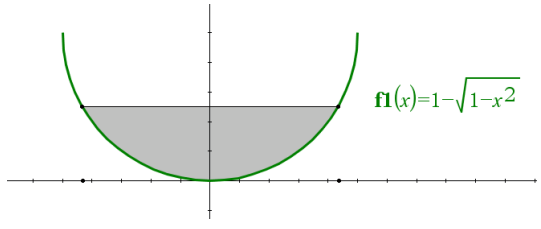
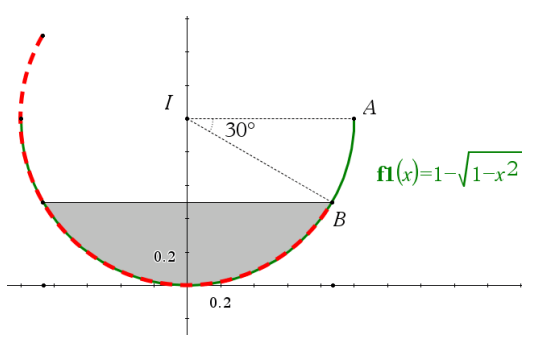
Le cône occupé par le liquide dans un verre de champagne rempli à mi-hauteur est une réduction du précédent dans le rapport $\frac{1}{2}$. On sait qu'une réduction de rapport k multiplie les longueurs par k , et les volumes par k^3 . Lorsque $k = \frac{1}{2}$, le volume du cône réduit est égal au $\frac{1}{8}$ du volume du cône initial.

Inversement, le volume du champagne contenu dans un verre rempli à ras-bord est égal à 8 fois le volume de champagne contenu dans un verre rempli à mi-hauteur.

On peut remplir 8 verres à mi-hauteur.

4. Ou alors juste un peu

Schématisons la section de la demi-sphère à l'aide de la représentation graphique S de la fonction $x \mapsto 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

Les abscisses des points d'intersection de S avec la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ sont les solutions de l'équation : $1 - \sqrt{1 - x^2} = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire les deux nombres réels $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.	
L'angle $\widehat{ATB}$ mis en évidence sur la figure ci-contre a donc pour mesure 30° (car son sinus est égal à $\frac{1}{2}$). Il s'agit de l'angle d'inclinaison maximale que l'on peut accepter sans renverser de liquide. (En pointillé rouge superposé, le verre incliné de 30°).	

5. Les mathématiciens ont le droit de manger

La contextualisation de cet exercice est particulièrement forte-de-café et mérite un commentaire.

Nous avons affaire à des individus qui se rendent en groupe dans un restaurant chic de Nice pour participer à un gueuleton. C'est tout à fait leur droit.

Or, nous apprenons que, pour ce faire, le groupe en question reçoit une subvention de 1000 € de l'Etat. C'est donc vous et moi qui finançons en partie ce repas. Curieuse conception de l'emploi de l'argent public.

Il est remarquable que cet exercice soit proposé dans le contexte très officiel d'un concours national, émanant de l'Inspection Générale de l'Education Nationale.

Alors de deux choses l'une :

- Ou bien il s'agit d'un groupe de notables, notables dont il est généralement admis qu'ils vivent aux crochets des contribuables. Ce principe est tellement bien admis qu'il paraît normal qu'une subvention de l'Etat soit accordée pour un gueuleton.
- Ou bien l'auteur du sujet se pose en « avocat du diable » et nous invite à réfléchir, au second degré, sur le contexte de l'exercice. Le choix de Nice, fief d'une redoutable clique, plaiderait en ce sens.

Dans les deux cas, la contextualisation choisie reflète une gabegie ordinaire profondément ancrée dans notre société, amenant à la dilapidation de l'argent public.

Un exercice à la fois savoureux et édifiant ...

5.a. D'après l'énoncé, le groupe paie un forfait de 4000 € correspondant à un minimum de 100 convives puis chaque convive supplémentaire paie 40 €. Soit n le nombre de convives.

- Si $n > 100$, le prix payé par le groupe est : $4000 + 40 \times (n - 100) = 40n$. Le prix payé est dans ce cas une fonction linéaire de n , la prix unitaire est constant, chaque convive paie exactement 40 €.
- Si $0 < n \leq 100$, le prix payé par le groupe est 4000. C'est dans ce cas une fonction constante, le prix unitaire est la fonction homographique $n \mapsto \frac{4000}{n}$ qui est strictement décroissante sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, 100\}$. En raison de cette stricte décroissance, quel que soit l'entier n tel que $0 < n \leq 99$: $\frac{4000}{n} > \frac{4000}{40} = 40$, chaque convive paie un prix unitaire strictement supérieur à 40. En particulier, si $n = 90$, le prix unitaire est $\frac{4000}{90} = 44,44$ € au centime près.

