Ecrit 1-2025. Problème 1 : Vrai / Faux

Calculs dans R.

1. Faux. Soit *p* le prix HT de l'article. Il est tel que : $p \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 110$ soit $p = \frac{110}{1{,}1} = 100$. Le montant de la taxe est égal à 10 €.

2. Vrai. Car $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3\beta^2}{4}$ apparaît sous cette forme comme une somme de deux carrés.

3. Faux. La négation est : $a + b \leq 2 \implies a \leq 1$ ou $b \leq 1$.

4. Vrai. $\cos(2025x) = 1 = \cos(0) \iff 2025x \equiv 0 \ (2\pi) \iff \exists k \in \mathbb{Z}, 2025x = 2k\pi$

Sont solutions de cette équation les réels de la forme $x = k\frac{2\pi}{2025}$.

Or, $-\pi < k\frac{2\pi}{2025} \leq \pi \iff -\frac{2025}{2} < k \leq \frac{2025}{2} \iff -1012 \leq k \leq 1012$. Il y a bien 2025 entiers relatifs qui vérifient cette double inégalité.

Arithmétique.

5. Vrai. Car $f(n) - f(m) = (n - m)(4n + 4m - 5)$ et l'équation $4n + 4m - 5 = 0$ n'a pas de solution dans l'ensemble des entiers naturels.

6. Vrai. Car $2^3 = 8 \equiv 1 \ (7)$ donc $2^{3n} \equiv 1 \ (7)$ pour tout entier naturel *n*.

7. Faux. Considérons les entiers $a = 6$ et $a = 1$ qui sont congrus modulo 5.

On remarque que : $2^6 = 64$ et que $2^1 = 2$. Ainsi, $2^6 - 2^1 = 62 \not\equiv 0 \ \ (5)$

1 et 6 sont congrus modulo 5 et pourtant il existe un entier *x*, en l'occurrence 2, tel que $x^6 \not\equiv x^1 \ \ (5)$.

Ce contre-exemple infirme l'affirmation considérée dans cette question.

8. Vrai. Considérons le polynôme *P* défini par : $P(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$.

On vérifie que pour tout réel *x* : $P(x+1) - P(x) = x^2$ et en application de cette relation :

$$P(n) = \sum_{k=1}^{n} (P(k) - P(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Analyse

9. Faux. La suite en question est une suite géométrique de raison -4. Sa valeur absolue diverge vers plus l'infini, mais la suite elle-même n'a aucune limite puisque ses deux sous-suites des termes pairs et des termes impairs prennent l'une, des valeurs négatives et l'autre, des valeurs positives.

(La sous-suite des termes pairs diverge vers $-\infty$).

10. Vrai. La suite en question est bornée (donc n'a pas de limite infinie) mais pour tout entier *p* tel que $p \geq 1$, $u_{2p} = 1 + \frac{1}{2p} \geq 1$ tandis que $u_{2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+1} \leq -\frac{2}{3}$. A partir du rang 2, l'écart entre les termes de rang pair et les termes de rang impair est au moins égal à $\frac{5}{3}$, la suite n'a pas de limite, ni finie ni infinie.

(On peut aussi justifier par le fait que les deux sous-suites des termes pairs et des termes impairs ont des limites distinctes).

11. Vrai. Soit ℓ la limite strictement positive en question. Il existe un entier naturel *N* :

$n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\ell}{2}$, inégalité qui implique que : $u_n \geq \frac{\ell}{2} > 0$

12. Faux. La fonction *f* étant supposée strictement décroissante, elle inverse le sens des inégalités.

Si u_0 n'est pas un point fixe de *f* (auquel cas la suite est stationnaire) : $\frac{u_2-u_1}{u_1-u_0}=\frac{f(u_1)-f(u_0)}{u_1-u_0}<0$

Les trois termes u_0, u_1 et u_2 ne sont classés ni par ordre croissant, ni par ordre décroissant. (De
3 façon générale, la suite associée est « alternée » en ce sens que : $\frac{u_{n+2}-u_{n+1}}{u_{n+1}-u_n}<0$)

13. Vrai. La fonction $x\longmapsto \exp(x)-x-1$ présente en 0 un minimum global qui est égal à 0.

14. Faux. Une fonction dérivable est continue, mais une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable. Contre-exemple : la fonction valeur absolue qui est continue mais non dérivable en 0.

