Ecrit 1-2023. Problème 1 : Vrai / Faux

I. Analyse.

1. Faux. Il faut dire « f n'est pas paire ***s'il existe x*** tel que $f(x) \neq f(-x)$.

Par exemple, la fonction $x \to f(x) = x^3 - x$ n'est pas paire et pourtant il y a des nombres qui ont la même image que leur opposé : $f(-1) = f(1)$.

2. Vrai. Le corollaire du TVI s'applique à la fonction $x \mapsto g(x) = f(x) - x$. Elle est continue sur $[a\,;b]$ et elle change de signe sur cet intervalle. Puisque *f* prend ses valeurs dans $[a\,;b]$, *g* est en effet positive en *a* et négative en *b* : $g(a) = f(a) - a \geq 0 \geq f(b) - b = g(b)$

Donc, d'après le corollaire du TVI, il existe $c \in [a\,;b]$ tel que : $g(c) = f(c) - c = 0$

3. Faux. Contre-exemple : $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{3}$ sur l'intervalle $[0\,;1]$.

On a bien : $\int_0^1 x.dx = \frac{1}{2} > \int_0^1 \frac{1}{3}.dx = \frac{1}{3}$ et pourtant $f(x) = x \leq \frac{1}{3} = g(x)$ lorsque $x \in \left[0\,;\frac{1}{3}\right]$.

4. Faux. Contre-exemple : n'importe quelle fonction impaire continue non nulle (on peut suggérer la fonction identique) que l'on intègre sur un intervalle centré en 0, comme l'intervalle $[-1\,;1]$.

5. Faux. Les fonctions indiquées sont ***des*** solutions de l'équation différentielle mais toutes les solutions ne sont pas ainsi. La fonction $x \mapsto f(x) = \exp(x) + 1$ est aussi une solution et pourtant elle n'est pas de la forme prévue par l'énoncé.

6. Faux. La négation est : « Il existe une suite convergente qui n'est pas majorée ». Les deux assertions sont fausses, mais l'incongruité de l'assertion est davantage visible sur la négation.

7. Faux. Cette série géométrique de raison $-\frac{1}{7}$ converge vers $\frac{7}{8}$.

8. Faux. Il manque une instruction destinée à incrémenter la variable *u.* Il faut insérer : « $u = u + 5$ » entre les lignes 6 et 7 et ensuite écrire en ligne suivante « $S = S + u$ ». On peut aussi ne pas modifier la ligne 7 et insérer l'instruction « $u = u + 5$ » juste après la ligne 7.

2

II. Géométrie.

9. Faux. C'est l'énoncé réciproque qui nous est proposé.

La contraposée est : $BC^2 \neq AB^2 + AC^2 \quad \Longrightarrow$ *ABC* n'est pas rectangle en *A*.

10. Vrai. Car $(x + y).(x - y) = \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0$ si *x* et *y* ont la même norme.

11. Faux. Les quantificateurs sont incorrects. L'énoncé correct est : Soit *x* et *y* dans *P*. Si pour tout *z* $x.z = y.z$, alors $x = y$ (car $x - y$ est alors orthogonal à tous les vecteurs du plan, donc est nul). L'énoncé proposé signifie que $x - y$ est orthogonal à *z*.

12. Faux. Car le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(9\,;3)$. Ce n'est pas un vecteur normal à la droite dont l'équation nous est indiquée, cette droite ne peut pas être la médiatrice en question.

13. Faux. L'ensemble en question est la médiatrice de [*AB*] avec $A(2\,;0)\,;B(-1\,;0)$. C'est donc une droite et non un singleton.

14. Vrai. Car les angles polaires de *A* et de *B* ont pour mesures respectives $-\frac{\pi}{6}$ et $+\frac{\pi}{6}$;

L'angle en question a pour mesure un argument du quotient $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \exp\left(i\,\frac{\pi}{3}\right)$

15. Faux. La droite est **incluse dans** le plan.

III. Matrices.

16. Vrai. Cette matrice 2x2 a deux valeurs propres distinctes non nulles qui sont 1 et -1. Elle est donc diagonalisable et inversible. Il s'agit plus précisément d'une matrice de symétrie puisque son carré est la matrice unité.