5.b. Subvention déduite, le prix payé par le groupe de notables est :

$3000 + 40 \times (n - 100) = 40n - 1000$ si $n > 100$ et 3000 si $n \leq 100$.

De ce fait, le prix unitaire est : $40 - \frac{1000}{n}$ si $n > 100$ et $\frac{3000}{n}$ si $n \leq 100$.

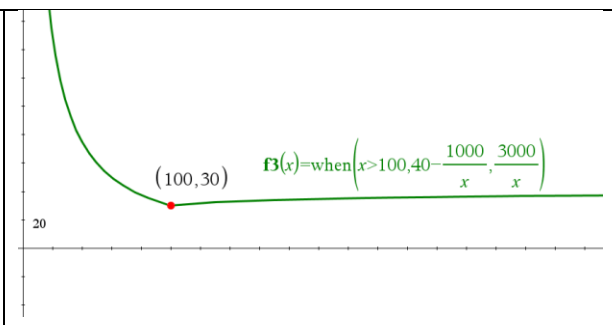
Le prix unitaire PU est représenté graphiquement ci-contre.

Il est minimal quand $n = 100$ et est égal à 30.

$$PU(90) = 33,33$$

$$PU(120) = 31,67$$

(au centime près).

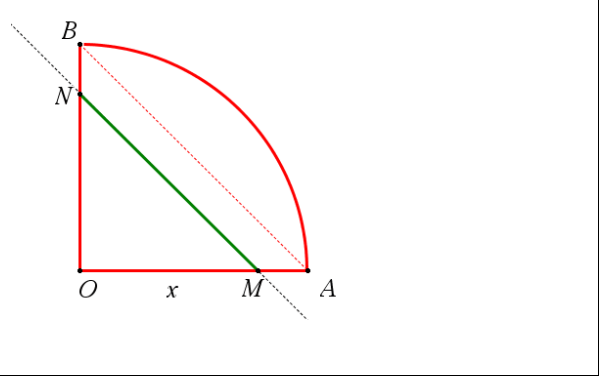


6. Et un dessert

Codons la figure comme il est indiqué ci-contre.

On peut choisir comme unité de longueur le rayon OA de la tarte (inutile que ce soit un paramètre).

Choisissons comme variable permettant de décrire la situation la longueur $x = OM$ avec x variant dans l'intervalle $[0 ; 1]$



Avec ce choix d'unité et de variable, le quart de disque que représente la part de tarte a pour aire $\frac{\pi}{4}$, le triangle rectangle isocèle OAB a pour aire $\frac{1}{2}$ et le triangle rectangle isocèle OMN a pour aire $\frac{x^2}{2}$ (puisque son côté (MN) est parallèle au côté (AB) de OAB , le triangle OMN est une réduction du précédent dans le rapport $\frac{OM}{OA} = x$).

Le quart de tarte est partagé en deux morceaux de même aire lorsque l'aire de OMN est égale à la moitié de l'aire du quart de disque soit lorsque : $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire lorsque : $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Une calculatrice indique que $0,8862 < \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 0,8863$.

Une valeur approchée à 10^{-3} près de x est 0,886.

Avec le codage que nous avons choisi, le quart de tarte est équitablement partagé lorsque l'axe de coupe passe par le point M tel que $OM = \frac{\sqrt{\pi}}{2} OA$ soit $OM = 0,886 \cdot OA$ à 10^{-3} près.

7. Théorème de Gua.

Notons a, b, c les longueurs des côtés du coin du parallélépipède rectangle et rapportons l'espace à un repère dans lequel les sommets de ce coin ont pour coordonnées, respectivement, $A(a; 0; 0)$; $B(0; b; 0)$; $C(0; 0; c)$.

On sait que le volume V d'un tétraèdre s'exprime ainsi : $V = \frac{1}{3} \times (\text{hauteur}) \times (\text{aire base})$

Le tétraèdre est $OABC$ peut être considéré comme étant de hauteur OC , OB ou OA et de base respectivement l'un des triangles rectangles, respectivement, OAB (d'aire $\frac{1}{2}ab$), OAC (d'aire $\frac{1}{2}ac$) ou OBC (d'aire $\frac{1}{2}bc$). De ce fait, son volume est égal à $\frac{1}{6}abc$.