15. Vrai. Car l'intégrale en question est égale à $1-\exp\,(-x)$, qui est compris entre 0 et 1 lorsque *x* est positif.

16. Faux. Pour tout entier naturel *n* et pour tout *x* appartenant à $[0\,;1]$, $x^{n+1}\leq x^n$, ce qui implique $x^{n+1}.\exp(-x)\leq x^n\exp(-x)$. L'intégrale conservant l'ordre, on obtient l'inégalité $I_{n+1}\leq I_n$. La suite en question est décroissante.

17. Vrai. Par une IPP :

$$I_{n+1}\int_1^{\mathrm{e}} t.(\ln\,(t))^{n+1}\mathrm{d}t=\left[\frac{t^2}{2}\times(\ln\,(t))^{n+1}\right]-\frac{n+1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} t.(\ln\,(t))^{n}\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\frac{n+1}{2}I_n$$

Géométrie

18. Faux. Si je lis bien les indications (?) les angles de sommet *D* de la figure mesurent 65°, 50° et 75°. Leur somme est égale à 190°. L'angle $\widehat{CDE}$ n'est pas un angle plat.

19.Vrai. D'après le théorème d'AL-Kashi, cos $(\widehat{ABC} = \frac{BA^2+BC^2-CA^2}{2.BA.BC} = \frac{16+64-48}{2\times4\times8} = \frac{1}{2} = \cos(60°)$

20. Faux. Car $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}\right) = \begin{vmatrix} 5x-1 & 5x-3 \\ x^2-3 & x^2-2 \end{vmatrix} = 2x^2+5x-7 = 2(x-1)\left(x-\frac{7}{2}\right)$. Les points sont alignés non seulement si $x=1$ mais aussi si $x=\frac{7}{2}$. (Il s'agit d'une implication simple et non d'une équivalence).

21. Vrai. Les points *A', B', C'* sont alignés sur la droite d'intersection du plan (*ABC*) avec le plan *P*.

22. Dans un repère « adéquat », on y considère les points $I\ \left(\frac{5}{2}\,;0\,;0\right)$, $H\ (0\,;4\,;3)$ et $F\ (5\,;0\,;3)$,

Alors $\overrightarrow{HF}\ (5\,;\ -4\,;0)$ et $\overrightarrow{HI}\ \left(\frac{5}{2}\,;\ -4\,;-3\right)$

On dispose de : $\left\|\overrightarrow{HF}\right\| = \sqrt{25+16} = \sqrt{41}$; $\left\|\overrightarrow{HI}\right\| = \sqrt{\frac{25}{4}+16+9} = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ et $\overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HI} = \frac{25}{2}+16 = \frac{57}{2}$.

Le cosinus de l'angle en question $\frac{\overrightarrow{HF}.\overrightarrow{HI}}{HF.HI}$ serait égal à : $\frac{57\sqrt{205}}{1025}$.

Une valeur approchée de cet angle serait 37° (?, à vérifier …)

23. Faux. Le nombre complexe en question est : $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\exp\left(-\boldsymbol{i}\frac{11\pi}{12}\right)$.

5

Algèbre linéaire

24. Vrai. Car : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2.\vec{u}.\vec{v}$.

La relation $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$ implique $\vec{u}.\vec{v} = 0$

25. Vrai. Car le polynôme caractéristique de cette matrice est le polynôme : $P(x) = x^2 - 2x + 2$, polynôme dont le produit des racines (les valeurs propres de *A*) est égal à 2.