17.Vrai. On sait que si *A* et *B* sont deux matrices toutes deux inversibles, alors leur produit *AB* est une matrice inversible. Par contraposition, si le produit *AB* n'est pas une matrice inversible alors les matrices *A* et *B* ne sont pas deux matrices toutes deux inversibles. *Idem est* : « si le produit *AB* de deux matrices *A* et *B* n'est pas une matrice inversible, alors au moins une des deux n'est pas inversible ».

En particulier, dans le cas où $AB = 0$, le produit *AB* n'est pas une matrice inversible. Donc, u moins une des deux matrices *A* ou *B* n'est pas inversible.

IV. Pourcentages.

18. Faux. Les pourcentages ne s'ajoutent pas. Le prix a été multiplié par $1{,}12 \times 1{,}16 \times 1{,}07$ soit par 1,39 à 0,01 près. L'augmentation a été de 39 % à 1 % près.

19. Faux. On ne connaît pas quantitativement quels sont les ensembles de référence, donc on ne peut rien conclure.

Armelle a pu réussir 95 exercices sur 190 puis 2 exercices sur 10 donc 97 sur 200.

Boris a pu réussir 9 exercices sur 10 puis 76 exercices sur 190 donc 85 sur 200. Armelle a dans ce cas réussi un meilleur pourcentage d'exercices.

V. Arithmétique.

20. Vrai. Il s'agit du produit de trois entiers consécutifs, l'entier *n*, son précédent et son suivant. Au moins l'un des trois est pair. Ce nombre est même un multiple de 6 car sur les trois nombres, il y en a toujours exactement un qui est multiple de 3.

4 **21. Faux.** Les entiers $x-3$ et $x+3$ peuvent très bien être des « diviseurs complémentaires du zéro ». Ainsi : $5^2 = 25 = 9 + 16 \equiv 9 \ (16)$. Pourtant, 5 n'est congru ni à 3 ni à -3 modulo 16.

(En revanche, la **réciproque** de l'assertion proposée est vraie)

VI. Dénombrement.

22. Faux. Ce nombre est 2^{10} soit 1024.

23. Vrai. Un triangle est déterminé par trois droites. Il y a donc autant de triangles que de combinaisons de 3 droites parmi *n* et c'est bien le nombre $\binom{n}{3}$ que nous propose l'énoncé.

VII. Probabilités.

24. Vrai. Cet évènement est l'évènement « on n'a pas obtenu le numéro choisi au premier lancer et on ne l'a pas obtenu non plus au deuxième lancer ». Les lancers étant indépendants, la probabilité de cet évènement est bien $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

25. Vrai. Deux évènements sont indépendants si la probabilité de leur intersection est égale au produit de leurs probabilités.

Supposons *A* et *B* indépendants. Alors *A* et $\bar{\bar{B}}$ le sont aussi. En effet :

$P(A \cap \bar{\bar{B}}) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A) \times P(B) = P(A)\big(1 - P(B)\big) = P(A) \times P(\bar{\bar{B}})$ et le résultat est toujours valable même si *B* est l'évènement certain et $\bar{\bar{B}}$ de probabilité nulle.

En réitérant le raisonnement avec $\bar{A}$, on obtient l'implication de l'énoncé, le résultat étant toujours valable même si *A* est l'évènement certain et $\bar{A}$ de probabilité nulle.

5

Ecrit 1-2023. Problème 2 : Equations fonctionnelles

6

I. Quelques résultats classiques

1.a. *On peut (mais ce n'est pas une obligation) adopter la définition qui suit :*

Soit *a* un élément d'un intervalle non vide *I* et *f* une fonction définie sur *I*. On dit que *f* est dérivable en *a* si son taux de variation $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ a une limite finie lorsque *x* tend vers *a*.

Autrement dit que *f* est dérivable en *a* s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x\in I}} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right) = \ell$.

Ce réel ℓ est le nombre dérivé de *f* en *a* et est noté $f'(a)$.

Pour le reste de la partie I, voir un bon manuel de Terminale (de préférence un peu ancien).