Calculons ce même volume d'une quatrième façon :

Le plan (ABC) a dans le repère choisi pour équation cartésienne : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$.

On sait que la distance d'un point $M(x; y; z)$ à un plan d'équation cartésienne $ux + vy + wz + h = 0$

est donnée par la formule : $d = \frac{|ux+vy+wz+h|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$.

En la présente occurrence : $d(O; (ABC)) = \frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{c}\right)^2}} = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}$

Cette distance représente la hauteur issue de O dans le triangle ABC .

Le volume V de $OABC$ peut s'exprimer ainsi : $V = \frac{1}{3} \times d(O; (ABC)) \times (\text{aire}(ABC))$

On en déduit : $V = \frac{1}{3} \times d(O; (ABC)) \times (\text{aire}(ABC))$

$$\text{aire}(ABC) = \frac{3V}{d(O; (ABC))} = \frac{3 \times \frac{abc}{6}}{\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}} \text{ soit : } \text{aire}(ABC) = \frac{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}}{2}$$

Il en résulte que :

$$(\text{aire}(ABC))^2 = \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{4} = \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ca}{2}\right)^2 + \left(\frac{ab}{2}\right)^2$$

On retrouve le fait que le carré de l'aire de ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces.

Exercice 2

1. Compte tenu des formules rappelées dans l'énoncé, un entier n est équilibré de balance b si et seulement s'il existe b tel que : $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{b(2n+b+1)}{2}$.

Cette relation équivaut à l'équation au deuxième degré : $b^2 + b(2n+1) - n(n-1) = 0$ dont b doit être un nombre entier strictement positif solution.

1.a. Le nombre 6 est équilibré de balance 7 car $1 + 2 + \dots + 5 = 15 = 7 + 8$.

1.b. Le nombre 7 n'est pas équilibré car $1 + 2 + \dots + 6 = 21$ et qu'aucune somme de nombres consécutifs suivants n'est égale à 21 : $8 + 9 = 17 < 21$ et $8 + 9 + 10 = 27 > 21$

1.c. D'une part $1 + 2 + \dots + 203 = \frac{203 \times 204}{2} = 20706$

D'autre part : $205 + \dots + (204 + 84) = \frac{84 \times (2 \times 204 + 84 + 1)}{2} = \frac{84 \times (2 \times 204 + 84 + 1)}{2} = \frac{84 \times 493}{2} = 20706$.

Les deux résultats sont identiques, ce qui vérifie le fait que **204 est équilibré de balance 84**.

2. Lien entre nombres équilibrés et carrés parfaits

On admet que la racine carrée d'un nombre entier A est un entier si et seulement si A est un carré parfait.

Comme nous l'avons remarqué en début de question 1, un entier n est équilibré de balance b si et seulement si l'équation au deuxième degré : $b^2 + b(2n+1) - n(n-1) = 0$ admet une solution qui est un nombre entier strictement positif.

Cette équation a pour discriminant : $\Delta = (2n+1)^2 + 4n(n-1) = 8n^2 + 1$ (strictement positif).

L'équation a deux solutions de signes contraires (car leur produit, égal à $-n(n-1)$ est négatif) qui

sont : $b = \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{8n^2+1}}{2}$. Une seule des deux, $b = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}$ est un réel strictement positif.

Encore faut-il que cette solution soit un nombre entier.

2.a. Si n est un nombre équilibré, alors le nombre $b = \frac{-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1}}{2}$ est un nombre entier.

Une condition nécessaire pour que ce nombre soit entier est que $\sqrt{8n^2+1}$ soit entier, donc que $8n^2+1$ soit un carré parfait.

2.b. Réciproquement, supposons que $8n^2+1$ soit un carré parfait.

Nous savons que le carré d'un nombre pair est un nombre pair. Par contraposition, si un nombre a un carré impair, alors ce nombre est impair.

Dans notre contexte, $8n^2+1$ est un nombre impair. Si $8n^2+1$ est un carré parfait, alors c'est le carré d'un nombre impair e . Le nombre $-(2n+1)+\sqrt{8n^2+1} = e - (2n+1)$ est la différence de deux nombres impairs : c'est un nombre pair (strictement positif comme vu en **2.a**).

