

Écrit 2-2024. Mayotte

Problème 1 : vrai, faux

1

1. Vrai. Un nombre dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang est un nombre rationnel. En l'occurrence, il s'agit du nombre : $\frac{2024}{1000} \times \sum_{k=0}^{+\infty} 10^{-4k} = \frac{1840}{909}$

2. Faux. Dans les deux cas, la quantité est multipliée par $1,02 \times 1,05 = 1,071$.

3. Faux. La moyenne, qui est un paramètre de position, augmente bien d'une unité mais l'écart-type, qui est un paramètre de dispersion, ne change pas.

4. Faux. Dans la factorielle de 21, il n'y a que 4 facteurs 5 (ceux de 5, 10, 15 et 20). Il en faudrait 6 pour que, en la divisant par 10^6 (qui a 6 facteurs 5), on trouve un entier.

5. Vrai. Il faut faire 7 pas dont 2 vers le haut et les autres vers la droite. Il y a $\binom{7}{2} = 21$ possibilités.

6. Faux. Car $P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$.

7. Faux. Soit m la proportion de malades dans la population.

La probabilité qu'un test choisi au hasard soit positif est : $0,96m + 0,06(1 - m) = 0,9m + 0,06$

La probabilité qu'une personne au test positif soit malade est $\frac{0,96m}{0,9m+0,06}$. On obtient un peu plus de 0,94 lorsque $m = 0,5$. La condition $m \geq 0,5$ est *suffisante* mais non *nécessaire*. On trouve $m \geq 0,36$ comme condition nécessaire.

8. **Vrai.** Le nombre de tirages possibles de deux boules est $\binom{n+7}{2} = \frac{(n+7)(n+6)}{2}$

La nombre de tirages unicolores est $\binom{n}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2} = \frac{n^2-n+18}{2}$

2

9. **Faux.** Car $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}$. La limite en plus l'infini est nulle.

10. **Vrai.** Car f est majorée en valeur absolue par $\frac{3}{\sqrt{x}}$, fonction qui a une limite nulle en plus l'infini.

11. Vrai.	$\int_0^{\pi} (e^x \cdot \cos(2 \cdot x)) dx \qquad \frac{e^{\pi}}{5} - \frac{1}{5}$ $\int e^x \cdot \cos(2 \cdot x) dx \qquad \frac{e^x \cdot \cos(2 \cdot x)}{5} + \frac{2 \cdot e^x \cdot \sin(2 \cdot x)}{5}$ <p>©gilbertjulia</p>
------------------	--

12. **Vrai.** Car $\tan(a + b) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

13. **Vrai.** Car $z_A = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i$. Les deux nombres complexes ont la même partie réelle.

14. **Faux.** L'ensemble en question est un cercle épointé de diamètre les points d'affixes $1 - 2i$ et 2 .

15. **Faux.** Comme en témoigne le contre-exemple : $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $z' = +\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problème 2 : Inégalités

Partie A.

3

<p>1.a La fonction h a pour dérivée la fonction définie par $h'(x) = 6x(x - 1)$ qui est négative entre 0 et 1 et positive ailleurs. La fonction h est croissante sur $]-\infty ; 0]$ et sur $[1 ; +\infty[$. Elle est décroissante sur $[0 ; 1]$. Elle a un maximum relatif en 0 qui vaut 1 et un minimum relatif en 1 qui vaut 0</p>	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black;">Define $h(x)=2 \cdot x^3-3 \cdot x^2+1$</td> <td style="text-align: right;"><i>Terminé</i></td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black;">$\frac{d}{dx}(h(x))$</td> <td style="text-align: right;">$6 \cdot x^2-6 \cdot x$</td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black;">factor($6 \cdot x^2-6 \cdot x$)</td> <td style="text-align: right;">$6 \cdot x \cdot (x-1)$</td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black;">factor($h(x)$)</td> <td style="text-align: right;">$(x-1)^2 \cdot (2 \cdot x+1)$</td> </tr> <tr> <td colspan="2" style="border-bottom: 1px solid black;">©gilbertjulia</td> </tr> </table>	Define $h(x)=2 \cdot x^3-3 \cdot x^2+1$	<i>Terminé</i>	$\frac{d}{dx}(h(x))$	$6 \cdot x^2-6 \cdot x$	factor($6 \cdot x^2-6 \cdot x$)	$6 \cdot x \cdot (x-1)$	factor($h(x)$)	$(x-1)^2 \cdot (2 \cdot x+1)$	©gilbertjulia	
Define $h(x)=2 \cdot x^3-3 \cdot x^2+1$	<i>Terminé</i>										
$\frac{d}{dx}(h(x))$	$6 \cdot x^2-6 \cdot x$										
factor($6 \cdot x^2-6 \cdot x$)	$6 \cdot x \cdot (x-1)$										
factor($h(x)$)	$(x-1)^2 \cdot (2 \cdot x+1)$										
©gilbertjulia											

