OLYMPIADES 2025 ; EXERCICES NATIONAUX

NB. Ceci n'est pas un « corrigé » type. Des coquilles ne sont pas exclues.

1. Plus fort (sic)

Commençons par une étude générale :

Considérons une horloge divisée en *n* graduations.

Supposons que la petite aiguille avance de *x* heures à partir de la graduation 1.

Effectuons la division euclidienne de *x* par *n* : $x = q \times n + r$ avec $0 \leq r < n$. La petite aiguille aura fait *q* tours de cadran complets et aura encore avancé de *r* graduations.

- Si $0 \leq r \leq n - 2$, alors la petite aiguille sera sur la graduation $r + 1$.
- Si $r = n - 1$, alors la petite aiguille sera sur la graduation zéro.

1.a. Dans cette question, $n = 5$.

La division euclidienne de 6 par 5 s'écrit : $6 = 1 \times 5 + 1$. Dans ce cas, $r = 1$, ce qui justifie la relation donnée par l'énoncé « $1 + 6 = 2$ »

La division euclidienne de 12 par 5 s'écrit : $12 = 2 \times 5 + 2$. Dans ce cas, $r = 2$, ce qui selon l'énoncé s'écrirait : « $1 + 12 = 3$ »

1.b. pour que l'on ait « $1 + 12 = 2$ », il faut que $r = 1$ c'est-à-dire que la division euclidienne de 12 par *n* puisse s'écrire : $12 = q \times n + 1$. Autrement dit que : $q \times n = 11$.

Vu que *n* est un nombre premier, il n'y a qu'une possibilité : $n = 11$

(Dessin laissé au lecteur)

2. Traduction. Mon point de vue personnel sur cette question :

Désignons par *GC* l'ensemble des grands compositeurs, par *S* l'ensemble des sourds et par *b* l'individu Beethoven.

Traduisons d'abord l'affirmation : « S'il n'avait pas été sourd, Beethoven n'aurait pas été un grand compositeur ». Elle signifie : « $x \notin S \implies x \notin GC$ ». Cette affirmation est équivalente à sa contraposée : « $x \in GC \implies x \in S$ » c'est-à-dire que « $GC \subset S$ »

Nions cette affirmation : *GC* n'est pas inclus dans *S* c'est-à-dire : « $(\exists x \in GC) : x \notin S$ »

Mais cette négation est fausse (puisque l'affirmation est « indéniable »).

Nions la négation : « $(\forall x \in GC) : x \in S$ ».

Je proposerais pour ma part l'énoncé suivant :

Il est évident que tous les grands compositeurs sont sourds.

2.b. J'ai du mal à comprendre l'objectif de cette question. Je proposerais sans trop de conviction :

- *Un arrêté municipal interdit le ramassage des escargots.*
- *L'association OPCVE conteste cet arrêté.*
- *Malgré la contestation, la municipalité maintient son arrêté.*

3. ***Celle qui fait des mathématiques, c'est celle qui ne boit pas***

La partie occupée par le liquide dans un verre de champagne rempli à ras bord se présente comme un cône de hauteur *h* et dont la base est un disque de rayon *r*.

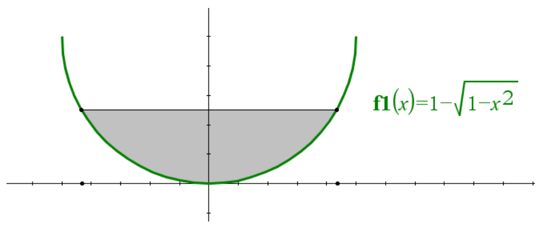
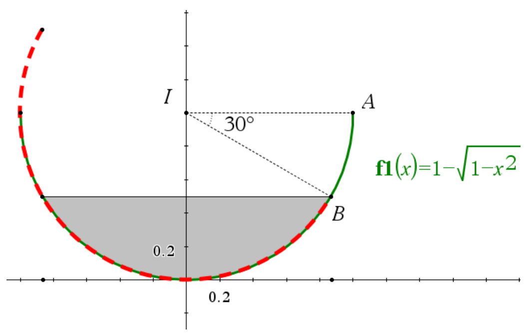
Le cône occupé par le liquide dans un verre de champagne rempli à mi-hauteur est une réduction du précédent dans le rapport $\frac{1}{2}$. On sait qu'une réduction de rapport *k* multiplie les longueurs par *k*, et les volumes par k^3. Lorsque $k = \frac{1}{2}$, le volume du cône réduit est égal au $\frac{1}{8}$ du volume du cône initial.

