Concours Général Maroc 2024 : Eléments de correction

*Le Concours Général du Maroc 2024 propose deux problèmes. Voici une étude (non certifiée) du **problème 2** de ce sujet. Ce (très long …) problème visite plusieurs thèmes, de l'indicatrice d'Euler à une probabilité insolite, en passant par la formule d'inversion de Möbius.*
Nous conseillons aux candidats au Concours Général français, pour entraînement, particulièrement les parties 1 et 2. La partie 3 est assez largement « hors programme » du baccalauréat français.
Quant aux candidats au CAPES de Mathématiques, qu'ils passent leur chemin.

Exercice 2 : Arithmétique

Partie 1 : Etude de quelques fonctions arithmétiques.

Rappelons le théorème de la décomposition d'un entier strictement positif en produit de facteurs premiers.

« Tout entier $N \geq 2$ peut se décomposer de façon unique en un produit de facteurs premiers ».

Précisément, il existe m ($m > 0$) nombres premiers distincts $p_1, p_2, \dots, p_m$ et m entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ tels que $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \dots \times {p_m}^{\alpha_m}$; cette décomposition caractérise l'entier N.

1.1. Etude des fonctions *r* et σ

1.1.1. L'entier 1 ne possède qu'un seul diviseur, lui-même. En conséquence : $r(1) = 1$.

Soit maintenant un entier $N \geq 2$, admettant une décomposition en produit de facteurs premiers comme indiqué ci-dessus.

Un entier *d* divise *N* si et seulement si chaque facteur premier de *d* est un facteur premier de *N* affecté d'un exposant inférieur ou égal à celui dont il est affecté dans la décomposition de *N*.

En décomposant $N = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \dots \times {p_m}^{\alpha_m}$, un entier *d* est un diviseur de *N* si et seulement si sa décomposition en produit de facteurs premiers est de la forme : $d = {p_1}^{\beta_1} \dots {p_m}^{\beta_m}$ avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour chaque indice *i* entre 1 et *m*.

Le *m*-uplet $(\beta_1 ; \dots ; \beta_m)$ appartient au produit cartésien $\{0 ; \dots ; \alpha_1\} \times \dots \times \{0 ; \dots ; \alpha_m\}$.

Inversement, à chaque *m*-uplet $(\beta_1 ; \dots ; \beta_m)$ de l'ensemble produit cartésien $\{0 ; \dots ; \alpha_1\} \times \dots \times \{0 ; \dots ; \alpha_m\}$, on peut associer un, et un seul, diviseur de *N*, le nombre ${p_1}^{\beta_1} \dots {p_m}^{\beta_m}$. Le nombre de diviseurs de *N* est égal au nombre d'éléments du produit cartésien : $\{0 ; \dots ; \alpha_1\} \times \dots \times \{0 ; \dots ; \alpha_m\}$.

Chaque composante $\{0\,;\dots;\,\alpha_i\}$ de ce produit cartésien admet $1+\alpha_i$ éléments. Le nombre d'éléments du produit cartésien est :

$$r(N)=\prod_{i=1}^{m}(1+\alpha_i).$$

Soit maintenant *N* et *N'* sont deux entiers premiers entre eux, supposés décomposés :

$N={p_1}^{\alpha_1}\times {p_2}^{\alpha_2}\times\dots\times {p_m}^{\alpha_m}$ et $N'={p'_1}^{\alpha'_1}\times {p'_2}^{\alpha'_2}\times\dots\times {p'_{m'}}^{\alpha'_{m'}}$. Les deux décompositions n'ont aucun facteur premier commun, la décomposition du produit $N\times N'$ s'obtient en juxtaposant (multiplicativement) les deux décompositions. Il en résulte que :

$$r(N\times N')=\left(\prod_{i=1}^{m}(1+\alpha_i)\right)\times\left(\prod_{j=1}^{m\prime}(1+\alpha'_j)\right)=r(N)\times r(N')$$

La fonction *r* est multiplicative.