1.b. La fonction h se factorise : $h(x) = (x - 1)^2(2x + 1)$

Elle est strictement négative sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$ et elle est positive sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$, strictement sur l'intervalle sauf aux points $-\frac{1}{2}$ et 1 où elle prend la valeur zéro.

<p>2. Dérivée de f calculée ci-contre. Cette dérivée est positive sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$. La fonction f est strictement croissante sur cet intervalle, de 0 à $+\infty$. De ce fait, elle est positive sur $[0 ; \frac{\pi}{2}]$.</p>	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td colspan="2" style="border-bottom: 1px solid black;">©gilbertjulia</td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black;">Define $f(x)=2 \cdot \sin(x)+\tan(x)-3 \cdot x$</td> <td style="text-align: right;"><i>Terminé</i></td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black;">$\frac{d}{dx}(f(x))$</td> <td style="text-align: right;">$\frac{2 \cdot (\cos(x))^3-3 \cdot (\cos(x))^2+1}{(\cos(x))^2}$</td> </tr> <tr> <td style="border-bottom: 1px solid black;">factor($2 \cdot (\cos(x))^3-3 \cdot (\cos(x))^2+1$)</td> <td style="text-align: right;">$(\cos(x)-1)^2 \cdot (2 \cdot \cos(x)+1)$</td> </tr> </table>	©gilbertjulia		Define $f(x)=2 \cdot \sin(x)+\tan(x)-3 \cdot x$	<i>Terminé</i>	$\frac{d}{dx}(f(x))$	$\frac{2 \cdot (\cos(x))^3-3 \cdot (\cos(x))^2+1}{(\cos(x))^2}$	factor($2 \cdot (\cos(x))^3-3 \cdot (\cos(x))^2+1$)	$(\cos(x)-1)^2 \cdot (2 \cdot \cos(x)+1)$
©gilbertjulia									
Define $f(x)=2 \cdot \sin(x)+\tan(x)-3 \cdot x$	<i>Terminé</i>								
$\frac{d}{dx}(f(x))$	$\frac{2 \cdot (\cos(x))^3-3 \cdot (\cos(x))^2+1}{(\cos(x))^2}$								
factor($2 \cdot (\cos(x))^3-3 \cdot (\cos(x))^2+1$)	$(\cos(x)-1)^2 \cdot (2 \cdot \cos(x)+1)$								
<p>L'allure de la représentation graphique de f sur un domaine plus grand que celui demandé (lequel se limite à $[0 ; \frac{\pi}{2}]$, tracé à gauche de l'asymptote d'équation $x = \frac{\pi}{2}$)</p>									

3. Puisque la fonction f est positive sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, on peut conclure que $2 \sin(x) + \tan(x) - 3x \geq 0$ pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.



Partie B.

<p>La fonction g a pour dérivée la fonction définie par $g'(x) = -2(\cos(x) - 1)^2$ qui est négative sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. La fonction g est décroissante sur cet intervalle, à partir de la valeur $g(0) = 0$. De ce fait, elle est négative sur $[0 ; +\infty[$.</p>	<pre> Define g(x)=sin(x)·(4-cos(x))-3·x Terminé d/dx(g(x)) -2·(cos(x))^2+4·cos(x)-2 factor(-2·(cos(x))^2+4·cos(x)-2) -2·(cos(x)-1)^2 g(0) 0 ©gilbertjulia </pre>
--	--

Puisque la fonction g est négative sur $[0 ; +\infty[$, on peut conclure que $\sin(x)(4 - \cos(x)) - 3x \leq 0$ pour tout x positif.