26. Vrai. Car si *A* est diagonalisable, la formule de passage à une base de vecteurs propres est de la forme : $D = P^{-1}AP$. Alors : $D^2 = (P^{-1}AP).(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP = P^{-1}A^2P$ et D^2, en tant que carré d'une matrice diagonale, est diagonale.

Dénombrement et probabilités

27. Vrai. Notons A_k l'évènement « Le *k*-ème candidat interrogé est une femme », évènement dont la probabilité est $P(A_k) = \frac{13}{20}$

L'évènement $A_1 \cap A_2$ est l'évènement « Les deux premiers candidats interrogés sont des femmes », évènement dont la probabilité est $P(A_1 \cap A_2) = \frac{\binom{13}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{13\times12}{20\times19}$

On cherche $P_{A_1}(A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \frac{\left(\frac{13\times12}{20\times19}\right)}{\left(\frac{13}{20}\right)} = \frac{12}{19}$

28. Faux. Car l'indentation de la ligne 9 est incorrecte. Il faut l'aligner sur celle de la ligne 8 (celle de la ligne « Print »)

Ecrit 1-2025. Problème 3 : Dérangements

6

I. Généralités

1. On sait que le cardinal de la réunion d'ensembles deux à deux disjoints est égal à la somme de leurs cardinaux.

- L'ensemble A_1 est la réunion disjointe de $A_1 \cap A_2$ et de $A_1 \cap \overline{A_2}$ .En conséquence : $card(A_1) = card(A_1 \cap A_2) + card(A_1 \cap \overline{A_2})$
- L'ensemble A_2 est la réunion disjointe de $A_1 \cap A_2$ et de $A_2 \cap \overline{A_1}$. En conséquence : $card(A_2) = card(A_1 \cap A_2) + card(A_2 \cap \overline{A_1})$

- L'ensemble $A_1 \cup A_2$ est la réunion disjointe de trois ensembles :
$$A_1 \cup A_2 = (A_1 \cap \overline{A_2}) \cup (A_2 \cap \overline{A_1}) \cup (A_1 \cap A_2)$$
En conséquence : $card(A_1 \cup A_2) = card(A_1 \cap \overline{A_2}) + card(A_2 \cap \overline{A_1}) + (A_1 \cap A_2)$

On obtient :
$$card(A_1 \cup A_2) = \left(card(A_1) - card(A_1 \cap A_2)\right) + \left(card(A_2) - card(A_1 \cap A_2)\right) + card(A_1 \cap A_2)$$

Soit : $card(A_1 \cup A_2) = card(A_1) + card(A_2) - card(A_1 \cap A_2)$

2. Dans le cas de trois ensembles :

$$card(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = card(A_1 \cup A_2) + card(A_3) - card\left(A_3 \cap (A_1 \cup A_2)\right)$$
$$= \left(card(A_1) + card(A_2) - card(A_1 \cap A_2)\right) + card(A_3) - card\left(A_3 \cap (A_1 \cup A_2)\right)$$

Or : $A_3 \cap (A_1 \cup A_2) = (A_3 \cap A_1) \cup (A_3 \cap A_2)$ donc :

$$card\left(A_3 \cap (A_1 \cup A_2)\right) = card(A_3 \cap A_1) + card(A_3 \cap A_2) - card(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

(car l'intersection $(A_3 \cap A_1) \cap (A_3 \cap A_2)$ est l'intersection des trois ensembles).

On obtient l'expression suivante de $card(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$:

$$card(A_1) + card(A_2) + card(A_3) - card(A_1 \cap A_2) - card(A_3 \cap A_1) - card(A_3 \cap A_2) + card(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

3. Dans le cas $n = 3$, décortiquons la sommation par rapport à la variable *k*, qui prend trois valeurs :

- Pour $k = 1$, $(-1)^{k-1} = 1$ et la somme associée est : $+\big(card(A_1) + card(A_2) + card(A_3)\big)$
- Pour $k = 2$, $(-1)^{k-1} = -1$ et la somme associée est :
  $-\big(card(A_1 \cap A_2) + card(A_1 \cap A_3) - card(A_2 \cap A_3)\big)$
- Pour $k = 3$, $(-1)^{k} = 1$ et la somme associée est : $+card(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

7 En effectuant la sommation par rapport à *k*, nous retrouvons bien la formule de la question précédente.

II. Calcul du nombre de dérangements

4. $d_1 = 0$; $d_2 = 1$.

5. Montrons que la réunion des A_i est incluse dans $S_n \setminus D_n$

Soit *i* un entier tel que $1 \leq i \leq n$.

Pour toute permutation σ de S_n : $\sigma \in A_i \implies \sigma \notin D_n$ puisqu'alors σ possède au moins un point fixe.
Tout élément de A_i est dans le complémentaire de D_n : $A_i \subset S_n \setminus D_n$

Si $A_i \subset S_n \setminus D_n$pour tout entier *i* tel que $1 \leq i \leq n$, alors $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \subset S_n \setminus D_n$

Montrons que $S_n \setminus D_n$ est inclus dans $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

Soit $\sigma \in S_n \setminus D_n$: alors σ possède au moins un point fixe. Il existe au moins un entier *i* tel que $\sigma \in A_i$, donc $\sigma \in S_n \setminus D_n \implies \sigma \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Ce qui montre que $S_n \setminus D_n \subset (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)$.

En fin de compte :

$$S_n \setminus D_n = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

8

6. $\sigma \in \bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ si, et seulement si, la restriction de σ à l'ensemble $\{i_1; \dots; i_k\}$ est l'application identique. Il existe donc une bijection de l'ensemble des permutations de $E_n \setminus \{i_1; \dots; i_k\}$ sur $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ en prolongeant chacune d'entre elles par l'application identique de $\{i_1; \dots; i_k\}$.

Les deux ensembles $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ et $S_{E_n \setminus \{i_1; \dots; i_k\}}$ ont le même cardinal.

Vu que $E_n \setminus \{i_1; \dots; i_k\}$ possède $(n-k)$ éléments, le cardinal de $S_{E_n \setminus \{i_1; \dots; i_k\}}$ est $(n-k)!$.

En conséquence :

$$card\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = (n-k)!$$

7. En s'aidant de la formule du crible, on obtient le cardinal de la réunion $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$:

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 \le \dots \le i_k \le n} card\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right)\right)$$

- Pour k fixé, toutes les intersections $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ ont le même cardinal, à savoir $(n-k)!$
- Il y a $\binom{n}{k}$ intersections $\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}$ différentes (autant que le nombre de parties à k éléments $\{i_1; \dots; i_k\}$ de l'ensemble E_n).

On en déduit :

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \times \binom{n}{k} \times (n-k)!\right)$$

Or : $\binom{n}{k} \times (n-k)! = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times (n-k)! = \frac{n!}{k!}$

$$card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left((-1)^{k-1} \times \frac{n!}{k!}\right) = n! \times \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\right)$$

L'ensemble D_n étant la partie complémentaire de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$:

$$card(D_n) = n! - card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = n! - n! \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\right)$$

Cette expression peut s'écrire :

$$card(D_n) = n!\left(1 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k!}\right)\right) = n!\left(1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{(-1)^{k}}{k!}\right)\right)$$

Le premier terme isolé « 1 » peut être incorporé dans la sommation à condition d'initier la sommation à l'indice zéro :

$$card(D_n) = n!\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{k}}{k!}\right)\right)$$

III. Applications

9. Dans un contexte d'équiprobabilité, la probabilité de choisir une permutation donnée parmi celles de E_n est égale à $\frac{1}{n!}$.