1.1.2. La somme des diviseurs de l'entier 1 est : $\sigma(1)=1$.

Soit maintenant un entier $N\geq 2$, admettant une décomposition en produit de facteurs premiers comme indiqué ci-dessus. La somme des diviseurs de *N* peut s'exprimer en notation sigma par :

$$\sigma(N)=\sum_{0\leq\beta_1\leq\alpha_1}\sum_{0\leq\beta_2\leq\alpha_2}\dots\sum_{0\leq\beta_m\leq\alpha_m}{p_1}^{\beta_1}\dots{p_m}^{\beta_m}$$

En particularisant la dernière sommation :

$$\sigma(N)=\sum_{0\leq\beta_1\leq\alpha_1}\sum_{0\leq\beta_2\leq\alpha_2}\sum_{0\leq\beta_n\leq\alpha_n}{p_1}^{\beta_1}\dots{p_{m-1}}^{\beta_{m-1}}\left(\sum_{0\leq\beta_m\leq\alpha_m}{p_m}^{\beta_m}\right)$$

Or, d'après la formule donnant la somme des β_m premières puissances d'un nombre :

$$\left(\sum_{0\leq\beta_m\leq\alpha_m}{p_m}^{\beta_m}\right)=\frac{{p_m}^{\alpha_m+1}-1}{p_m-1}$$

On obtient :

$$\sigma(N)=\left(\frac{{p_m}^{\alpha_m+1}-1}{p_m-1}\right)\times\sum_{0\leq\beta_1\leq\alpha_1}\sum_{0\leq\beta_2\leq\alpha_2}\sum_{0\leq\beta_{m-1}\leq\alpha_{m-1}}{p_1}^{\beta_1}\dots{p_{m-1}}^{\beta_{m-1}}$$

En procédant de même avec l'avant dernière sommation :

$$\sigma(N) = \left(\frac{{p_m}^{\alpha_m+1}-1}{p_m-1}\right) \times \left(\frac{{p_m}^{\alpha_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right) \sum_{0\leq\beta_1\leq\alpha_1} \sum_{0\leq\beta_2\leq\alpha_2} \sum_{0\leq\beta_{m-2}\leq\alpha_{m-2}} {p_1}^{\beta_1} \ldots {p_{m-2}}^{\beta_{m-2}}$$

En itérant ce procédé jusqu'à la première sommation :

$$\sigma(N) = \left(\frac{{p_m}^{\alpha_m+1}-1}{p_m-1}\right) \times \left(\frac{{p_m}^{\alpha_{m-1}+1}-1}{p_{m-1}-1}\right) \times \ldots \times \left(\frac{{p_1}^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1}\right) = \prod_{i=1}^{m} \frac{{p_i}^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$$

1.1.3. Pour établir la multiplicativité de la fonction sigma, il suffit de la vérifier pour deux entiers qui sont puissances de nombres premiers distincts. Il résulte de la définition que, si *p* et *q* sont eux nombres premiers distincts et si α et α' sont deux entiers naturels :

$$r(p^\alpha \times q^{\alpha'}) = (1+\alpha)(1+\alpha') = r(p^\alpha) \times r(q^{\alpha'})$$

$$\sigma(p^\alpha \times q^{\alpha'}) = \left(\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}\right)\left(\frac{q^{\alpha'+1}-1}{q-1}\right) = \sigma(p^\alpha) \times \sigma(q^{\alpha'})$$

Cette multiplicativité s'étend à deux nombres qui sont des produits d'un nombre fini de puissances de nombres premiers sans facteur premier commun aux deux produits, c'est-à-dire à tout couple de nombres entiers qui sont premiers entre eux.

1.2. Etude préliminaire de la fonction d'Euler

1.2.1. Si *p* est un nombre premier, alors $\varphi(p) = p - 1$ car *p* est premier avec tous les entiers de l'ensemble $\{1\,;\ldots;\,p\}$.

1.2.2. Soit $k = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_m}^{\alpha_m}$ un entier strictement positif et soit p^α une puissance de *p* d'exposant non nul.

- Si *p* divise *k*, alors *p* est un diviseur commun de *k* et de p^α donc $k \wedge p^\alpha \geq p > 1$.
- Réciproquement, on sait que la décomposition en produit de facteurs premiers du PGCD de deux nombres se construit en considérant les facteurs premiers communs aux deux décompositions affectés du plus petit des coefficients. Si $k \wedge p^\alpha \neq 1$, cela signifie que *p* est un facteur premier qui figure dans la liste $\{p_1\,;\ldots;\,p_m\}$ (on peut supposer que $p = p_1$ quitte à modifier l'indexation).

Le PGCD $k \wedge p^{\alpha}$ est alors p^{γ} avec $\gamma = \min(\alpha,\alpha_1)$ (qui est ≥ 1 car c'est le plus petit de deux nombres qui sont tous deux ≥ 1).

Puisque $k \wedge p^{\alpha} = p^{\gamma}$ avec $\gamma \geq 1, p$ divise k.

$k \wedge p^{\alpha} \neq 1$ si et seulement si *p* divise *k*.

1.2.3. D'après la question précédente, les entiers de $\{1 ; \dots ; p^{\alpha}\}$ qui ne sont pas premiers avec p^{α} sont les multiples de *p* de cet ensemble. Or, les multiples de *p* de cet ensemble sont les entiers de la forme $p \times x$ avec $x \in \{1 ; \dots ; p^{\alpha-1}\}$. Il y a donc $p^{\alpha-1}$ entiers qui ne sont pas premiers avec p^{α}.

1.2.4. L'ensemble $\{1 ; \dots ; p^{\alpha}\}$ contient p^{α} éléments dont $p^{\alpha-1}$ entiers qui ne sont pas premiers avec p^{α}.

Par complémentarité, cet ensemble contient $p^{\alpha} - p^{\alpha-1} = p^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ éléments premiers avec p^{α}.

$$\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1} = p^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

1.3. Une formule de Gauss

Soit *N* un entier strictement positif et *d* un diviseur strictement positif de *N*. Puisque, par hypothèse, *d* divise *N*, le nombre *a priori* rationnel $\frac{N}{d}$ est en fait un entier. Nous dirons que *d* et $\frac{N}{d}$ sont deux diviseurs « complémentaires » de *N* pour exprimer que leur produit est égal à *N*.

1.3.1.

De manière générale, si *n* et *k* sont deux entiers strictement positifs :

Par définition de leur PGCD : $k \wedge n = \delta \Leftrightarrow \exists\ (u ; v) \in \{1 ; \dots ; n\}^2 : \begin{cases} k = u\,\delta \\ n = v\,\delta \\ u \wedge v = 1 \end{cases}$

Dans le contexte de cette question, *n* est un entier strictement positif et *d* est un de ses diviseurs. Le nombre *v* dont il est question dans la définition précédente est $v = \frac{n}{d}$ (qui est entier car *d* divise *n*).

Pour tout entier *k* strictement positif :

$$k \wedge n = d \Leftrightarrow \exists\, u \in \mathbb{N}^* : \begin{cases} k = ud \\ u \wedge \dfrac{n}{d} = 1 \end{cases}$$

Soit maintenant *k* un entier de l'ensemble$\{1\,;\dots;\ n\}$. L'inégalité $1 \leq k \leq n$ équivaut à $\frac{1}{d} \leq \frac{k}{d} \leq \frac{n}{d}$, c'est-à-dire au fait que l'entier *u* vérifie l'inégalité : $1 \leq u \leq \frac{n}{d}$ (car 1 est le premier entier supérieur ou égal à $\frac{1}{d}$, d'où la modification à gauche de la double inégalité).

Nous obtenons :

Pour tout entier *k* de l'ensemble$\{1\,;\dots;\ n\}$,

$$k \wedge n = d \Leftrightarrow \quad \exists\, u \in \left\{1\,;\dots;\frac{n}{d}\right\}:\ \begin{cases} k = ud \\ u \wedge \dfrac{n}{d} = 1 \end{cases}$$

Les entiers *u* convenables (donc les entiers *k* de $\{1\,;\dots;\ n\}$, correspondants) sont au nombre de $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$

Ceci par définition de la fonction d'Euler, qui dénombre les entiers premiers avec $\frac{n}{d}$ qui sont entre 1 et $\frac{n}{d}$.

1.3.2. Pour tout *d* diviseur positif de *n,* notons $A_d = \{k \in \{1\,;\dots;n\} : k \wedge n = d\}$.

Par construction, chacun de ces ensembles est inclus dans $\{1\,;\dots;n\}$, donc leur réunion, quand *d* parcourt l'ensemble des diviseurs de *n*, est incluse dans $\{1\,;\dots;n\}$.

Réciproquement, tout entier *k* de $\{1\,;\dots;n\}$ appartient à l'ensemble $A_{k\wedge n}$, donc à la réunion des A_d quand *d* parcourt l'ensemble des diviseurs de *n*.

Il y a donc égalité : $\{1\,;\dots;n\} = \cup_{d/n} A_d$.

De plus, ces ensembles A_d sont disjoints deux à deux, chaque entier *k* de $\{1\,;\dots;n\}$ appartient à l'ensemble $A_{k\wedge n}$ et à lui seul. Ils forment, lorsque *d* parcourt l'ensemble des diviseurs de *n*, une partition de $\{1\,;\dots;n\}$.

Nous avons vu que l'ensemble A_d a pour cardinal $\varphi\left(\frac{n}{d}\right)$

La somme de leurs cardinaux est égale au cardinal de $\{1\,;\dots;n\}$:

$$\sum_{d/n} \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = n$$

Enfin, les entiers *d* et $\frac{n}{d}$ sont deux diviseurs complémentaires de *n* et jouent des rôles symétriques : faire parcourir l'ensemble des diviseurs de *n* par *d* équivaut à faire parcourir cet ensemble par le diviseur $d' = \frac{n}{d}$.

La somme des cardinaux est la même.

$$\sum_{d'/n} \varphi\left(\frac{n}{d'}\right) = \sum_{d/n} \varphi(d) = n$$

1.4. Une première application de la formule de Gauss

1.4.1. Soit *n* un entier strictement positif et *d* un entier vérifiant : $1 \leq d \leq n$. Par définition de la partie entière, $\left[\frac{n}{d}\right]$ est l'entier qui vérifie la double inégalité $\left[\frac{n}{d}\right] \leq \frac{n}{d} < \left[\frac{n}{d}\right] + 1$. Cet entier est tel que :

$$\left[\frac{n}{d}\right] \times d \leq n < \left[\frac{n}{d}\right] \times d + d = \left(\left[\frac{n}{d}\right] + 1\right) \times d$$

Il en résulte que les multiples de *d* strictement positifs et qui sont $\leq n$ sont exactement les entiers de la forme $x \times d$ avec *x* vérifiant : $1 \leq x \leq \left[\frac{n}{d}\right]$.

Il y a autant de multiples de *d* dans $\{1\,;\dots;n\}$ que d'entiers *x* dans $\left\{1\,;\dots;\left[\frac{n}{d}\right]\right\}$.

Le nombre de multiples de *d* appartenant à $\{1\,;\dots;n\}$ est égal à $\left[\frac{n}{d}\right]$ (partie entière).

1.4.2. Considérons la somme $\sum_{d=1}^{n} \varphi(d)\left[\frac{n}{d}\right]$. D'après la question précédente, $\left[\frac{n}{d}\right]$ est égal au nombre d'entiers *k* de $\{1\,;\dots;n\}$ qui ont *d* comme diviseur.

Introduisons la fonction $(d,k) \in \{1\,;\dots;n\}^2 \mapsto \begin{cases} u(d,k) = 1 \ \text{ si } d \text{ divise } k \\ u(d,k) = 0 \ \text{ sinon} \end{cases}$

Nous pouvons écrire l'égalité : $\left[\frac{n}{d}\right] = \sum_{k=1}^{n} u(d,k)$ et effectuer le remplacement dans la somme considérée :

$$\sum_{d=1}^{n} \varphi(d)\left[\frac{n}{d}\right] = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d)\left(\sum_{k=1}^{n} u(d,k)\right)$$

Intervertissons l'ordre de sommation de ces sommes finies :

$$\sum_{d=1}^{n} \varphi(d)\left(\sum_{k=1}^{n} u(d,k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{d=1}^{n} u(d,k) \times \varphi(d)\right)$$

Puisque $u(d,k)$ s'annule quand *d* ne divise pas *k* et vaut 1 quand *d* divise *k*, les seuls entiers *k* qui contribuent à la somme entre parenthèses sont ceux où *d* divise *k* :

$$\sum_{d=1}^{n} u(d,k) \times \varphi(d) = \sum_{d/k} \varphi(d)$$

En fin de compte :

$$\sum_{d=1}^{n} \varphi(d)\left[\frac{n}{d}\right] = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d)\left(\sum_{k=1}^{n} u(d,k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{d/k} \varphi(d)\right)$$

1.4.3. D'après le résultat de la **question 1 .3.2** : $\sum_{d/k} \varphi(d) = k$.

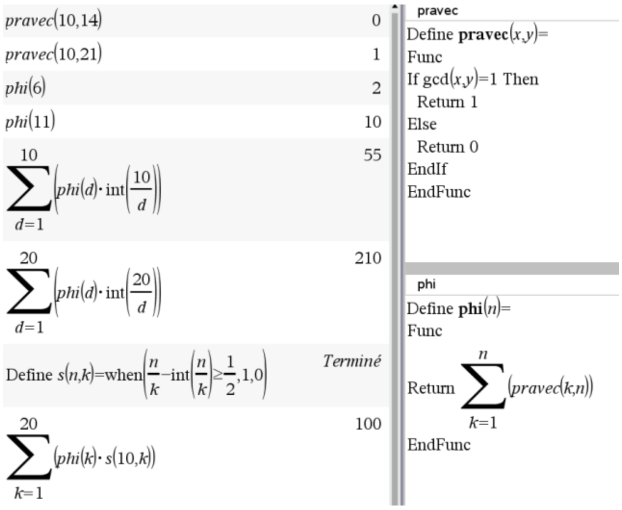
Appliquons ce résultat dans l'égalité précédente :

$$\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left[\frac{n}{d}\right] = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{d/k} \varphi(d)\right) = \sum_{k=1}^{n} k$$

La somme à calculer est égale à la somme des *n* premiers entiers, somme dont nous connaissons la valeur :

$$\sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \left[\frac{n}{d}\right] = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Quelques investigations avec TI-Nspire CAS. La fonction « **pravec** » renvoie 1 si les deux nombres en jeu sont premiers entre eux et 0 sinon. Elle permet de construire la fonction phi, indicatrice d'Euler. Nous avons vérifié sur quelques exemples les propriétés étudiées, nous laissons au lecteur le soin de les reconnaître.



1.5. Une conséquence de la formule précédente

1.5.1. Nous comprenons que l'ensemble $S(n)$ est constitué des entiers *k* tels que la différence entre le nombre $\frac{n}{k}$ et sa partie entière $\left[\frac{n}{k}\right]$ est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$: $S(n) = \left\{k \in \mathbb{N}^* \;:\; \frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right] \geq \frac{1}{2}\right\}$.

Par exemple $S(3) = \{2\,;4\,;5\,;6\}$ et $S(8) = \{3\,;5\,;9\,;10\,;\ldots;16\}$.

Soit *n* un entier strictement positif. On note que pour tout entier *k* tel que $n+1 \leq k \leq 2n$, nous avons l'inégalité : $\frac{1}{2} = \frac{n}{2n} \leq \frac{n}{k} \leq \frac{n}{n+1} < 1$ et que pour tout entier *k* tel que $k \geq 2n+1$, $\frac{n}{k} \leq \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}$.

