# Ecrit 2-2023. Mayotte

## Problème 1 : vrai, faux

**1. Faux.** La proportion est $\frac{362}{410} \times 0{,}46 = 0{,}327$ à 0,001 près. Cette proportion est égale à un peu moins d'un tiers.

**2.Vrai.** Le nombre de possibilités est $\binom{5}{2} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 60$

**3. Vrai.** Car $P(\bar{A}) = 0{,}8$ ; $P(\bar{B}) = 0{,}7$ et que $P(\bar{A}) \times P(\bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})$. Les évènements contraires sont indépendants donc $A$ et $B$ le sont aussi.

**4.Vrai.** Car $0{,}97^{22} = 0{,}512$ et $0{,}97^{23} = 0{,}496$ à 0,001 près. C'est donc au bout de 23 parties que la probabilité de ne jamais en gagner une passe sous le seuil 0,5.

**5. Vrai.** En lançant une fois le dé, la probabilité de gagner 6 € est égale à $\frac{1}{6}$ et l'espérance de gain (indépendamment de la mise) est égale à 1. Par linéarité de l'espérance, si on lance 20 fois le dé, l'espérance de gain pour les 20 lancers est égale à 20. Compte tenu d'une mise de 15 €, l'espérance de gain relatif est donc égale à 5.

| | |
|---|---|
| **6. Vrai.** D'après l'affichage d'un logiciel de calcul formel. | $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ $\qquad$ $\frac{(\sqrt{3}+1)\cdot\sqrt{2}}{4}$ |

**7. Vrai** : $\cos(3x) = \sin(x) \iff \cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \iff \begin{cases} 3x \equiv \dfrac{\pi}{2} - x \ (2\pi) \\ \text{ou} \\ 3x \equiv -\dfrac{\pi}{2} + x \ (2\pi) \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} 4x \equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi) \\ \text{ou} \\ 2x \equiv -\frac{\pi}{2} \ (2\pi) \end{cases}$ c'est-à-dire qu'il existe un entier $k$ : $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$

Entre 0 et $2\pi$ on trouve $\frac{\pi}{8}$ ; $\frac{5\pi}{8}$ ; $\frac{9\pi}{8}$ ; $\frac{13\pi}{8}$ ; $\frac{3\pi}{4}$ ; $\frac{7\pi}{4}$ ce qui fait bien six solutions.

**8. Faux.** La fonction $f$ peut être égale à une constante pour $x < 0$ et à une autre constante, différente de la première, pour $x > 0$. Lorsqu'une fonction a une dérivée nulle sur une réunion d'intervalles disjoints, il se peut qu'elle prenne des valeurs constantes différentes sur chacun des intervalles.

**9. Vrai.** Lorsqu'un polynôme est à coefficients réels, ses racines complexes sont conjuguées deux à deux.

**10. Vrai.** Car $f$ est majorée en valeur absolue par $\frac{3}{\sqrt{x}}$, fonction qui a une limite nulle en plus l'infini.

| | |
|---|---|
| **11. Vrai.**<br>Si l'on se fie à un logiciel de calcul formel. | $\int \frac{\ln(t)}{t}\,dt$    $\frac{(\ln(t))^2}{2}$<br>$\int_1^{e^n} \frac{\ln(t)}{t}\,dt$    $\frac{n^2}{2}$<br>©gilbertjulia |

**12. Vrai.** Car la condition indiquée équivaut à $|z - i| = 1$, ce qui caractérise le cercle en question.

**13. Vrai.** $(n+1)K_n = \int_1^e \left[\frac{(n+1)}{x}(\ln x)^n\right] \times \frac{1}{x} dx = \left[(\ln x)^{n+1} \times \left(\frac{1}{x}\right)\right]_1^e + \int_1^e \frac{(\ln x)^{n+1}}{x^2} dx = \frac{1}{e} + K_{n+1}.$

**14. Vrai.** L'algorithme construit les puissances successives de 2.

```
>>> def surprise(n):
        k=0
        u=1
        while k<n:
                k=k+1
                u=u*2
                print(u)
        return u

>>> surprise(4)
2
4
8
16
16
```

**15. Vrai.** Car $n^3 - n = (n-1) \times n \times (n+1)$ et, sur trois entiers consécutifs, il y en a exactement un qui est multiple de 3 et au moins un qui est multiple de 2.