Inversement, le volume du champagne contenu dans un verre rempli à ras-bord est égal à 8 fois le volume de champagne contenu dans un verre rempli à mi-hauteur.

On peut remplir 8 verres à mi-hauteur.

4. Ou alors juste un peu

Schématisons la section de la demi-sphère à l'aide de la représentation graphique S de la fonction $x \longmapsto 1-\sqrt{1-x^2}$.

<table>
<tr>
<td>Les abscisses des points d'intersection de S avec la droite d'équation $y=\frac{1}{2}$ sont les solutions de l'équation : $1-\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}$, c'est-à-dire les deux nombres réels $\frac{\sqrt{3}}{2}$; $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>L'angle $\widehat{AIB}$ mis en évidence sur la figure ci-contre a donc pour mesure 30° (car son sinus est égal à $\frac{1}{2}$).
Il s'agit de l'angle d'inclinaison maximale que l'on peut accepter sans renverser de liquide.
(En pointillé rouge superposé, le verre incliné de 30°).</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

5. Les mathématiciens ont le droit de manger

La contextualisation de cet exercice est particulièrement forte-de-café et mérite un commentaire.

Nous avons affaire à des individus qui se rendent en groupe dans un restaurant chic de Nice pour participer à un gueuleton. C'est tout à fait leur droit.

Or, nous apprenons que, pour ce faire, le groupe en question reçoit une subvention de 1000 € de l'Etat. C'est donc vous et moi qui finançons en partie le repas de ces Messieurs-Dames. Curieuse conception de l'emploi de l'argent public.

Il est remarquable que cet exercice soit proposé dans le contexte très officiel d'un concours netional , émanant de l'Inspection Générale de l'Education Nationale.

Alors de deux choses l'une :

- Ou bien il s'agit d'un groupe de notables, notables dont il est généralement admis qu'ils vivent aux crochets des contribuables. Ce principe est tellement bien admis qu'il paraît normal qu'une subvention de l'Etat soit accordée pour un gueuleton.

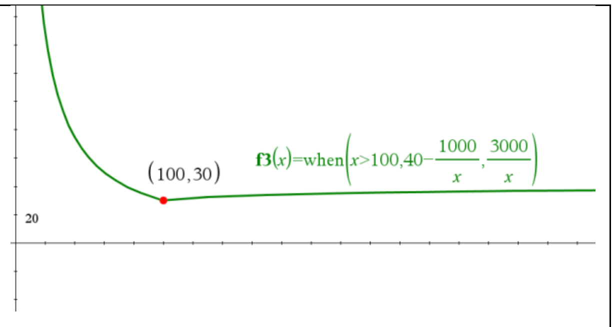
- Ou bien l'auteur du sujet se pose en « avocat du diable » et nous invite à réfléchir, au second degré, sur le contexte de l'exercice. Le choix de Nice, fief d'une redoutable clique, plaiderait en ce sens.

Dans les deux cas, la contextualisation choisie reflète une gabegie ordinaire profondément ancrée dans notre société, amenant à la dilapidation de l'argent public.
Un exercice à la fois savoureux et édifiant …

5.a. D'après l'énoncé, le groupe paie un forfait de 4000 € correspondant à un minimum de 100 convives puis chaque convive supplémentaire paie 40 €. Soit *n* le nombre de convives.

- Si $n > 100$, le prix payé par le groupe est : $4000 + 40 \times (n - 100) = 40n$. Le prix payé est dans ce cas une fonction linéaire de *n*, la prix unitaire est constant, chaque convive paie exactement 40 €.
- Si $0 < n \leq 100$, le prix payé par le groupe est 4000. C'est dans ce cas une fonction constante, le prix unitaire est la fonction homographique $n \longmapsto \frac{4000}{n}$ qui est strictement décroissante sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, 100\}$. En raison de cette stricte décroissance, quel que soit l'entier *n* tel que $0 < n \leq 99$: $\frac{4000}{n} > \frac{4000}{40} = 40$, chaque convive paie un prix unitaire strictement supérieur à 40. En particulier, si $n = 90$, le prix unitaire est $\frac{4000}{90} = 44{,}44$ € au centime près.