L'ensemble $S(n)$ contient tous les entiers de $n+1$ à $2n$ mais ne contient plus aucun entier supérieur ou égal à $2n+1$. Ainsi :

$S(n) \subset \{1\,;\ldots;2n\}$, l'ensemble $S(n)$ est fini car il est inclus dans un ensemble fini.

1.5.2. Par définition de la partie entière, $\left[\frac{n}{k}\right]$ est l'unique entier x qui vérifie : $x \leq \frac{n}{k} < x+1$ et $\left[\frac{2n}{k}\right]$ est l'unique entier y qui vérifie : $y \leq \frac{2n}{k} < y+1$.

Or : $x \leq \frac{n}{k} < x+1 \implies 2x \leq \frac{2n}{k} < 2x+2$. Si nous affinons un peu plus, l'inégalité $x \leq \frac{n}{k} < x+1$ englobe deux cas et deux seulement : $\begin{cases} \text{ou bien } x \leq \frac{n}{k} < x + \frac{1}{2} & (\mathrm{C1}) \\ \text{ou bien } x + \frac{1}{2} \leq \frac{n}{k} < x+1 & (\mathrm{C2}) \end{cases}$.

- Dans le cas $(\mathrm{C1})$, $2x \leq \frac{n}{k} < 2x+1$ et donc $y = 2x$ c'est-à-dire qu'alors $\left[\frac{2n}{k}\right] - 2\left[\frac{n}{k}\right] = 0$.
- Dans le cas $(\mathrm{C2})$, $2x+1 \leq \frac{n}{k} < 2x+2$ et donc $y = 2x+1$ c'est-à-dire qu'alors $\left[\frac{2n}{k}\right] - 2\left[\frac{n}{k}\right] = 1$.

Nous en déduisons que, dans tous les cas, $\left[\frac{2n}{k}\right] - 2\left[\frac{n}{k}\right] \in \{0\,;1\}$ et que

$\left[\frac{2n}{k}\right] - 2\left[\frac{n}{k}\right] = 1$ si et seulement si : $\frac{n}{k} - \left[\frac{n}{k}\right] \geq \frac{1}{2}$.

1.5.3. On déduit de la question précédente que l'application $k \in \{1\,;2\,;\ldots;2n\} \mapsto \left[\frac{2n}{k}\right] - 2\left[\frac{n}{k}\right]$ est indicatrice de l'appartenance à l'ensemble $S(n)$. En effet, cette fonction vaut 1 si k appartient à $S(n)$ et 0 sinon.

Rappelons aussi que $S(n)$ ne contient aucun entier strictement supérieur à $2n$.

La somme $\sum_{k \in S(n)} \varphi(k)$ peut être exprimée ainsi :

$$\sum_{k \in S(n)} \varphi(k) = \sum_{k=1}^{2n} \left(\left[\frac{2n}{k}\right] - 2\left[\frac{n}{k}\right]\right)\varphi(k) = \sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{2n}{k}\right]\varphi(k) - 2\sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{n}{k}\right]\varphi(k)$$

D'après la **question 1.4.3** :

$$\sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{2n}{k}\right]\varphi(k) = \frac{2n(2n+1)}{2} = 2n^2 + n$$

Compte tenu que $\left[\frac{n}{k}\right] = 0$ pour tout entier k tel que $n+1 \leq k \leq 2n$, nous pouvons écrire :

$$2\sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{n}{k}\right]\varphi(k) = 2\sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{k}\right]\varphi(k) = 2.\frac{n(n+1)}{2} = n^2 + n$$

Nous en déduisons :

$$\sum_{k \in S(n)} \varphi(k) = \sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{2n}{k}\right]\varphi(k) - 2\sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{n}{k}\right]\varphi(k) = (2n^2 + n) - (n^2 + n) = n^2$$

Partie 2 : Formule d'inversion de Möbius et applications

2.1. Soit *m* et *m'* deux entiers premiers entre eux.

- Si l'un des deux au moins est égal à 1, la relation $\mu(m \times m') = \mu(m) \times \mu(m')$ est triviale.
- Si l'un des deux au moins a un facteur carré, la relation $\mu(m \times m') = \mu(m) \times \mu(m')$ est triviale car le produit $m \times m'$ a lui aussi un facteur carré. Dans un tel cas, $\mu(m \times m') = \mu(m) \times \mu(m') = 0$.