II. Première équation fonctionnelle de Cauchy

3.a. $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$

3.b. Pour tout réel *x* : $f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = f(x)$, ce qui prouve l'imparité de *f*.

3.c. Récurrence évidente.

3.d. Pour tout entier q non nul : $f(x) = f\left(q \times \frac{x}{q}\right) = q \times f\left(\frac{x}{q}\right)$ donc $\frac{1}{q} f(x) = f\left(\frac{x}{q}\right)$. Pour cela, on applique le **3.c** avec le réel $\frac{x}{q}$.

Ceci étant acquis, soit $r = \frac{p}{q}$ un rationnel. En appliquant le **3.c** avec le réel $\frac{x}{q}$:

$$f\left(\frac{p}{q} \times x\right) = f\left(p \times \frac{x}{q}\right) = p \times f\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{p}{q} f(x).$$

3.e. $f(r) = r \times f(1)$. Le réel *a* de l'énoncé est le nombre $f(1)$.

4. Première méthode.

On sait que tout nombre réel *x* est limite d'une suite de rationnels (par exemple la suite des troncatures de son écriture décimale à la décimale numéro *n*).

Soit (r_n) une telle suite de rationnels convergeant vers *x*.

- Par continuité en *x* de la fonction *f* : $f(x) = \lim_{n\to\infty}(f(r_n) = \lim_{n\to\infty}(ar_n)$.
- Par linéarité de la limite : $\lim_{n\to\infty}(ar_n) = a\lim_{n\to\infty}(r_n) = ax$.
- Par unicité de la limite : $f(x) = ax$

L'ensemble des fonctions continues solutions de l'équation fonctionnelle est l'ensemble des fonctions linéaires.

5. Deuxième méthode

5.a. Soit *x* un nombre réel donné. La fonction *f* étant supposée continue sur $\mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto f(x+t)$ sont continues sur $[0\,;1]$. Elles sont toutes deux intégrables sur cet intervalle.

La fonction *f* étant par hypothèse additive, pour tout *t* de $[0\,;1]$: $f(x+t) = f(x) + f(t)$.

Nous obtenons : $\int_0^1 f(x+t)dt = \int_0^1 (f(x) + f(t))dt$.

D'après les propriétés de linéarité de l'intégrale : $\int_0^1 (f(x) + f(t))dt = \int_0^1 f(x)dt + \int_0^1 f(t)dt$.

En conséquence : $\int_0^1 f(x+t)dt - \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x)dt = f(x) \times \int_0^1 1dt = f(x)$.

5.b. Effectuons dans la première intégrale le changement de variable $u = x + t$.

Nous obtenons : $\int_0^1 f(x+t)dt = \int_x^{x+1} f(u)du$.

En conséquence : $\int_x^{x+1} f(u)du - \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 f(x+t)dt - \int_0^1 f(t)dt = f(x)$, soit, par simple changement de notation : $\int_x^{x+1} f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt = f(x)$.

5.c. En tant que fonction continue sur $\mathbb{R}$, *f* admet des primitives définies sur $\mathbb{R}$. Soit *F* l'une d'entre elles. Nous pouvons écrire : $\int_x^{x+1} f(t)dt = [F(t)]_x^{x+1} = F(x+1) - F(x)$.

La fonction $x \mapsto \int_x^{x+1} f(t)dt$ est différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, elle y est dérivable et

8

$$\left(\int_x^{x+1} f(t)dt\right)'(x) = f(x+1) - f(x)$$

La fonction *f* étant additive, $f(x+1) - f(x) = f(1)$.

Nous obtenons :

$$f'(x) = \left(\int_x^{x+1} f(t)dt - \int_0^1 f(t)dt\right)'(x) = f(1)$$

5.d. Etant donné que la dérivée de *f* sur $\mathbb{R}$ est la fonction constante égale à $f(1)$, par primitivation, nous pouvons dire qu'il existe une constante *C* telle que :

$$f(x) = f(1) \times x + C$$

La valeur de *f* en zéro, qui est zéro, détermine la valeur de la constante : $C = 0$.

En fin de compte : $f(x) = f(1) \times x$.

Il en résulte qu'une fonction continue additive sur $\mathbb{R}$ est nécessairement une fonction linéaire.

Réciproquement, toute fonction linéaire est bien additive et continue sur $\mathbb{R}$.

Même conclusion qu'à la question précédente : l'ensemble des fonctions continues additives sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions linéaires.

III. Restrictions d'hypothèses

6. Continuité.

6.a. Soit x_0 un réel fixé. Par définition de la continuité en un point :

f continue en $x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$.

La fonction *f* étant supposée additive sur $\mathbb{R}$: $f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h)$.

En conséquence, $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{h\to 0} f(h) = 0$

Or, nous avons vu que par une fonction additive *f*, 0 était l'image par *f* de 0.

Nous obtenons que, sous l'hypothèse d'additivité de *f* :

$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0) \iff \lim_{h\to 0} f(h) = f(0)$, autrement dit :

$$f \text{ continue en } x_0 \iff f \text{ continue en } 0$$

9

6.b et c. Dans la question précédente, x_0 un réel fixé arbitraire.

Pour tout réel x, en utilisant une implication issue de la conclusion précédente entre x_0 et 0, puis entre 0 et x, nous obtenons :

$f \text{ continue en } x_0 \implies f \text{ continue en } 0 \implies f \text{ continue en } x$ (quel que soit ce x réel)

Nous pouvons conclure que, si une fonction f additive sur $\mathbb{R}$ est continue en un point, alors elle est continue partout.

La continuité en un seul point de $\mathbb{R}$ implique la continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi, pour qu'une fonction additive entre dans le cadre de la partie précédente, il suffit qu'elle soit continue en un point.

7. Monotonie.

7.a. Soit x_0 un réel donné. Il admet un développement décimal, illimité ou non.

Choisissons comme suites :

- Pour la suite (a_n), la suite des troncatures à la n-ième décimale du développement décimal de x_0.
- Pour la suite (b_n), la suite des arrondis par excès à la n-ième décimale du développement décimal de x_0.

Ces suites, par construction, possèdent toutes les qualités requises. Il s'agit de deux suites adjacentes.

7.b. Puisqu'il s'agit ci-dessus de suites de rationnels, et que f est supposée être additive, en vertu de la conclusion de la question **3.e**, pour tout entier naturel n :

$\begin{cases} f(a_n) = a_n \times f(1) \\ f(b_n) = b_n \times f(1) \end{cases}.$

La fonction f étant supposée être monotone : $a_n \leq x_0 \leq b_n \implies \begin{cases} f(a_n) \leq f(x_0) \leq f(b_n) \\ \text{ou bien} \\ f(a_n) \geq f(x_0) \geq f(b_n) \end{cases}$, puisque la relation d'ordre est alors respectée ou inversée.

Nous obtenons que pour tout entier naturel *n* : $\begin{cases} a_n \times f(1) \leq f(x_0) \leq b_n \times f(1) \\ \text{ou bien} \\ a_n \times f(1) \geq f(x_0) \geq b_n \times f(1) \end{cases}$, le sens des inégalités dépendant du signe de $f(1)$.

Si ce nombre $f(1)$ n'est pas nul (auquel cas $f(x_0) = 0$ nécessairement), l'inégalité $a_n \leq \frac{f(x_0)}{f(1)} \leq b_n$ résume la situation.

Quoi qu'il en soit, les deux suites $\left(a_n \times f(1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n \times f(1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont, par linéarité des limites, une limite commune qui est $x_0 \times f(1)$.

Mais par adjacence, leur limite est aussi $f(x_0)$.

Par unicité de la limite, nous obtenons la relation : $f(x_0) = x_0 \times f(1)$;

Il s'ensuit que les suites additives et monotones sont toutes des fonctions linéaires. Réciproquement, il est clair toute fonction linéaire est additive et monotone: strictement croissante (resp. strictement décroissante) si son coefficient est strictement positif (respectivement strictement négatif) et constante, donc monotone au sens large, si son coefficient est nul .

L'ensemble des suites additives monotones est l'ensemble des fonctions linéaires.

8. Encadrement.

8.a. Désignons par *d* le diamètre de l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$, $d = \beta - \alpha$, et par γ son centre, $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Soit *N* un entier strictement positif vérifiant l'inégalité : $\frac{1}{N} < \frac{d}{2}$. Nous pouvons pour cela choisir n'importe quel entier plus grand que $\frac{2}{d}$.

Considérons un entier naturel *n*.

Le nombre réel $N \times (nx - \gamma)$ est situé entre deux entiers consécutifs : il existe un unique entier p_n tel que : $p_n \leq N \times (nx - \gamma) < p_n + 1$, il s'agit de la partie entière : $p_n = E[N \times (nx - \gamma)]$.

Nous disposons de la double inégalité : $\frac{p_n}{N} \leq (nx - \gamma) < \frac{p_n}{N} + \frac{1}{N}$, inégalité qui peut s'écrire aussi bien : $\gamma \leq (nx - \frac{p_n}{N}) < \gamma + \frac{1}{N}$

Posons $r_n = \frac{p_n}{N}$. Nous avons l'inégalité : $\gamma \leq (nx - r_n) < \gamma + \frac{1}{N}$

Compte tenu du choix de l'entier *N*, tel que $\frac{1}{N} < \frac{d}{2}$, nous obtenons : $\gamma \leq (nx - r_n) < \gamma + \frac{d}{2}$

La différence entre $nx - r_n$ et le centre de l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$ est positive et strictement plus petite que le rayon de ce même intervalle.

Cette inégalité garantit que $nx - r_n \in [\gamma\ ;\ \beta[$, intervalle qui est inclus dans l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$.

Nous avons ainsi construit un rationnel $r_n = \frac{p_n}{N}$ qui vérifie (un peu mieux que …) la condition requise.

8.b. Pour *x* réel fixé et *n* entier naturel, considérons $f(nx - r_n)$, avec, selon le résultat de la question précédente, $nx - r_n \in [\alpha\ ;\ \beta[$.

D'après les propriétés des fonctions additives, nous avons $f(nx) = n \times f(x)$ (**question 3.c**) et, puisque r_n est un rationnel, $f(r_n) = f(1) \times r_n = ar_n$ (**question 3.e**) en notant $a = f(1)$.

Ces propriétés d'additivité impliquent : $f(nx - r_n) = f(nx) - f(r_n) = nf(x) - ar_n$

Ajoutons et retranchons $n \times a \times x$:

$$f(nx - r_n) = (nf(x) - nax) + (nax - ar_n) = n(f(x) - ax) + a(nx - r_n)$$

Utilisons une inégalité triangulaire sur les valeurs absolues (la valeur absolue d'une différence est supérieure ou égale à la différence des valeurs absolues) :

$$|f(nx - r_n)| \geq |n(f(x) - ax)| - |a(nx - r_n)| = n|(f(x) - ax)| - |a||nx - r_n|$$

8.c. On suppose que la fonction *f* est bornée sur l'intervalle $[\alpha\ ;\ \beta]$.

Il existe un réel strictement positif *B* tel que : $B \geq |f(u)|$ quel que soit *u* appartenant à $[\alpha\ ;\ \beta]$.

Appliquons cette majoration dans l'inégalité précédente où nous savons que $nx - r_n \in [\alpha\ ;\ \beta[$:

$$B \geq |f(nx - r_n)| \geq n|(f(x) - ax)| - |a| \times \max(|\alpha|, |\beta|)$$

Ainsi, indépendamment de l'entier naturel *n* : $n|(f(x) - ax)| \leq B + |a| \times \max(|\alpha|, |\beta|)$ soit : $|(f(x) - ax)| \leq \frac{B + |a| \times \max(|\alpha|, |\beta|)}{n}$ pour *n* non nul.

Cette inégalité ne peut être vérifiée indépendamment de *n* que si $|(f(x) - ax)| = 0$, c'est-à-dire que si : $f(x) = ax$

(En effet cette inégalité implique : $0 \leq |(f(x) - ax)| \leq \lim\limits_{n \to \infty} \frac{B + |a| \times \max(|\alpha|, |\beta|)}{n} = 0$).