La probabilité qu'une permutation choisie au hasard soit un dérangement est alors :

$$P_n = \frac{card(D_n)}{card(S_n)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{k}}{k!}\right)$$

On reconnaît dans cette somme les termes de rangs $\leq n$ du développement en série entière de la fonction exponentielle au point -1. En conséquence :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{\mathrm{e}}$$

10. La répartition des *n* boules dans les *n* urnes définit une permutation σ de l'ensemble E_n.

10.1. $X_n = 0$ si et seulement si σ est un dérangement. Ainsi :

$$P(X_n = 0) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{(-1)^{k}}{k!}\right)$$

10.2. $X_n = q$ si et seulement si σ laisse invariant chacun des *q* éléments d'une partie de E_n et si la restriction de σ à la partie complémentaire est un dérangement de cette partie.

- Il y a $\binom{n}{q} = \frac{n!}{q!(n-q)!}$ façons de choisir une partie donnée de E_n
- Il y a $card(D_{n-q}) = (n-q)!\left(\sum_{k=0}^{n-q}\left(\frac{(-1)^k}{k!}\right)\right)$ dérangements de la partie complémentaire

Il y a donc $\frac{n!}{q!(n-q)!} \times (n-q)!\left(\sum_{k=0}^{n-q}\left(\frac{(-1)^k}{k!}\right)\right) = \frac{n!}{q!}\left(\sum_{k=0}^{n-q}\left(\frac{(-1)^k}{k!}\right)\right)$ permutations qui fixent
10 exactement q éléments de E_n parmi les $n!$ permutations possibles. En conséquence :

$$P(X_n = q) = \frac{1}{q!}\sum_{k=0}^{n-q}\left(\frac{(-1)^k}{k!}\right)$$

10.3. Pour chaque entier *i* de E_n, désignons par Z_i la variable qui vaut 1 si *i* est un point fixe de la permutation σ en jeu, et 0 sinon.

La probabilité que *i* soit point fixe est égale à $\frac{1}{n}$ puisque *i* peut avoir pour image, de façon équiprobable, chacun des *n* éléments de E_n. L'espérance de Z_i est donc égale à 1.

Or : $X = Z_1 + \cdots + Z_n$. En conséquence : $E(X) = E(Z_1) + \cdots + E(Z_n) = n \times \frac{1}{n} = 1.$

L'espérance de *X* est égale à 1 quelle que soit la valeur de *n*.

Résultat confirmé par TI-NSpire CAS.	Define $e(n)=\sum_{q=1}^{n}\left(\frac{1}{(q-1)!}\cdot\sum_{k=0}^{n-q}\left(\frac{(-1)^k}{k!}\right)\right)$ *Terminé* $e(1)$ 1 $e(2)$ 1 $e(3)$ 1 $e(5)$ 1
Pour information, la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n pour quelques valeurs de l'entier *n*.	Define $p(n,q)=\frac{\sum_{k=0}^{n-q}\left(\frac{(-1)^k}{k!}\right)}{q!}$ *Terminé* seq$(p(3,q),q,0,3)$ $\left\{\frac{1}{3},\frac{1}{2},0,\frac{1}{6}\right\}$ seq$(p(4,q),q,0,4)$ $\left\{\frac{3}{8},\frac{1}{3},\frac{1}{4},0,\frac{1}{24}\right\}$ seq$(p(5,q),q,0,5)$ $\left\{\frac{11}{30},\frac{3}{8},\frac{1}{6},\frac{1}{12},0,\frac{1}{120}\right\}$ seq$(p(6,q),q,0,6)$ $\left\{\frac{53}{144},\frac{11}{30},\frac{3}{16},\frac{1}{18},\frac{1}{48},0,\frac{1}{720}\right\}$