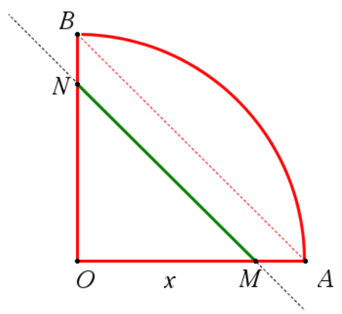
5.b. Subvention déduite, le prix payé par le groupe de notables est :
$3000 + 40 \times (n - 100) = 40n - 1000$ si $n > 100$ et 3000 si $n \leq 100$.
De ce fait, le prix unitaire est : $40 - \frac{1000}{n}$ si $n > 100$ et $\frac{3000}{n}$ si $n \leq 100$.

Le prix unitaire *PU* est représenté graphiquement ci-contre. Il est minimal quand $n = 100$ et est égal à 30. $PU(90) = 33{,}33$ $PU(120) = 31{,}67$ (au centime près).	

6. Et un dessert

Codons la figure comme il est indiqué ci-contre. On peut choisir comme unité de longueur le rayon *OA* de la tarte (inutile que ce soit un paramètre).

Choisissons comme variable permettant de décrire la situation la longueur $x = OM$ avec x variant dans l'intervalle $[0\,;1]$



Avec ce choix d'unité et de variable, le quart de disque que représente la part de tarte a pour aire $\frac{\pi}{4}$, le triangle rectangle isocèle *OAB* a pour aire $\frac{1}{2}$ et le triangle rectangle isocèle *OMN* a pour aire $\frac{x^2}{2}$ (puisque son côté (*MN)* est parallèle au côté (*AB*) de *OAB*, le triangle *OMN* est une réduction du précédent dans le rapport $\frac{OM}{OA} = x$).

Le quart de tarte est partagé en deux morceaux de même aire lorsque l'aire de *OMN* est égale à la moitié de l'aire du quart de disque soit lorsque : $\frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}$ c'est-à-dire lorsque : $x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Une calculatrice indique que $0{,}8862 < \frac{\sqrt{\pi}}{2} < 0{,}8863$.

Une valeur approchée à 10^{-3} près de *x* est 0,886.

Avec le codage que nous avons choisi, le quart de tarte est équitablement partagé lorsque l'axe de coupe passe par le point *M* tel que $OM = \frac{\sqrt{\pi}}{2} OA$ soit $OM = 0{,}886.OA$ à 10^{-3} près.

7. Théorème de Gua.

Notons *a, b, c* les longueurs des côtés du coin du parallélépipède rectangle et rapportons l'espace à un repère dans lequel les sommets de ce coin ont pour coordonnées, respectivement, $A(a\,;0\,;0)$; $B(0\,;b\,;0)$; $C(0\,;0\,;c)$.

On sait que le volume *V* d'un tétraèdre s'exprime ainsi : $V = \frac{1}{3} \times (\text{hauteur}) \times (\text{aire base})$

Le tétraèdre est *OABC* peut être considéré comme étant de hauteur *OC, OB* ou *OA* et de base respectivement l'un des triangles rectangles, respectivement, *OAB* (d'aire $\frac{1}{2}ab$), *OAC* (d'aire $\frac{1}{2}ac$) ou *OBC* (d'aire $\frac{1}{2}bc$). De ce fait, son volume est égal à $\frac{1}{6}abc$.

Calculons ce même volume d'une quatrième façon :

Le plan (*ABC*) a dans le repère choisi pour équation cartésienne : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$.

On sait que la distance d'un point $M(x\,;y\,;z)$ à un plan d'équation cartésienne $ux+vy+wz+h=$

0

est donnée par la formule : $d=\frac{|\,ux+vy+wz+h|}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}$.

En la présente occurrence : $d\big(O\,;\,(ABC)\big)=\frac{|-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{c}\right)^2}}=\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$

Cette distance représente la hauteur issue de *O* dans le triangle *ABC*.

Le volume *V* de *OABC* peut s'exprimer ainsi : $V=\frac{1}{3}\times d\big(O\,;\,(ABC)\big)\times\big(\text{aire}(ABC)\big)$

On en déduit : $V=\frac{1}{3}\times d\big(O\,;\,(ABC)\big)\times\big(\text{aire}(ABC)\big)$

$\text{aire}(ABC)=\frac{3V}{d(O\,;(ABC))}=\frac{3\times\frac{abc}{6}}{\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}}$ soit : $\text{aire}(ABC)=\frac{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}{2}$

Il en résulte que :

$$\big(\text{aire}(ABC)\big)^2=\frac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{4}=\left(\frac{bc}{2}\right)^2+\left(\frac{ca}{2}\right)^2+\left(\frac{ab}{2}\right)^2$$

On retrouve le fait que le carré de l'aire de *ABC* est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces.