Troisième Concours-2024. Problème 2
Quelques modèles de dynamique d'une population

I. Le modèle logistique discret

Le cas $\mathbf{0 < a \leq 1}$

1. Considérons la fonction du second degré f_1 définie sur $[0\,;1]$ par : $f_1(x) = x(1-x)$.

- Elle est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ de $f_1(0) = 0$ jusqu'à $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.
- Elle est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ de $f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$ jusqu'à $f_1(1) = 0$.

L'image par f_1 de l'intervalle $[0\,;1]$ est l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{4}\right]$, intervalle qui est inclus dans $[0\,;1]$.

(L'intervalle $[0\,;1]$ est donc un intervalle stable par *f*)

Pour tout *a* tel que $0 < a \leq 1$, la fonction f_a est proportionnelle, dans le rapport *a*, à la fonction f_1.
De ce fait elle admet le même sens de variation :

- Elle est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\frac{1}{2}\right]$ de $f_a(0) = 0$ jusqu'à $f_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}$.
- Elle est décroissante sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}\,;1\right]$ de $f_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4}$ jusqu'à $f_a(1) = 0$.

L'image par f_a de l'intervalle $[0\,;1]$ est l'intervalle $\left[0\,;\frac{a}{4}\right]$, intervalle qui est inclus dans $\left[0\,;\frac{1}{4}\right]$ donc dans $[0\,;1]$. (L'intervalle $[0\,;1]$ est donc un intervalle stable par *f*).

2. La **stabilité par $\boldsymbol{f_a}$** de l'intervalle $[0\,;1]$ assure que si $v_0 \in [0\,;1]$, alors tous les termes de la suite la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont définis et appartiennent à $[0\,;1]$.

3. Supposons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente vers une limite ℓ, appartenant nécessairement à l'intervalle fermé $[0\,;1]$. Passons à la limite dans la relation de récurrence $v_{n+1} = f_a(v_n)$.

D'une part, $\lim\limits_{n\to\infty} v_{n+1} = \ell$ car un décalage d'indice n'influe pas sur la valeur de la limite d'une suite.

D'autre part, en raison de la **continuité** de *f* sur $[0\,;1]$ et en particulier en ℓ, $\lim\limits_{n\to\infty} f_a(v_n) = f_a(\ell)$.

En conséquence, ℓ vérifie la relation $f_a(\ell) = \ell$.

2 Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, elle converge nécessairement vers un point fixe de f_a.

4. Cherchons les points fixes de f_a, c'est-à-dire les réels *x* qui vérifient la relation $f_a(x) = x$, en considérant ceux qui sont dans l'intervalle $[0\,;1]$:

$$f_a(x) = x \iff ax(1-x) = x \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{a-1}{a} = 1 - \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

Or, pour tout réel *a* $0 < a \leq 1$, $\frac{a-1}{a} \leq 0$.

Il n'existe dans l'intervalle $[0\,;1]$ qu'un et un seul point fixe qui est le point fixe zéro.

5. Pour tout réel *x* de l'intervalle $[0\,;1]$, $g_1(x) = f_1(x) - x = -x^2$, ce qui montre que sur cet intervalle $g_1(x) \leq 0$.

Pour tout réel *a* tel que $0 < a \leq 1$, la relation $f_a(x) \leq f_1(x)$, montre que, *a fortiori*, sur l'intervalle $[0\,;1]$, $\quad g_a(x) = f_a(x) - x \leq f_1(x) - x = g_1(x) \leq 0$

C'est-à-dire que l'inégalité $f_a(x) \leq x$ est vérifiée.

6. Pour tout indice *n*, appliquons l'inégalité précédente pour $x = v_n$.

On obtient : $v_{n+1} = f_a(v_n) \leq v_n$, ce qui montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.

7. Etant décroissante et minorée (par 0), la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et nous avons montré qu'alors la limite est nécessairement zéro.