Partie C.

En faisant la synthèse des deux parties :

- $2 \sin(x) + \tan(x) - 3x \geq 0$ pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.
- $\sin(x)(4 - \cos(x)) - 3x \leq 0$ pour tout x positif.

On peut conclure que, pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(x)(4 - \cos(x)) \leq 3x \leq 2 \sin(x) + \tan(x)$

Lorsque $x = \frac{\pi}{6}$, on obtient : $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)(4 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)) \leq \frac{\pi}{2} \leq 2 \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

<p>Nous obtenons de cette façon un encadrement de Pi, soit par les valeurs exactes (ci-contre) peu significatives, soit par des valeurs décimales approchées de ces valeurs exactes :</p> <p style="text-align: center;">$3,133 < \pi < 3,155$</p>	<pre> ©gilbertjulia Define u(x)=2·sin(x)+tan(x) Terminé Define v(x)=sin(x)·(4-cos(x)) Terminé [2·u(pi/6) 2·v(pi/6)] [2·(sqrt(3)+3) -(sqrt(3)-8)] [2·u(pi/6) 2·v(pi/6)] [3.1547 3.13397] </pre>
---	--

Problème 3 : Equation différentielle

5

<p>1. On vérifie ci-contre que la fonction :</p> $t \mapsto g(t) = t \cdot e^{-kt}$ <p>est une solution particulière sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation différentielle (E).</p> <p>NB. Compte tenu du contexte de l'exercice, on résout sur $[0 ; +\infty[$ puisqu'il est dit que « t est exprimé en heures avec $t \geq 0$ »</p>	<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Define $g(t)=t \cdot e^{-k \cdot t}$</td> <td style="text-align: right; padding: 5px;"><i>Terminé</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\frac{d}{dt}(g(t))+k \cdot g(t)$</td> <td style="text-align: right; padding: 5px;">$e^{-k \cdot t}$</td> </tr> </table>	Define $g(t)=t \cdot e^{-k \cdot t}$	<i>Terminé</i>	$\frac{d}{dt}(g(t))+k \cdot g(t)$	$e^{-k \cdot t}$
Define $g(t)=t \cdot e^{-k \cdot t}$	<i>Terminé</i>				
$\frac{d}{dt}(g(t))+k \cdot g(t)$	$e^{-k \cdot t}$				

2. L'équation homogène (EH) associée à (E) est l'équation $y' + ky = 0$, équation qui a pour solutions les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ de la forme (où C est une constante réelle arbitraire) :

$$t \mapsto C \cdot e^{-kt}$$

3. Les solutions de l'équation (E) sont les fonctions qui sont la somme d'une solution particulière de (E) (on en a trouvée une à la question 1) et de la solution générale de l'équation homogène associée, obtenue à la question 2.

Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies sur $[0 ; +\infty[$ de la forme :

$$t \mapsto t \cdot e^{-kt} + C \cdot e^{-kt} = (t + C)e^{-kt}$$

Une fonction f est solution de (E) si et seulement si il existe un réel α tel que $f(t) = (t + \alpha)e^{-kt}$, en identifiant la constante α avec la constante C de notre résolution.

<p>4. De façon générale, si f est la fonction définie par $f(t) = (t + \alpha)e^{-kt}$, sa valeur en zéro est $f(0) = \alpha$ et sa dérivée est la fonction $f'(t) = (-kt - \alpha k + 1)e^{-kt}$,</p>	<p>©gilbertjulia</p> <table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">Define $f(t)=(t+a) \cdot e^{-k \cdot t}$</td> <td style="text-align: right; padding: 5px;"><i>Terminé</i></td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$f(0)$</td> <td style="text-align: right; padding: 5px;">a</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$\frac{d}{dt}(f(t))$</td> <td style="text-align: right; padding: 5px;">$(-k \cdot t - a \cdot k + 1) \cdot e^{-k \cdot t}$</td> </tr> </table>	Define $f(t)=(t+a) \cdot e^{-k \cdot t}$	<i>Terminé</i>	$f(0)$	a	$\frac{d}{dt}(f(t))$	$(-k \cdot t - a \cdot k + 1) \cdot e^{-k \cdot t}$
Define $f(t)=(t+a) \cdot e^{-k \cdot t}$	<i>Terminé</i>						
$f(0)$	a						
$\frac{d}{dt}(f(t))$	$(-k \cdot t - a \cdot k + 1) \cdot e^{-k \cdot t}$						