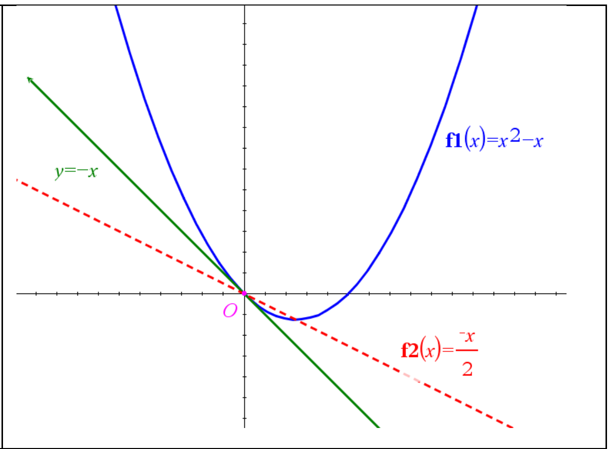
Ecrit 1-2025. Problème 2 : Approximations affines

I. Etude d'un exemple

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et sa dérivée est la fonction :

$$x \longmapsto f'(x) = 2x - 1$$

2. Représentations graphiques des fonctions en jeu dans cette partie



3. La fonction t affine tangente en 0 est la fonction : $x \longmapsto t(x) = f(0) + f'(0).x$ c'est-à-dire la fonction : $x \longmapsto t(x) = -x$;

4.1. La fonction h est une approximation affine de f en 0 car elle vérifie les deux conditions :

- h est une fonction affine
- $h(0) = 0 = f(0)$.

4.2. D'une part : $f(x) - t(x) = (x^2 - x) - (-x) = x^2$. En conséquence, $|f(x) - t(x)| = x^2$ quel que soit le réel x. D'autre part : $f(x) - h(x) = (x^2 - x) - \left(-\frac{1}{2}x\right) = x^2 - \frac{1}{2}x = x\left(x - \frac{1}{2}\right)$. En conséquence : $|f(x) - h(x)| = \left|x^2 - \frac{1}{2}x\right| = |x|.\left|x - \frac{1}{2}\right|$

Soit *x* un nombre réel.

Supposons que $|x| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right|$. Alors, en multipliant chaque membre de cette inégalité par $|x|$: $|x| \times |x| \leq |x| \times \left|x - \frac{1}{2}\right|$ car on ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant chacun de ses membres par un même réel positif.

Or $|x| \times |x| = x^2 = |f(x) - t(x)|$ et $|x| \times \left|x - \frac{1}{2}\right| = \left|x^2 - \frac{1}{2}x\right| = |f(x) - h(x)|$

Donc $|x| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right| \Rightarrow |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)|$

Supposons que $|f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)|$ soit que $x^2 = \left|x^2 - \frac{1}{2}x\right| \leq |x|.\left|x - \frac{1}{2}\right|$.

- Ou bien $x \neq 0$ et alors, en multipliant chaque membre de cette inégalité par le nombre positif $\frac{1}{|x|}$, on obtient $\frac{1}{|x|}x^2 \leq \frac{1}{|x|}\left(|x|.\left|x - \frac{1}{2}\right|\right)$ c'est-à-dire $|x| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right|$.
- Ou bien $x = 0$ et dans ce cas, l'inégalité $|0| \leq \left|0 - \frac{1}{2}\right|$ est triviale.

Donc $|f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)| \Rightarrow |x| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right|$

En fin de compte, quel que soit le réel *x*, $|x| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right| \Leftrightarrow |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)|$

4.3. Quel que soit le réel *x* appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right[$ l'inégalité $|x| \leq \left|x - \frac{1}{2}\right|$ est vérifiée (car $\frac{1}{4}$ est le milieu de l'intervalle $\left[0 ; \frac{1}{2}\right]$. Lorsque *x* appartient à $\left]-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right[$ x est plus près de 0 que de $\frac{1}{2}$.

Donc, $x \in \left]-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4}\right[\Rightarrow |f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)|$. Il existe un intervalle ouvert centré en 0 dans lequel l'inégalité $|f(x) - t(x)| \leq |f(x) - h(x)|$ est vérifiée.

La fonction *t* est une approximation affine de *f* en 0 meilleure que *h*.