8. Selon ce modèle, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro, la population étudiée est vouée à l'extinction.

Le cas $a = \frac{5}{2}$

9. $f_{\frac{5}{2}}(x) = x \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\frac{5}{2}-1}{\frac{5}{2}} = \dfrac{3}{5} \end{cases}$ Le deuxième point fixe observé dans la partie précédente appartient maintenant lui aussi à l'intervalle $[0\,;1]$. Il y a donc deux points fixes dans cet intervalle qui sont 0 et $\frac{3}{5}$.

10 et 11. Un exemple d'algorithme Python permettant de calculer les premiers termes de la suite.

12. Graphique laissé au lecteur

```
>>> def modele(n):
        v=1/2
        for k in range(0,n+1):
                print("le terme de rang",k,"est",v)
                v=(5/2)*v*(1-v)


>>> modele(10)
le terme de rang 0 est 0.5
le terme de rang 1 est 0.625
le terme de rang 2 est 0.5859375
le terme de rang 3 est 0.606536865234375
le terme de rang 4 est 0.5966247408650815
le terme de rang 5 est 0.6016591486318896
le terme de rang 6 est 0.5991635437485985
le terme de rang 7 est 0.6004164789780495
le terme de rang 8 est 0.5997913268741273
le terme de rang 9 est 0.6001042277017528
le terme de rang 10 est 0.599947858990589
>>>
```

13. Successivement, avec TI-Nspire CAS, la fonction f, la fonction $f \circ f$ et la fonction h que l'on a factorisée. Il se vérifie que l'on obtient l'expression fournie par l'énoncé.	Define $f(a,x)=a\cdot x\cdot(1-x)$ — *Terminé* $f\left(\frac{5}{2},x\right)$ — $\frac{-5\cdot x\cdot(x-1)}{2}$ $f\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2},x\right)\right)$ — $\frac{-25\cdot x\cdot(x-1)\cdot(5\cdot x^2-5\cdot x+2)}{8}$ Define $h(x)=f\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2},x\right)\right)-x$ — *Terminé* $h(x)$ — $\frac{-x\cdot(125\cdot x^3-250\cdot x^2+175\cdot x-42)}{8}$ factor$(h(x),x)$ — $\frac{-x\cdot(5\cdot x-3)\cdot(25\cdot x^2-35\cdot x+14)}{8}$ ©gilbertjulia
La fonction f est croissante sur $\left[\frac{2}{5}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ de $\frac{3}{5}$ jusqu'à $\frac{5}{8}$ et décroissante $\left[\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$ de $\frac{5}{8}$ jusqu'à $\frac{3}{5}$.	$f\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)$ — $\frac{5}{8}$ $f\left(\frac{5}{2},\frac{2}{5}\right)$ — $\frac{3}{5}$ $f\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ — $\frac{75}{128}$ $f\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)\right)$ — 0.585938

En conséquence, $f \circ f$ est décroissante sur $\left[\frac{2}{5}\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ de $\frac{3}{5}$ jusqu'à $\frac{75}{128}$ puis croissante sur $\left[\frac{1}{2}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$ de $\frac{75}{128}$ jusqu'à $\frac{3}{5}$.

L'image par $f \circ f$ de l'intervalle $\left[\frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$ est l'intervalle $\left[\frac{75}{128}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$ qui est inclus dans $\left[\frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$. L'intervalle $\left[\frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$ est donc un intervalle stable par $f \circ f$ (résultat admis par l'énoncé dans la **question 16**).

14. $f \circ f(x) = x \iff h(x) = 0 \iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = \frac{3}{5} \end{cases}$. (L'équation au second degré $25x^2 - 35x + 14 = 0$, quant à elle n'a pas de solution). La fonction $f \circ f$ a exactement les mêmes points fixes que f.

15. Sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{3}{5}\right]$, la fonction $h(x)$ est du même signe que $-(5x-3)$. Elle est donc positive sur cet intervalle. En conséquence, pour tout x de l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{3}{5}\right]$, $f \circ f(x) \geq x$.