Si la quantité initiale est une unité, alors $\alpha = 1$ et si le maximum est atteint au bout d'une heure :

$$f'(1) = (-k - k + 1)e^{-k} = (1 - 2k)e^{-k} = 0$$

En conséquence : $k = \frac{1}{2}$ et f est la fonction : $f(t) = (t + 1)e^{-\frac{t}{2}}$

6

5 et 6. Comme indiqué dans l'énoncé lui-même, f admet un maximum en 1. Elle est croissante sur $[0 ; 1]$ puis décroissante sur $[1 ; +\infty[$ avec une limite nulle à l'infini (en vertu du théorème des croissances comparées). Ce qui « concrètement » signifie qu'à long terme la totalité du médicament est éliminée.

<p>7. Une recherche empirique montre que :</p> $f\left(19 + \frac{53}{60}\right) > 0,001$ $f\left(19 + \frac{54}{60}\right) < 0,001$ <p>Le seuil d'élimination se situe « selon le modèle » à 19 heures et 54 minutes. (Disons 20 heures ...)</p>	<p style="text-align: right;"><i>Terminé</i></p> <p>Define $f(t)=(t+1) \cdot e^{-\frac{t}{2}}$</p> <p>▲ solve($f(t)=0.001,t$) $t=0.999393$ or $t=19.8945$</p> <p>$f\left(19+\frac{53}{60}\right)$ 0.001005</p> <p>$f\left(19+\frac{54}{60}\right)$ 0.000998</p> <p>©gilbertjulia</p>
--	---

8. Vu que f est solution de l'équation différentielle $y' + \frac{1}{2}y = e^{-\frac{t}{2}}$, la fonction f vérifie la relation :

$f(t) = -2 \cdot f'(t) + 2e^{-\frac{t}{2}}$, ce qui permet de construire une primitive de f , la fonction :

$$F(t) = -2 \cdot f(t) - 4e^{-\frac{t}{2}} = (-2t - 6)e^{-\frac{t}{2}}$$

<p>On obtient 0,851 comme valeur moyenne de la concentration en médicament pendant les six premières heures.</p>	<p>©gilbertjulia</p> <p>$\int_0^6 f(t) dt$ $6-18 \cdot e^{-3}$</p> <p>$\int_0^6 f(t) dt$ 5.10383</p> <p>$\frac{1}{6} \cdot \int_0^6 f(t) dt$ 0.850639</p>
--	--

Elle est négative sur $]-\infty ; -\frac{1}{2}]$ et elle est positive sur $[-\frac{1}{2} ; +\infty[$, strictement sur l'intervalle sauf aux points $-\frac{1}{2}$ et 1 où elle prend la valeur zéro.

Problème 4 : Géométrie dans l'espace

7

Partie A

1. Exprimons les coordonnées du vecteur \overrightarrow{BA} : $\begin{pmatrix} x_A - x_B \\ y_A - y_B \\ z_A - z_B \end{pmatrix}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = a(x_A - x_B) + b(y_A - y_B) + c(z_A - z_B) = ax_A + by_A + cz_A - (ax_B + by_B + cz_B)$$

Le point B étant un point du plan \mathcal{P} , ses coordonnées vérifient l'équation $ax_B + by_B + cz_B + d = 0$ et en conséquence $-(ax_B + by_B + cz_B) = d$. On obtient alors :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = ax_A + by_A + cz_A + d$$

2. En utilisant la relation de Chasles : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{n} \cdot (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HA}) = \vec{n} \cdot \overrightarrow{BH} + \vec{n} \cdot \overrightarrow{HA}$

Les deux points B et H étant dans le plan \mathcal{P} , le vecteur \overrightarrow{BH} appartient à la direction de \mathcal{P} . Les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{BH} sont des vecteurs orthogonaux et leur produit scalaire est nul.