Nous pouvons conclure que les fonctions additives sur $\mathbb{R}$ qui sont bornées sur un intervalle non vide sont les fonctions linéaires.

Par contraposition, nous pouvons dire qu'une fonction additive sur $\mathbb{R}$ qui n'est pas une fonction linéaire est nécessairement non continue en tout point de $\mathbb{R}$ et non bornée sur tout intervalle non vide.

En conclusion de ces restrictions, une fonction additive qui possède l'une quelconque des propriétés suivantes :

- Elle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Elle est continue en un point de $\mathbb{R}$.
- Elle est monotone sur $\mathbb{R}$.
- Elle est bornée sur un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

possède toutes ses propriétés à la fois et est une fonction linéaire.

IV. D'autres équations fonctionnelles

9. Voir un bon manuel de Terminale sur les fonctions exponentielles.

10. Equation fonctionnelle de Jensen.

10.a. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction de Jensen si et seulement si, quels que soient les réels x et y, l'image de leur moyenne est égale à la moyenne de leurs images.

Nous pouvons remarquer que les fonctions linéaires, que nous avons étudiées, ont de façon évidente cette propriété.

13

10.b. Soit f une fonction de Jensen. Quels que soient les réels x et y, calculons de deux façons différentes leur moyenne.

- D'une part : $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$ selon la propriété caractéristique des fonctions de Jensen.
- D'autre part : $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=f\left(\frac{(x+y)+0}{2}\right)=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}$, en considérant que c'est la moyenne entre leur somme et zéro.

Nous en déduisons : $\frac{f(x)+f(y)}{2}=\frac{f(x+y)+f(0)}{2}$, autrement dit : $f(x+y)=f(x)+f(y)-f(0)$, conformément à l'attendu de l'énoncé.

10.c. Dans l'équation fonctionnelle précédente, effectuons le changement de fonction :

$f(x)=g(x)+b$. Nous obtenons la relation fonctionnelle :

$f(x+y)=g(x+y)+b=(g(x)+b)+(g(y)+b)-b$ soit $g(x+y)=g(x)+g(y)$.

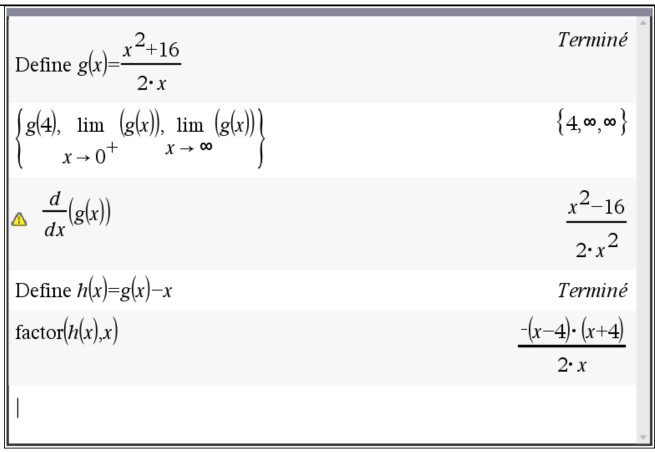
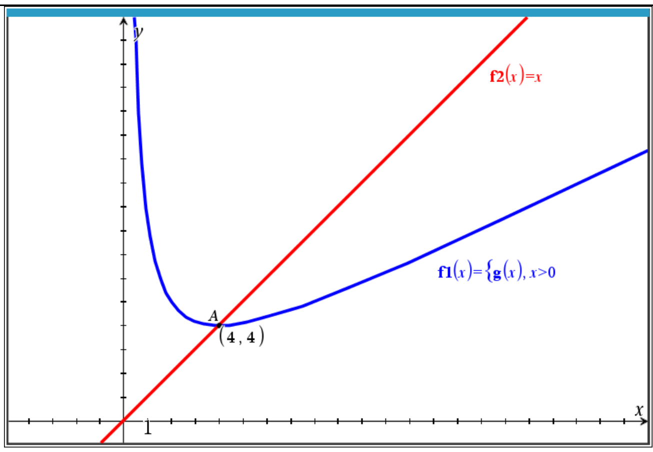
La fonction f est une fonction de Jensen si et seulement si la fonction g qui lui est associée vérifie la première équation de Cauchy étudiée précédemment.