16. « Admettons » la stabilité de l'intervalle $\left[\frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$ par $f \circ f$. Dès lors que $v_0 = \frac{1}{2} \in \left[\frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$, cette stabilité assure que tous les termes v_{2p} de rang pair appartiennent à ce même intervalle.

En effet, si on considère les termes pairs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $v_{2p+2} = f(v_{2p+1}) = f\left((f v_{2p})\right)$.

Les termes de la suite $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ appartiennent à $\left[\frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$ et vérifient la relation de récurrence : $v_{2p+2} = f \circ f(v_{2p})$

D'après la question précédente que l'on applique avec $x = v_{2p}$, pour tout entier naturel p :

$v_{2p+2} = f \circ f(v_{2p}) \geq v_{2p}$. La suite $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

5

17. Etant croissante et majorée (par $\frac{3}{5}$), la suite $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite ℓ qui appartient à l'intervalle fermé stable $\left[\frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$

De la même façon que dans la **question 3**, la suite $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ ne peut converger que vers un point fixe de $f \circ f$. Le seul point fixe possible est $\frac{3}{5}$.

La suite $(v_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{5}$.

18. Considérons maintenant les termes de rang impair. Passons à la limite dans la relation de récurrence : $v_{2p+1} = f(v_{2p})$.
On obtient : $\lim\limits_{n\to\infty} v_{2p+1} = \lim\limits_{n\to\infty} f(v_{2p}) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} v_{2p}\right) = f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$.

Sachant que c'est la continuité de *f* qui légitime l'interversion $\lim\limits_{n\to\infty} f(v_{2p}) = f\left(\lim\limits_{n\to\infty} v_{2p}\right)$.

La suite $(v_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers $\frac{3}{5}$.

Vu que les suites extraites des termes de rang pair et des termes de rang impair ont la même limite $\frac{3}{5}$,

la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\frac{3}{5}$.

Une preuve, pour les non convaincus:

Montrons que quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier n_0 tel que $n \geq n_0 \Rightarrow \left|v_n - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$.

- Il existe un entier naturel p_1 : $p \geq p_1 \Rightarrow \left|v_{2p} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$.
- Il existe un entier naturel p_2 : $p \geq p_2 \Rightarrow \left|v_{2p+1} - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$.

Considérons l'entier $n_0 = \max(2p_1\ ; 2p_2 + 1)$.

Quelle que soit la parité de l'entier n : $n \geq n_0 \Rightarrow \left|v_n - \frac{3}{5}\right| < \varepsilon$. Ce qui prouve la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers $\frac{3}{5}$.

19. Selon ce modèle, la population oscille autour du seuil $\frac{3}{5}$, en finissant par se stabiliser à ce seuil (les oscillations s'amortissent).

On peut prévoir à long terme une stabilisation de la population autour de 60 % de sa taille théoriquement maximale. (C'est-à-dire autour de 120 % de sa valeur initiale puisque celle-ci est censée être égale à la moitié du maximum théorique).

6

II. Le modèle logistique continu

20.a. Quel que soit z tel que $0 < z < M$:

$$\frac{1}{z.(M-z)} = \frac{1}{M.z} + \frac{1}{M.(M-z)}$$

C'est-à-dire que $\alpha = \beta = \frac{1}{M}$

Pour toute fonction y conforme aux hypothèses, c'est-à-dire de classe C^1 sur l'ensemble des réels positifs et prenant ses valeurs dans l'intervalle ouvert $]0 ; M[$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y'(t) = a.y(t).\big(M - y(t)\big) \iff \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{y'(t)}{y(t).\big(M - y(t)\big)} = a$$

Soit aussi bien, en vertu de la relation précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \quad y'(t) = a.y(t).\big(M - y(t)\big) \iff \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad \frac{y'(t)}{M.y(t)} + \frac{y'(t)}{M.\big(M - y(t)\big)} = a$$

La fonction y est bien solution de l'équation différentielle suggérée par l'énoncé avec $\alpha = \beta = \frac{1}{M}$.

Ou de façon équivalente :

$$\frac{y'(t)}{y(t)} + \frac{y'(t)}{M - y(t)} = aM$$

20.b. Sachant que pour tout $t \geq 0$, la fonction $y(t)$ vérifie l'inégalité $0 < y(t) < M$, par primitivation dans la relation précédente, il existe une constante K telle que :

$$\ln\,(y(t) - \ln\big(M - y(t)\big) = aMt + K$$

21. Une primitive de la fonction $\psi(t) = \frac{y'(t)}{M.y(t)} + \frac{y'(t)}{M.(M-y(t))} - a$ définie sur l'ensemble des réels positifs est la fonction :

$$\Psi(t) = \frac{1}{M}\ln(y(t)) - \frac{1}{M}\ln\big(M - y(t)\big) - at$$

Laquelle peut s'écrire également :

$$\Psi(t) = \frac{1}{M}\ln\left(\frac{y(t)}{M - y(t)}\right) - at$$

La fonction y est solution de l'équation différentielle qui nous occupe si et seulement si la fonction grand psi ci-dessus a une dérivée nulle, c'est-à-dire si et seulement s'il s'agit d'une fonction constante, ou encore si et seulement si il existe un réel K tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \frac{1}{M}\ln\left(\frac{y(t)}{M - y(t)}\right) - at = K$$

Cette relation équivaut à :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ln\left(\frac{y(t)}{M - y(t)}\right) = Mat + MK$$

Autrement dit :

On en déduit, en considérant l'exponentielle de chaque membre :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \frac{y(t)}{M - y(t)} = \mathrm{e}^{aMt+K}$$

Et en exprimant la fonction $y(t)$ en fonction de t :

$$y(t) = \frac{M.\mathrm{e}^{aMt+K}}{\mathrm{e}^{aMt+K} + 1}$$

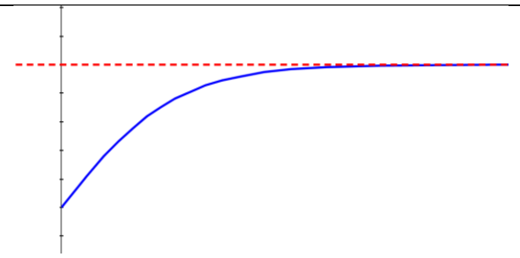
Posons $c = \mathrm{e}^{K}$ (ce qui fait de c une constante strictement positive). Nous obtenons l'expression :

$$y(t) = \frac{M.c.\mathrm{e}^{aMt}}{\mathrm{c.e}^{aMt} + 1}$$

22. Les constantes M et a étant strictement positives, $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{aMt} = +\infty$ et $\lim\limits_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-aMt} = 0$

Ecrivons autrement la fonction $y(t)$: $y(t) = \frac{M}{1+\frac{1}{c}\mathrm{e}^{-aMt}}$. Il apparaît sous cette écriture sans aucune indétermination que : $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = M.$

On obtient graphiquement l'allure ci-contre. La population croît jusqu'à un plafond *M* qui en constitue la limite.



III. Un modèle proies-prédateurs discret

24. Matriciellement, pour tout entier naturel *n* : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

Par une récurrence évidente (ou par une multiplication télescopique, en multipliant membre à membre les égalités $\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}$ pour *k* allant de 0 à $n-1$) :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