S'ils sont tous deux au moins égaux à 2 et sans facteur carré considérons leurs décompositions :

$m = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k$ et $m' = p'_1 \times p'_2 \times \ldots \times p'_{k'}$. Les entiers *m* et *m'* étant supposés premiers entre eux, les nombres premiers d'une décomposition sont distincts de ceux de l'autre décomposition. La décomposition en facteurs premiers du produit contient $k + k'$ nombres premiers distincts, elle est :

$$m \times m' = (p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_k) \times (p'_2 \times \ldots \times p'_{k'})$$

Le produit est sans facteur carré et $\mu(m \times m') = (-1)^{k+k'} = (-1)^k \times (-1)^{k'} = \mu(m) \times \mu(m')$

La fonction μ est multiplicative.

2.2. Soit *m* un entier au moins égal à 2 (il a donc au moins un facteur premier).

Soit *p* l'un des facteurs premiers de *m* et décomposons *m* ainsi : $m = p^\alpha \times m'$ où *m'* n'a plus *p* comme facteur premier ($m' = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_k}^{\alpha_k}$ où les facteurs premiers indiqués sont tous distincts de *p*).

Les diviseurs de *m* qui ont par μ une image non nulle peuvent être jumelés deux à deux : jumelons chacun des diviseurs *d'* de *m'* qui a une image non nulle avec le diviseur $d = p \times d'$. Lorsque *d'* parcourt l'ensemble des diviseurs de *m'* qui ont une image non nulle, le couple $(d' ; d = d' \times p)$ parcourt l'ensemble des diviseurs de *m* qui ont une image non nulle.

Or, le diviseur $d = d' \times p$ a un facteur premier de plus que *d'*, donc $\mu(d) = -\mu(d')$.

$\sum_{d/m} \mu(d) = \sum_{d'/m'} (\mu(d') + \mu(p \times d')) = \sum_{d'/m'} (\mu(d') - \mu(d')) = 0$.

Pour tout entier $m \geq 2$: $\sum_{d/m} \mu(d) = 0$.

2.3. Produit de convolution

Le produit de convolution de deux fonctions arithmétiques f et g associe à tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ le nombre réel défini par :

$$f * g(n) = \sum_{d/n} f(d).g\left(\frac{n}{d}\right)$$

Les entiers *d* et $\frac{n}{d}$ étant deux diviseurs complémentaires de *n*, il est possible d'exprimer plus symétriquement le produit de convolution comme suit, la relation $uv = n$ signifiant que le couple (u, v) décrit l'ensemble des diviseurs complémentaires de *n* :

$$f * g(n) = \sum_{uv=n} f(u).g(v)$$

Cette expression, en raison de sa symétrie, nous sera utile pour étudier la commutativité et l'associativité.

La loi * est bien une loi de composition interne sur l'ensemble des fonctions arithmétiques car l'énoncé précise lui-même que $f * g$ est « définie sur $\mathbb{N}^*$ ».

Pour tout entier *n* strictement positif :

$$f * g(n) = \sum_{uv=n} f(u).g(v) = \sum_{vu=n} g(v).f(u) = g * f(n)$$

Ce qui prouve la commutativité de la loi « * ».