5.1. La fonction g_k est une approximation affine de *f* en 0 car elle vérifie les deux conditions :

- g_k est une fonction affine
- $g_k(0) = 0 = f(0)$.

5.2. D'une part : $f(x)-t(x)=(x^2-x)-(-x)=x^2$. En conséquence, $|f(x)-t(x)|=x^2$ quel que soit le réel *x*. D'autre part : $f(x)-g_k(x)=(x^2-x)-(kx)=x^2-(1+k)x=x(x-1-k)$.

En conséquence : $|f(x)-g_k(x)|=|x^2-(1+k)x|=|x|.|x-(1+k)|$

Soit *x* un nombre réel.

Supposons que $|x|\leq|x-(1+k)|$. Alors, en multipliant chaque membre de cette inégalité par $|x|$: $|x|\times|x|\leq|x|\times|x-(1+k)|$ car on ne change pas le sens d'une inégalité en multipliant chacun de ses membres par un même réel positif.

Or $|x|\times|x|=x^2=|f(x)-t(x)|$ et $|x|\times|x-(1+k)|=|x^2-(1+k)x|=|f(x)-g_k(x)|$

Donc $|x|\leq\left|x-\frac{1}{2}\right|\Longrightarrow|f(x)-t(x)|\leq|f(x)-g_k(x)|$

Supposons que $|f(x)-t(x)|\leq|f(x)-g_k(x)|$ soit que $x^2=|x^2-(1+k)x|\leq|x|.|x-(1+k)|$.

- Ou bien $x\neq 0$ et alors, en multipliant chaque membre de cette inégalité par le nombre positif $\frac{1}{|x|}$, on obtient $\frac{1}{|x|}x^2\leq\frac{1}{|x|}(|x|.|x-(1+k)|)$ c'est-à-dire $|x|\leq|x-(1+k)|$.
- Ou bien $x=0$ et dans ce cas, l'inégalité $|0|\leq|0-(1+k)|$ est triviale.

Donc $|f(x)-t(x)|\leq|f(x)-g_k(x)|\Longrightarrow|x|\leq|x-(1+k)|$

En fin de compte, quel que soit le réel *x*, $|x|\leq|x-(1+k)|\iff|f(x)-t(x)|\leq|f(x)-g_k(x)|$

5.3. Quel que soit le réel *x* appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{1+k}{2}\,;\,\frac{1+k}{2}\right[$ l'inégalité $|x|\leq|x-(1+k)|$ est vérifiée (car $\frac{1+k}{2}$ est le milieu de l'intervalle $[0\,;\,1+k]$. Lorsque *x* appartient à $\left]-\frac{1+k}{2}\,;\,\frac{1+k}{2}\right[$, x est plus près de 0 que de $(1+k)$.

Donc, $x\in\left]-\frac{1+k}{2}\,;\,\frac{1+k}{2}\right[\;\Longrightarrow|f(x)-t(x)|\leq|f(x)-g_k(x)|$. Il existe un intervalle ouvert centré en 0 dans lequel l'inégalité $|f(x)-t(x)|\leq|f(x)-g_k(x)|$ est vérifiée.

La fonction *t* est une approximation affine de *f* en 0 meilleure que g_k.

6. Toute approximation affine de *f* en 0 autre que *t* est du type g_k puisque les approximations affines de *f* en 0 sont les fonctions affines qui s'annulent en 0. La question 5 nous montre que :

La fonction *t* est une approximation affine de *f* en 0 meilleure que toutes les autres.

C'est donc « la » meilleure approximation affine de *f* en 0.

II. Cas général

7. Soit *g* une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = k.x + m$ où *k* et *m* sont deux coefficients réels.