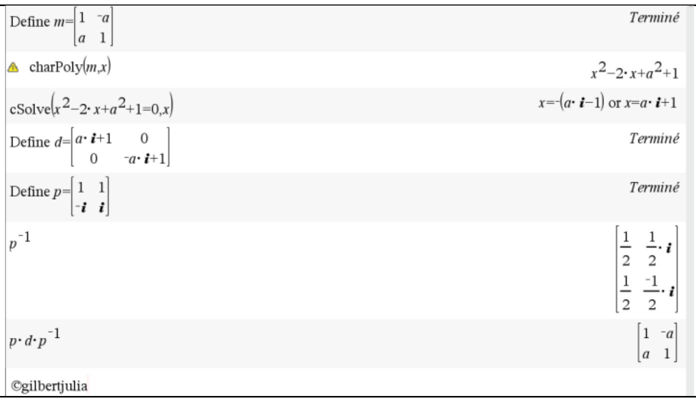
25. Le polynôme caractéristique de la matrice *A* est :

$$U(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & -\alpha \\ \alpha & 1-x \end{pmatrix} = x^2 - 2x + (1+\alpha^2)$$

Ce polynôme admet deux racines complexes conjuguées qui sont :

$$\lambda = 1 + \alpha i \; ; \; \mu = 1 - \alpha i$$

Il s'agit des valeurs propres de la matrice *A*.



On note que le module de ces deux complexes conjugués est le réel strictement supérieur à 1 (puisque α est d'après l'énoncé un réel strictement positif) : $r = |\lambda| = |\mu| = \sqrt{1+\alpha^2}$.

Si on définit le réel θ appartenant à $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ par ses lignes trigonométriques : $\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} \\ \sin(\theta) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}} \end{cases}$, on obtient l'écriture trigonométrique :

$$1 + \alpha.i = r(\cos(\theta) + i.\sin(\theta))\ ;\ 1 - \alpha.i = r(\cos(\theta) - i.\sin(\theta))$$

Soit de façon équivalente : $1 + \alpha.i = \sqrt{1+\alpha^2}.\mathrm{e}^{i.\theta}\ ;\ 1 - \alpha.i = \sqrt{1+\alpha^2}.\mathrm{e}^{-i.\theta}$

NB. On considère que $\theta \in \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ car ses deux lignes trigonométriques, sinus et cosinus sont, dans le présent contexte, strictement positives.

26. Vu que le polynôme caractéristique de A a deux racines simples distinctes, la matrice A est diagonalisable et une matrice diagonale D qui lui est semblable est : $D = \begin{pmatrix} 1+a\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1-a\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

Sa diagonale est formée des deux valeurs propres que nous avons identifiées.

Pour expliciter la similitude des matrices A et D il faut déterminer une matrice de passage P de la base usuelle vers une nouvelle base de vecteurs propres. Moyennant quoi, cette matrice de passage P vérifie la relation de similitude $A = P \times D \times P^{-1}$

27. Puisque la matrice P nous est généreusement fournie par l'énoncé, il n'est pas utile de « démontrer », il est suffisant de « vérifier » que les vecteurs colonnes figurant dans cette matrice P sont bien des vecteurs propres associés aux deux valeurs propres λ et μ.

C'est bien le cas : $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = (1+a\mathrm{i}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ ce qui justifie que $\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre associé à la valeur propre $1 + a\mathrm{i}$ $A \times \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = (1-a\mathrm{i}) \times \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ ce qui justifie que : $\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $1 - a\mathrm{i}$	

La matrice P donnée par l'énoncé est bien la matrice de passage de la base usuelle à une base de vecteurs propres.

Sur cette copie d'écran, nous avons calculé la matrice inverse de *P* et nous avons vérifié la relation $$A = P \times D \times P^{-1}$$	Define $d=\begin{bmatrix} a\cdot i+1 & 0 \\ 0 & -(a\cdot i-1) \end{bmatrix}$ *Terminé* Define $p=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix}$ *Terminé* ©gilbertjulia p^{-1} $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot i \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\cdot i \end{bmatrix}$ $p\cdot d\cdot p^{-1}$ $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1 \end{bmatrix}$

28. Sans bavure : $A^n = P \times \begin{pmatrix} (1+a\mathrm{i})^n & 0 \\ 0 & (1-a\mathrm{i})^n \end{pmatrix} \times P^{-1}$ par récurrence évidente ou par un effet de produit télescopique, comme on le voudra.

29. Nous avons effectué ci-contre le calcul de $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en utilisant la question précédente.	$p\cdot\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix}\cdot p^{-1}\cdot\begin{bmatrix} x0 \\ y0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \lambda^n\cdot\left(\frac{x0}{2}+\frac{y0}{2}\cdot i\right)+\mu^n\cdot\left(\frac{x0}{2}-\frac{y0}{2}\cdot i\right) \\ \lambda^n\cdot\left(\frac{y0}{2}-\frac{x0}{2}\cdot i\right)+\mu^n\cdot\left(\frac{y0}{2}+\frac{x0}{2}\cdot i\right) \end{bmatrix}$ $\text{factor}\left(\begin{bmatrix} \lambda^n\cdot\left(\frac{x0}{2}+\frac{y0}{2}\cdot i\right)+\mu^n\cdot\left(\frac{x0}{2}-\frac{y0}{2}\cdot i\right) \\ \lambda^n\cdot\left(\frac{y0}{2}-\frac{x0}{2}\cdot i\right)+\mu^n\cdot\left(\frac{y0}{2}+\frac{x0}{2}\cdot i\right) \end{bmatrix},x0\right)$ $\begin{bmatrix} \frac{x0\cdot(\lambda^n+\mu^n)+(\lambda^n-\mu^n)\cdot y0\cdot i}{2} \\ \frac{x0\cdot(\mu^n-\lambda^n)\cdot i+(\lambda^n+\mu^n)\cdot y0}{2} \end{bmatrix}$ ©gilbertjulia

Compte tenu que $\begin{cases} \lambda^n = \big(r(\cos\theta + \mathbf{i}.\sin\theta)\big)^n = r^n(\cos n\theta + \mathbf{i}.\sin n\theta) \\ \mu^n = \big(r(\cos\theta - \mathbf{i}.\sin\theta)\big)^n = r^n(\cos n\theta - \mathbf{i}.\sin n\theta) \end{cases}$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda^n + \mu^n}{2} = r^n(\cos n\theta) \\ \dfrac{\lambda^n - \mu^n}{2} = \mathbf{i}.r^n(\sin n\theta) \end{cases}$$

Ce qui fait qu'on aboutit finalement aux expressions explicites attendues par l'énoncé.

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^n\cos(n\theta) & -r^n\sin(n\theta) \\ r^n\sin(n\theta) & r^n\cos(n\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = r^n\begin{pmatrix} \cos(n\theta).x_0 - \sin(n\theta).y_0 \\ \sin(n\theta).x_0 + \cos(n\theta).y_0 \end{pmatrix}$$

30. On comprend que l'on a les relations : $\begin{cases} u_n = \bar{u} + x_n = \bar{u} + r^n(\cos(n\theta).x_0 - \sin(n\theta).y_0) \\ v_n = \bar{v} + y_n = \bar{v} + r^n(\sin(n\theta).x_0 + \cos(n\theta).y_0) \end{cases}$

Un exemple de construction des suites (x_n) et (y_n).

Dans l'exécution de l'algorithme, on a choisi $x_0 = 50$; $y_0 = 60$ et $\alpha = 0{,}05$.

On a construit 1000 termes.