Le point H étant le projeté orthogonal de A sur \mathcal{P} , les vecteurs \vec{n} et \overrightarrow{HA} sont colinéaires. Leur produit scalaire est égal, au signe près (suivant qu'ils sont de même sens ou non), au produit de leurs normes.

On obtient : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA} = \vec{n} \cdot \overrightarrow{HA} = \pm \|\vec{n}\| \cdot \|\overrightarrow{HA}\|$ et en conséquence :

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA}| = \|\vec{n}\| \cdot \|\overrightarrow{HA}\| \text{ sachant que : } \|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

3. La distance du point A au plan \mathcal{P} est la distance entre ce point et son projeté orthogonal H sur le plan \mathcal{P} :

$$d(A; \mathcal{P}) = \|\overrightarrow{HA}\| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{BA}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Partie B

9

1.a. Les côtés du quadrilatère $DIFJ$ sont tous des segments joignant un sommet d'une face au milieu d'un côté opposé, ils sont de ce fait isométriques. Il s'agit donc d'un losange.

La longueur de chacun d'eux est égale à $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

De plus, les diagonales de ce losange ont pour mesures $DF = \sqrt{3}$ et $IJ = \sqrt{2}$.

L'aire du losange est donc : $\frac{1}{2} \times DF \times IJ = \frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

1.b. Le point I a pour coordonnées $(1; \frac{1}{2}; 0)$ et le point F a pour coordonnées $(1; 1; 1)$.

Le plan d'équation $x - 2y + z = 0$ est un plan qui passe par l'origine D du repère, et les coordonnées de I , tout comme celles de F , en vérifient l'équation. Ce plan passe donc par les trois points non alignés D, I, F , qui le déterminent.

Le plan d'équation $x - 2y + z = 0$ est le plan (DIF) .

1.c. Un vecteur normal au plan est le vecteur $\vec{n} : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, vecteur dont la norme est égale à $\sqrt{6}$.

Le point E a pour coordonnées $(1; 0; 1)$.

$$d(E; (DIF)) = \frac{|x_E - 2y_E + z_E|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

1.d. La pyramide $EDIF$ a pour base la moitié du losange déjà vu (donc un triangle d'aire $\frac{\sqrt{6}}{4}$) et pour hauteur $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Son volume est : $\frac{1}{3} \times (\text{aire base}) \times (\text{hauteur}) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1}{6}$

2.a. Les coordonnées du point K sont $(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$ et celles de E sont $(1; 0; 1)$.

Exprimons les coordonnées du vecteur \overrightarrow{EK} :
$$\overrightarrow{EK} : \begin{pmatrix} x_K - x_E \\ y_K - y_E \\ z_K - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

Nous constatons que : $\overrightarrow{EK} = -\frac{1}{2}\vec{n}$. Le vecteur \overrightarrow{EK} directeur de (EK) est colinéaire à \vec{n} . C'est donc un vecteur normal au plan (DIF) : **la droite (EK) est orthogonale au plan (DIF) .**

10

2.b. Chacun des deux vecteurs, \overrightarrow{EK} ou \vec{n} au choix, est un vecteur directeur de la droite (EK) .

$$M(x; y; z) \in (EK) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{EM} = \lambda \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$$

2.c. Le point ci-dessus de paramètre λ appartient au plan (DIF) si et seulement si l'équation de ce plan est vérifiée : $(1 + \lambda) - 2(-2\lambda) + (1 + \lambda) = 0$ soit $6\lambda + 2 = 0$

On obtient $\lambda = -\frac{1}{3}$. Le point d'intersection de (EK) avec (DIF) est le point $M \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3} \right)$.

2.d. Calculons la distance MK : $MK = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

La distance du point M au centre de la sphère S est égale au rayon :

Le point M appartient à la sphère S .

2.e. La droite (MK) est orthogonale au plan (DIF) , ce qui fait que le point M n'est autre que le projeté orthogonal du centre de la sphère sur le plan (DIF) : **la sphère est tangente en M au plan (DIF) .**