Ainsi, les fonctions de Jensen qui ont l'une quelconque des propriétés « être continue », « être continue en un point », « être monotone », « être bornée sur un intervalle non vide » ont toutes ces propriétés à la fois et sont des fonctions du type : $f(x)=ax+b$, c'est-à-dire des fonctions affines.

Réciproquement, il est clair que les fonctions affines sont toutes des fonctions de Jensen.

Les constantes a et b représentent respectivement les nombres : $a=f(1)$; $b=f(0)$.

11. L'équation fonctionnelle de Braubufat[1].

11.a. La fonction g est croissante sur $[4\,;\,+\infty[$ et est décroissante sur $]0\,;4]$. On note au passage que l'intervalle $[4\,;\,+\infty[$ est « stable par g », propriété que nous exploiterons. La restriction de g à l'intervalle $[4\,;\,+\infty[$ est même une bijection de cet intervalle sur lui-même.	
Représentation graphique facultative. On y notera les positions relatives des courbes « bleue » et « rouge ». La fonction h est négative sur $[4\,;\,+\infty[$ et est positive sur $]0\,;4]$. Bilan : Si x appartient à $[4\,;\,+\infty[$, alors, $4 \leq g(x) \leq x$	

11.b.i. Il s'agit d'étudier une suite définie par une relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$

Le terme initial de la suite (u_n) est supposé être strictement supérieur à 4, donc appartenir à l'intervalle $[4\,;\,+\infty[$ qui est « stable par g ». Cette stabilité garantit que tous les termes de la suite (u_n) appartiennent à ce même intervalle.

La double inégalité $4 \leq g(x) \leq x$ exploitée lorsque $x = u_n$ nous dit que $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$ pour tout entier naturel n. On démontre ainsi que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 4, donc elle est convergente. Elle ne peut converger que vers une solution de l'équation $x = g(x)$, nécessairement elle converge vers 4.

11.b.ii. L'équation fonctionnelle a pour conséquence que pour tout entier n : $f(u_n) = f(u_{n+1})$ où u_n est le terme de rang n de la suite ci-dessus, suite de terme initial $x > 4$.

[1] Mathématicien et gastronome catalan du XIXème siècle né à Cornellà-del-Vercol.

Ainsi, par récurrence évidente, $f(u_n) = f(x)$ pour tout entier naturel *n*. Lorsque *f* vérifie l'équation fonctionnelle de Braubufat, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante.

Passons à la limite. La continuité de la fonction *f* sur $]0\,;\ +\infty[$ implique que :

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}(f(u_n)) = \left(f\left(\lim_{n\to+\infty}(f(u_n)\right)\right) = f(4)$$

15

Il s'ensuit que si *f* est une fonction continue vérifiant l'équation fonctionnelle de Braubufat, elle est constante et égale à $f(4)$ sur l'intervalle $[4\,;\ +\infty[$.

11.c. Lorsque le terme initial $u_0 = x$ de la suite (u_n) appartient à l'intervalle $]0\,;4]$, son suivant u_1 appartient à l'intervalle $[4\,;\ +\infty[$. On peut à partir du terme de rang 1 de cette suite appliquer les résultats que l'on vient de montrer et donc aboutir à une conclusion identique.

Si *f* est une fonction continue vérifiant l'équation fonctionnelle de Braubufat, elle est constante et égale à $f(4)$ sur l'intervalle $]0\,;4]$.

11.d. Ainsi, les fonctions continues solutions de l'équation fonctionnelle de Braubufat sont toutes des fonctions constantes. Réciproquement, il est clair que, les fonctions constantes vérifient toutes l'équation fonctionnelle de Braubufat.

En conclusion, les fonctions continues vérifiant l'équation fonctionnelle de Braubufat sont exactement les fonctions constantes sur $]0\,;\ +\infty[$.