**16. Vrai.** Car $3^5 \equiv 1\ (11)$ donc $3^{2020} \equiv 1\ (11)$ aussi et $3^{2023} \equiv 5\ (11)$ . Si on ajoute 6, on obtient un multiple de 11.

```
>>> def restemodulo():
        k=1
        u=3
        while u!=1:
                u=(3*u)%11
                k=k+1
                print("3 puissance",k,"congru à",u,"modulo 11")

>>> restemodulo()
3 puissance 2 congru à 9 modulo 11
3 puissance 3 congru à 5 modulo 11
3 puissance 4 congru à 4 modulo 11
3 puissance 5 congru à 1 modulo 11
```

**17. Vrai.** Car $7 \times (2k+1) - 2 \times (7k+3) = 1$, la relation de Bézout est vérifiée pour les nombres $(2k+1)$ et $(7k+3)$. Ils sont premiers entre eux.

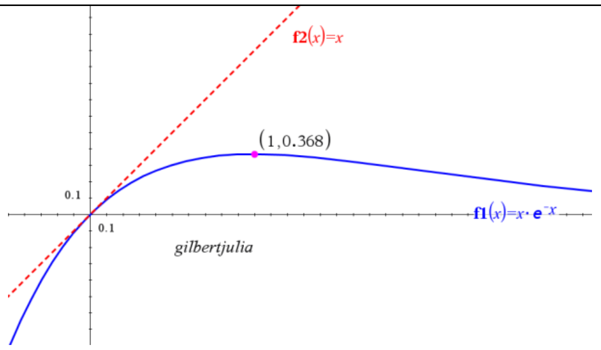
**18. Faux.** Car 51 et 39 sont tous les deux multiples de 3 : leur PGCD est égal à 3, la relation de Bézout ne peut pas être vérifiée pour ces entiers.

**19. Faux.** Si c'était le cas, il existerait deux entiers naturels non nuls *p* et *q* tels que $q.\ln 2 = p.\ln 3$ c'est-à-dire tels que $2^q = 3^p$. Or, les entiers 2 et 3 sont premiers entre eux et il en est de même de leurs puissances strictement positives, quelles qu'elles soient. Il est impossible que des puissances strictement positives de 2 et de 3 coïncident.

**20. Vrai.** Une récurrence facile laissée au lecteur montrerait que $u_n = (n+1)^2$.

# Problème 2 : Suites

## Partie A. Etude de $f$

| | |
|---|---|
| **1.** La fonction $f$ apparaît comme étant une fonction strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;1]$ puis strictement décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ avec un maximum en 1 qui est égal à $\frac{1}{\mathrm{e}}$.<br>L'équation $f(x)=x$ admet une solution unique qui est $x=0$.<br>Deux choses intéressantes à retenir : |  |
| • L'intervalle $[0\,;1]$ est un intervalle stable par $f$ (son image est l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{1}{\mathrm{e}}\right]$).<br>• Pour tout réel $x$ de $[0\,;\,+\infty[$ : $0\leq f(x)\leq x$ (car dans cet intervalle $0\leq \mathrm{e}^{-x}\leq 1$) et les inégalités sont strictes quand $x>0$. C'est en particulier le cas pour tout réel $x$ de $[0\,;1]$. | Define $f(x)=x\cdot \mathrm{e}^{-x}$ *Terminé*<br>$\frac{d}{dx}(f(x))$ $(1-x)\cdot \mathrm{e}^{-x}$<br>$\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x))$ $-\infty$<br>$\lim\limits_{x\to \infty}(f(x))$ $0$ |

## Partie B.

En raison de la stabilité de l'intervalle $[0\,;1]$, et du fait que pour tout réel $x$ tel que $0<x\leq 1$ les inégalités strictes $0<f(x)<x$ sont vérifiées, on peut dire que :

- Dès lors que $u_0\in\,]0\,;1]$, tous les termes de la suite $(u_n)$ appartiennent à $]0\,;1]$.
- Pour tout indice $n$ : $0<u_{n+1}=f(u_n)<u_n$ en raison des inégalités strictes vues à propos de $f$.

La suite $(u_n)$ apparaît comme une suite strictement décroissante de termes strictement positifs. Etant décroissante et minorée par zéro, cette suite est convergente.

Elle ne peut converger que vers une solution de l'équation $f(x)=x$, et comme cette équation n'a qu'une seule solution, égale à zéro, la suite $(u_n)$ converge vers zéro.

## Partie C.

La suite $(S_n)$ étant définie pour tout indice *n* comme somme des termes d'une suite dont les termes sont strictement positifs est une suite strictement croissante.

Montrons que pour tout entier naturel *n* : $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$.

5 *Initialisation :* Au rang zéro : $u_{0+1} = u_1 = f(1) = f(0) = \frac{1}{\mathrm{e}}$ et d'autre part $\mathrm{e}^{-S_0} = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}}$. Il y a bien égalité : $u_1 = \mathrm{e}^{-S_0} = \mathrm{e}^{-1}$, la relation à démontrer est vérifiée au rang zéro.