Si $8n^2+1$ est un carré parfait, alors le nombre $b = \frac{e-(2n+1)}{2}$ est un entier (strictement positif comme vu en **2.a**). Ce qui montre que n est équilibré.

2.c. La **question 2.a** a démontré l'implication directe et la **question 2.b** a démontré l'implication réciproque.

Un entier strictement positif n est équilibré si et seulement si $8n^2+1$ est un carré parfait.

3.a. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + \sqrt{8x^2+1}$. Calculons son carré :

$$(f(x))^2 = 9x^2 + 2 \times 3x\sqrt{8x^2+1} + (8x^2+1) = 17x^2 + 1 + 6x\sqrt{8x^2+1}. \text{ On en déduit :}$$

$$8(f(x))^2 + 1 = 8(17x^2 + 1 + 6x\sqrt{8x^2+1}) + 1 = 136x^2 + 48x\sqrt{8x^2+1} + 9.$$

Calculons d'autre part le carré de $8x + 3\sqrt{8x^2+1}$:

$$(8x + 3\sqrt{8x^2+1})^2 = 64x^2 + 2 \times 24x\sqrt{8x^2+1} + 9(8x^2+1) = 136x^2 + 48x\sqrt{8x^2+1} + 9$$

On obtient deux développements identiques. On peut conclure que pour tout réel x :

$$8(f(x))^2 + 1 = (8x + 3\sqrt{8x^2+1})^2$$

3.b. Supposons que n soit un nombre équilibré. Le nombre $8n^2+1$ est un carré parfait et le nombre $e = \sqrt{8n^2+1}$ est un nombre entier. Par conséquent, le nombre $8n + 3\sqrt{8n^2+1} = 8n + 3e$ est lui aussi un nombre entier, et $8(f(n))^2 + 1$ est le carré d'un nombre entier. Ce qui implique que le nombre $f(n)$ est équilibré.

Si n est un entier équilibré, alors $f(n)$ est lui aussi équilibré.

3.c. On remarque que pour tout réel x strictement positif : $f(x) = 3x + \sqrt{8x^2 + 1} > 3x > x$.
 Tout réel strictement positif a une image par f qui lui est strictement supérieure. :

Le premier terme de la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ est $u_1 = 6$, qui est un nombre entier strictement positif équilibré.
 Par récurrence évidente, les termes de la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ sont tous des nombres entiers équilibrés, et la suite est strictement croissante car pour tout indice k : $u_{k+1} = f(u_k) > u_k$.

3.d. Déterminons la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto f(x) = y = 3x + \sqrt{8x^2 + 1}$ en exprimant x en fonction de y :

$$y = 3x + \sqrt{8x^2 + 1} \Rightarrow \sqrt{8x^2 + 1} = y - 3x \Rightarrow 8x^2 + 1 = (y - 3x)^2 = y^2 - 6xy + 9x^2$$

L'image réciproque x de y est solution de l'équation au second degré : $x^2 - 6xy + y^2 - 1 = 0$.

Or, cette équation a pour discriminant réduit $\Delta' = 8y^2 + 1$ et elle admet deux solutions :

$$\begin{cases} x_1 = 3y + \sqrt{8y^2 + 1} \\ x_2 = 3y - \sqrt{8y^2 + 1} \end{cases}$$

En remarquant que $y > 3x$, on en déduit qu'inversement $x < \frac{y}{3}$, c'est donc la deuxième solution, et elle seule, qui exprime la fonction réciproque : $y \mapsto x = f^{-1}(y) = 3y - \sqrt{8y^2 + 1}$

Ainsi, pour tout réel x d'image y par f : $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = 3y - \sqrt{8y^2 + 1}$

La fonction f^{-1} réciproque de f n'est autre que la fonction g étudiée dans la question suivante.

Appliquons ce résultat à deux termes consécutifs de la suite $(u_k)_{k \geq 1}$. Pour tout entier $k \geq 2$, appliquons-le aux termes de rangs $(k-1)$ et k :

$$u_k = f(u_{k-1}) \Leftrightarrow u_{k-1} = f^{-1}(u_k) = 3u_k - \sqrt{8u_k^2 + 1}$$

3.e. La fonction h , définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$, est dérivable sur cet intervalle et sa fonction dérivée est la fonction : $x \mapsto h'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{\sqrt{8x+1}} = \frac{3\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{8x+1}}$.