La fonction *g* est une approximation affine de *f* en *a* si et seulement si $g(a) = f(a)$, c'est-à-dire si et seulement si les coefficients *k* et *m* vérifient la relation : $k.a + m = f(a)$ soit $m = f(a) - k.a$, ce qui équivaut à dire que *g* est de la forme : $g(x) = k.x + f(a) - k.a = k.(x-a) + f(a)$

8. On sait que *f* est dérivable en *a* si et seulement si le quotient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie (notée $f'(a)$) lorsque *x* tend vers *a*. On dispose d'une caractérisation de ce nombre dérivé :

f est dérivable en *a* et a pour nombre dérivé $f'(a)$ en ce point si et seulement s'il existe une fonction ε ayant pour limite 0 en *a* telle que : $f(x) = f(a) + f'(a).(x-a) + (x-a).\varepsilon(x)$.

La fonction *t* étant définie par : $t(x) = f(a) + f'(a).(x-a)$, on peut écrire :

$$T(x) = \frac{f(x) - t(x)}{x - a} = \varepsilon(x)$$

$$G(x) = \frac{f(x) - g(x)}{x - a} = (f'(a) - k) + \varepsilon(x)$$

Vu que la fonction epsilon a pour limite zéro en *a* :

$$\lim_{x\to a} T(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to a} G(x) = f'(a) - k \text{ (nombre réel non nul).}$$

15

9. Considérons le nombre réel strictement positif $d = \frac{|f'(a)-k|}{2}$ (de la sorte, $|f'(a) - k| = 2d$).

- Compte tenu des valeurs des limites précédentes :
  Il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : $|x-a| < \alpha \implies \left|\frac{f(x)-t(x)}{x-a}\right| \leq d$
  donc $|x-a| < \alpha \implies |f(x) - t(x)| \leq d.|x-a|$.
- Il existe un réel $\beta > 0$ tel que : $|x-a| < \beta \implies \left|\frac{f(x)-g(x)}{x-a} - 2d\right| \leq d$
  donc $|x-a| < \beta \implies d.|x-a| \leq |f(x) - g(x)| \leq 3d.|x-a|$.

Posons $\gamma = \inf(\alpha, \beta)$ pour que les deux implications soient réalisées simultanément. Retenons :

$$|x-a| < \gamma \implies \begin{cases} |f(x) - t(x)| \leq d.|x-a| \\ d.|x-a| \leq |f(x) - g(x)| \end{cases}$$

Ainsi : $|x-a| < \gamma \implies |f(x) - t(x)| \leq d.|x-a| \leq |f(x) - g(x)|$

Lorsque *x* appartient à l'intervalle ouvert $]a-\gamma\,; a+\gamma[$, l'inégalité $|f(x) - t(x)| \leq |f(x) - g(x)|$ est vérifiée, ce qui montre que *t* est une meilleure approximation affine que toute autre approximation affine *g* de *f* au voisinage de *a*.

On en déduit que *t* est « la » meilleure approximation affine de *f* en *a*.

III. Relation d'ordre

10. Une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble *E* est une relation d'ordre si et seulement si elle est :

- Réflexive ($x\mathcal{R}x$ quel que soit *x* de *E*)
- Antisymétrique (si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$, alors $x = y$)
- Transitive (si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$)

16

11. L'antisymétrie pose problème. Prenons un contre-exemple.

Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto f(x) = x$.

Considérons les deux fonctions affines : $x \longmapsto g(x) = \frac{x}{2}$ et la fonction $x \longmapsto h(x) = \frac{3x}{2}$

Ces deux fonctions affines distinctes constituent des approximations affines de *f* en zéro, puisqu'elles prennent en zéro la même valeur que *f*.

De plus, pour tout réel *x* : $|f(x) - g(x)| = |f(x) - h(x)| = \frac{|x|}{2}$ de sorte que l'on a à la fois les deux inégalités $|f(x) - g(x)| \leq |f(x) - h(x)|$ et $|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)|$. Ainsi, *g* est « meilleure » que *h* et *h* est « meilleure » que *g*. L'antisymétrie n'est pas vérifiée.

La relation « être une approximation affine meilleure que … » n'est pas une relation d'ordre.