*Hérédité* : Supposons que pour un certain rang $u_n = \mathrm{e}^{-S_{n-1}}$

Alors au rang suivant : $u_{n+1} = u_n \times \mathrm{e}^{-u_n} = \mathrm{e}^{-S_{n-1}} \times \mathrm{e}^{-u_n} = \mathrm{e}^{-S_{n-1}-u_n} = \mathrm{e}^{-S_n}$.

La relation à démontrer est encore vérifiée au rang suivant.

Etant initialisée au rang zéro et héréditaire, la relation « $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$ » est vérifiée pour tout entier naturel.

La relation $u_{n+1} = \mathrm{e}^{-S_n}$ est équivalente à $S_n = -\ln(u_{n+1})$.

La suite $(u_n)$ convergeant vers zéro, son logarithme a pour limite moins l'infini quand *n* tend vers plus l'infini et on en déduit que : $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$

# Problème 3 : Equation différentielle

**1.** La fonction $h'$ est solution de l'équation homogène du premier ordre $y' + 2my = 0$.

Cette équation a pour solutions les fonctions de la forme : $x \longmapsto h'(x) = K.\mathrm{e}^{-2mx}$ où $K$ est une constante réelle.

6

Par primitivation, les fonctions $h$ qui vérifient la propriété $(P_m)$ sont les fonctions de la forme :

$x \longmapsto h(x) = -\frac{1}{2m}K.\mathrm{e}^{-2mx} + C_1$ où $K$ et $C_1$ sont deux constantes réelles.

En posant $-\frac{1}{2m}K = C$, on obtient de façon équivalente que les fonctions $h$ qui vérifient la propriété $(P_m)$ sont les fonctions de la forme : $x \longmapsto h(x) = C.\mathrm{e}^{-2mx} + C_1$ où $C$ et $C_1$ sont deux constantes réelles.

**2.** Posons : $f(x) = h(x) \times \mathrm{e}^{mx}$.

Alors $f'(x) = (h'(x) + m.h(x)).\mathrm{e}^{mx}$ et $f''(x) = \left(h''^{(x)} + 2m.h'^{(x)} + m^2h(x)\right).\mathrm{e}^{mx}$

La fonction $f$ vérifie l'équation $(E_m)$ si et seulement si pour tout réel $x$ : $f''(x) - m^2f(x) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout réel $x$ :$\left(h''^{(x)} + 2m.h'^{(x)} + m^2h(x)\right).\mathrm{e}^{mx} - m^2h(x).\mathrm{e}^{mx} = 0$.

Puisque $\mathrm{e}^{mx}$ est non nul pour tout $x$, cette condition est équivalente à : $h''^{(x)} + 2m.h'^{(x)} = 0$.

On en déduit que $f$ vérifie l'équation $(E_m)$ si et seulement si la fonction $h$ vérifie la propriété $(P_m)$.

**3.** Compte tenu de cette équivalence, les solutions de l'équation $(E_m)$ sont les fonctions de la forme :

$x \longmapsto f(x) = h(x) \times \mathrm{e}^{mx} = (C.\mathrm{e}^{-2mx} + C_1) \times \mathrm{e}^{mx} = C.\mathrm{e}^{-mx} + C_1.\mathrm{e}^{mx}$ où $C$ et $C_1$ sont deux constantes réelles.

**4.** On applique la question précédente avec $m = 0{,}5$.

La fonction recherchée est de la forme $t \longmapsto x(t) = C.\,\mathrm{e}^{-0,5t} + C_1.\,\mathrm{e}^{0,5t}$.

En tenant compte des conditions initiales : $\begin{cases} C + C_1 = 4 \\ -0{,}5C + 0{,}5C_1 = 0 \end{cases}$ donc $C = C_1 = 2$.

7 La fonction recherchée est la fonction : $t \longmapsto x(t) = 2.\,\mathrm{e}^{-0,5t} + 2.\,\mathrm{e}^{0,5t}$.

# Problème 4 : Géométrie dans l'espace

## Partie A

8

**1.** Les deux plans *P* et *P'* ont pour vecteurs normaux respectifs les vecteurs $\vec{n} : \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n'} : \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ qui sont des vecteurs non colinéaires : *P* et *P'* sont sécants.

Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient aux deux plans *P* et *P'* si et seulement si $\begin{cases} 2x+5y-z+20=0 \\ -2x+y+z-8=0 \end{cases}$ soit si et seulement si : $\begin{cases} 5y-z=-2x-20 \\ y+z=2x+8 \end{cases}$ soit $\begin{cases} 6y=-12 \\ z=2x+10 \end{cases}$.

En choisissant $x=\lambda$ comme paramètre, un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à la droite *D* d'intersection des deux plans *P* et *P'* si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-2 \\ z=2\lambda+10 \end{cases}$. Ce qui amène à caractériser la droite d'intersection comme étant la droite passant par le point de coordonnées $(0\,;\,-2\,;10)$ et dont un vecteur directeur est le vecteur $\vec{d} : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

**2 et 3.** Le point de paramètre $\lambda=-4$ est le point de coordonnées $(-4\,;\,-2\,;2)$ : c'est le point *A* de l'énoncé. On peut caractériser la droite *D* à l'aide de ce point *A* et du même vecteur directeur $\vec{d}$ déjà utilisé. Ce qui amène au système d'équations paramétriques équivalent à celui que nous avons proposé :

Un point $M(x\,;y\,;z)$ appartient à la droite *D* d'intersection des deux plans *P* et *P'* si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ : $\begin{cases} x=-4+t \\ y=-2 \\ z=2+2t \end{cases}$.

## Partie B

**1.** La droite $\Delta$ est la droite passant par le point *B* de coordonnées $(5\,;2\,;0)$ et dont un vecteur directeur est le vecteur $\overrightarrow{d'}$ : $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.

Les vecteurs directeurs $\vec{d}$ : $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d'}$ : $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ des deux droites sont non colinéaires, donc ces droites ne sont pas parallèles.

**2.** Cherchons si elles ont un point commun $M(x\,;y\,;z)$. C'est le cas si et seulement s'il existe deux réels *t* et *u* vérifiant l'un le système d'équations paramétriques de *D* et l'autre celui de $\Delta$ :

$$\begin{cases} x = -4 + t = 5 \\ y = -2 = 2 + u. \\ z = 2 + 2t = u \end{cases}$$

On est conduit à : $\begin{cases} t = 1 \\ u = -4 \\ 2 + 2t = u \end{cases}$ et la troisième équation est incompatible avec les valeurs candidates de *t* et de *u* : les deux droites n'ont aucun point commun, elles ne sont pas sécantes.

**3.** N'étant ni parallèles ni sécantes, elles sont non coplanaires.

## Partie C

**1.** Soit $I$ : $\begin{cases} x_I = -4 + t \\ y_I = -2 \\ z_I = 2 + 2t \end{cases}$ un point de *D* de paramètre *t*.

Soit $J$ : $\begin{cases} x_J = 5 \\ y_J = 2 + u \\ z_J = u \end{cases}$ un point de $\Delta$ de paramètre *u* (nécessairement distinct de *I* car les deux droites n'ont pas de point commun).

Exprimons les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ}$ :

$$\begin{pmatrix} x_J - x_I \\ y_J - y_I \\ z_J - z_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-4+t) \\ (2+u)-(-2) \\ u-(2+2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-(-4+t) \\ (2+u)-(-2) \\ u-(2+2t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-t \\ 4+u \\ u-2t-2 \end{pmatrix}$$

La droite (*IJ*) est perpendiculaire à la fois à *D* et à $\Delta$ si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ est orthogonal à la fois à un vecteur directeur de *D* et à un vecteur directeur de $\Delta$.



Ce qui amène aux conditions : $\begin{cases} \overrightarrow{IJ}.\vec{d} = 0 \\ \overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{d'} = 0 \end{cases}$ où $\vec{d}$ : $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{d'}$ : $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs directeurs de *D* et $\Delta$ que nous avons vus.

Nous obtenons : $\begin{cases} (9-t)+2(u-2t-2\,)=0 \\ (4+u)+(u-2t-2)=0 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} -5t+2u+5=0 \\ -2t+2u+2=0 \end{cases}$ ce qui donne : $t=1\,;u=0$

Le point *I* est le point de coordonnées : $\begin{cases} x_I = -3 \\ y_I = -2 \\ z_I = 4 \end{cases}$ et le point *J* est le point de coordonnées : $\begin{cases} x_J = 5 \\ y_J = 2. \\ z_J = 0 \end{cases}$

La droite (*IJ*) est l'unique droite perpendiculaire commune aux droites *D* et $\Delta$.

On vérifie qu'alors $\overrightarrow{IJ}$: $\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ et que $\left\|\overrightarrow{IJ}\right\| = 4\sqrt{4+1+1} = 4\sqrt{6}$, ce qui représente la distance entre la droite *D* et la droite $\Delta$.