Déterminons le signe de cette dérivée en étudiant le signe de son numérateur :

$$3\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x} = \frac{(3\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x}) \times (3\sqrt{8x+1} + 8\sqrt{x})}{3\sqrt{8x+1} + 8\sqrt{x}} = \frac{9(8x+1) - 64x}{3\sqrt{8x+1} + 8\sqrt{x}}$$

Nous obtenons la relation : $\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x} = \frac{8x+9}{3\sqrt{8x+1} + 8\sqrt{x}}$, relation qui montre sous cette forme que

$\sqrt{8x+1} - 8\sqrt{x} > 0$ en tant que quotient de deux fonctions strictement positifs.

La dérivée de h est strictement positive sur $]0; +\infty[$, la fonction h est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$, depuis sa limite en zéro qui est égale à 1.

La fonction g est la composée de la fonction carré, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et qui applique cet intervalle sur lui-même, par la fonction h , elle aussi strictement croissante sur ce même intervalle.

On sait que la composée de deux fonctions qui ont le même sens de variation est une fonction croissante. En conséquence, la fonction g est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$,

NB. Si g était identifiée en tant que fonction réciproque de f , aucune démonstration n'aurait été nécessaire : deux fonctions réciproques l'une de l'autre ont le même sens de variation.

3.f. Supposons qu'il y ait des nombres équilibrés distincts des termes de la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ et soit n le plus petit d'entre eux. Il existe un entier $k \geq 2$ (puisque'il n'y a pas de nombre équilibré entre les deux premiers termes 6 et 35) tel que : $u_k < n < u_{k+1}$.

D'après la question précédente, la fonction f étant une fonction continue strictement croissante, sa restriction à chaque intervalle $[u_{k-1} ; u_k]$ réalise une bijection de cet intervalle sur son intervalle image $[u_k ; u_{k+1}]$. Inversement, la fonction réciproque $g = f^{-1}$ réalise une bijection de l'intervalle $[u_k ; u_{k+1}]$ sur l'intervalle antécédent $[u_{k-1} ; u_k]$.

L'entier $f^{-1}(n)$ est équilibré et vérifie $u_{k-1} < f^{-1}(n) < u_k < n$. L'existence d'un tel entier est incompatible avec le statut de « plus petit élément » que possède l'entier n .

Il ne peut pas exister des nombres équilibrés autres que ceux de la suite $(u_k)_{k \geq 1}$

4.a. Le calcul montre que : $f(f(x)) = 17x + 6\sqrt{8x^2 + 1}$.

Considérons pour $k \geq 2$ les termes de rangs $k + 1 ; k ; k - 1$ de la suite $(u_k)_{k \geq 1}$.

$$u_{k+1} = f(f(u_{k-1})) = 17u_{k-1} + 6\sqrt{8u_{k-1}^2 + 1}$$

$$u_{k+1} = \left(18u_{k-1} + 6\sqrt{8u_{k-1}^2 + 1}\right) - u_{k-1} = 6u_k - u_{k-1}$$

4.b. L'algorithme « mystère » (sic) calcule la somme des $n - 1$ premiers entiers. Nous n'en voyons guère l'utilité vu que nous connaissons la formule permettant de calculer cette somme.

4.c. Un exemple d'algorithme Python, permettant de déterminer si un entier donné est équilibré ou non.	<pre> >>> def equilibre(n): u=n*(n-1)/2 v=n+1 k=1 while v<u: k=k+1 v=v+n+k if v==u: print(n,"est équilibré de balance",k) else: print(n,"n'est pas équilibré") >>> equilibre(35) 35 est équilibré de balance 14 >>> equilibre(6) 6 est équilibré de balance 2 >>> equilibre(7) 7 n'est pas équilibré >>> equilibre(204) 204 est équilibré de balance 84 </pre>
5.a. L'algorithme ci-contre dresse la liste des nombres équilibrés jusqu'à celui qui est immédiatement supérieur à un entier n donné.	<pre> >>> def listequi(n): u=6 l=[u] while u<n: u=3*u+sqrt(8*(u**2)+1) l=l+[int(u)] return l >>> listequi(1000) [6, 35, 204, 1189] >>> listequi(100000) [6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416] </pre>
Une autre mouture exploitant la question 4.a Celle-ci affiche les n premiers nombres équilibrés.	<pre> >>> def listequi2(n): list=[6,35] for k in range(2,n+1): u=6*list[k-1]-list[k-2] list=list+[u] return list >>> listequi2(8) [6, 35, 204, 1189, 6930, 40391, 235416, 1372105, 7997214] </pre>