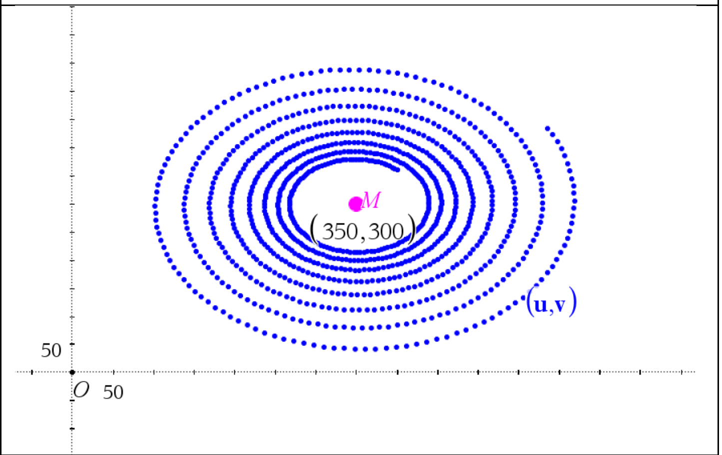
Au tout début, on constate que les deux populations, proies et prédateurs, augmentent. Mais ça ne va pas durer …

```
proiepred(50,60,0.05,1000▸                 Terminé
Define u=350+lx                            Terminé
Define v=300+ly                            Terminé
seq(lx[j],j,1,5)     {50.,47.,43.875,40.6325,37.2803▸
seq(ly[j],j,1,5)     {60.,62.5,64.85,67.0437,69.0754▸
```

```
"proiepred" enregistr. effectué
Define proiepred(x0,y0,a,n)=
Prgm
Local r,t
Define r=√(1+a^2)
Define t=cos⁻¹(1/r)
Define lx=newList(n)
Define ly=newList(n)
For k,0,n−1
  r^k·(x0·cos(k·t)−y0·sin(k·t))→lx[k+1
  r^k·(x0·sin(k·t)+y0·cos(k·t))→ly[k+1
EndFor
EndPrgm
```

On suppose que les populations de référence sont 350 et 300. On observe une évolution « en spirale » autour de cette position moyenne.

On peut interpréter ainsi : la rareté des prédateurs implique une augmentation du nombre de proies.



30. La spirale géométrique traduit un effet d'oscillations d'amplitude croissante autour de valeurs de référence. L'abondance de proies entraîne la prospérité des prédateurs qui finissent par décimer les proies. Ce qui entraîne le déclin des prédateurs faute de nourriture puis une nouvelle ère d'abondance de proies. Ces déséquilibres ont tendance à s'accentuer. Cette histoire va mal finir !

31. Le calcul montre que :

$$x_n^2 + y_n^2 = (x_0^2 + y_0^2) \times r^{2n}$$

```
Define xn=r^n·(cos(nt)·x0−sin(nt)·y0)      Terminé
Define yn=r^n·(sin(nt)·x0+cos(nt)·y0)      Terminé
xn^2+yn^2                     (x0^2+y0^2)·r^(2·n)
```

Or, $r^{2n} = \left(\sqrt{1+a^2}\right)^{2n} = (1+a^2)^n$.

La suite de terme général $r^{2n} = (1+a^2)^n$ est une suite géométrique dont la raison est un réel strictement plus grand que 1 : cette suite diverge vers plus l'infini.

Si au moins un des x_0, y_0 n'est pas nul, le nombre $(x_0^2 + y_0^2)$ est un réel strictement positif et la suite de terme général $x_n^2 + y_n^2$ diverge vers plus l'infini.

Au moins une des deux suites (x_n) ou (y_n) n'est donc pas bornée. Si c'est le cas, la suite correspondante (u_n) ou (v_n) n'est pas bornée non plus.

Le modèle est instable, il n'est donc éventuellement pertinent que sur un temps limité mais certainement pas à long terme.

En effet, le « rayon » des spires successives de la spirale géométrique vue dans l'énoncé tend vers l'infini. Quelles que soient les valeurs de référence $\overline{u}$; $\overline{v}$, une spire finira par « sortir » du quart de plan défini par les inégalités $x > 0$; $y > 0$.

Ainsi, en raison de cette « sortie » inexorable de ce quart de plan, au bout d'un certain temps, une au moins des deux suites prendrait des valeurs négatives ou nulles ce qui représenterait l'extinction totale de l'une au moins des deux populations, le modèle devient caduc.