Etudions l'associativité en comparant, pour *n* entier strictement positif, les expressions de $(f * g) * h(n)$ d'une part et $f * (g * h)(n)$ d'autre part.

$$(f * g) * h(n) = \sum_{uv=n} \big(f * g(u).h(v)\big) = \sum_{uv=n} \left(\sum_{v'w'=u} f(v').g(w')\right).h(v)$$

Dire que $uv = n$ et que $v'w' = u$ revient à dire que le triplet $(v\,; v'; w')$ est un triplet de diviseurs complémentaires de *n*, c'est-à-dire un triplet de trois nombres dont le produit est égal à *n*. Ainsi :

$$(f * g) * h(n) = \sum_{v \times v' \times w' = n} f(v').g(w').h(v)$$

D'autre part :

$$f*(g*h)(n)=\sum_{uv=n}\big(f(u).(g*h)(v)\big)=\sum_{uv=n}\left(f(u)\sum_{u'w'=v}g(u').h(w')\right)$$

Dire que $uv=n$ et que $u'w'=v$ revient à dire que le triplet $(u;u';w')$ est un triplet de diviseurs complémentaires de *n*, c'est-à-dire un triplet de trois nombres dont le produit est égal à *n*. Ainsi :

$$f*(g*h)(n)=\sum_{u\times u'\times w'=n}f(u).g(u').h(w')$$

Les deux expressions obtenues sont équivalentes, ce qui prouve l'égalité $f*(g*h)(n)=f*(g*h)(n)$ pour tout entier $n>0$ et donc l'associativité de la loi *.

2.3.2. Soit *f* une fonction arithmétique. D'après la définition de la fonction khi, quel que soit l'entier strictement positif *n* :

$$f*\chi(n)=\sum_{d/n}f(d).\chi\left(\frac{n}{d}\right)$$

Le seul terme non nul dans la somme est le terme $\chi\left(\frac{n}{n}\right)=1$ que l'on obtient quand le diviseur courant *d* est égal à *n*. Il subsiste, pour tout entier $n\geq 1$:

$$f*\chi(n)=f(n)$$

Ce qui montre que $f*\chi=f$ et que la fonction arithmétique « khi » est un élément neutre.

2.3.3. Supposons que *f* soit une fonction arithmétique inversible pour la loi de convolution et soit *g* sa fonction arithmétique inverse, c'est-à-dire telle que $f*g=g*f=\chi$.

En particulier : $f*g(1)=\chi(1)=1$.

Or, vu la définition du produit de convolution, $f*g(1)=f(1)\times g(1)$

La relation $f(1)\times g(1)=1$ montre que $f(1)\neq 0$.

Réciproquement, soit *f* soit une fonction arithmétique telle que $f(1)\neq 0$. Tentons de construire terme après terme sa fonction réciproque *g* en raisonnant par récurrence forte.

L'image par g de l'entier initial 1 est : $g(1) = \frac{1}{f(1)}$ qui existe puisque par hypothèse $f(1) \neq 0$.

Supposons construits tous les termes $g(k)$ jusqu'à un certain entier strictement positif n (c'est-à-dire les termes $g(1), g(2), \dots, g(n)$).

D'après la définition du produit de convolution, au rang suivant $n+1$ (qui est au moins égal à 2) :

$$f * g(n+1) = \sum_{d/(n+1)} f(d).\, g\left(\frac{n+1}{d}\right) = \chi(n+1) = 0$$

Nous en déduisons que : $f(1).\, g(n+1) = -\sum_{d \text{ div.strict de } (n+1)} f(d).\, g\left(\frac{n+1}{d}\right)$

Pour tout d diviseur strict de $n+1$, l'entier $\frac{n+1}{d}$ est strictement inférieur à $n+1$ et, par l'hypothèse de récurrence, $g\left(\frac{n+1}{d}\right)$ est déjà connu.

Nous pouvons construire à son tour : $g(n+1) = -\frac{1}{f(1)} \sum_{d \text{ div.strict de } (n+1)} f(d).\, g\left(\frac{n+1}{d}\right)$.

En résumé :

- $g(1) = \frac{1}{f(1)}$.
- Si pour un certain entier $n \geq 1$ on a construit $g(1), g(2), \dots, g(n)$, alors on peut construire aussi le terme suivant $g(n+1)$.

Les hypothèses de la récurrence forte sont satisfaites. L'image $g(n)$ de l'entier n peut être construite pour tout entier $n \geq 1$. On conclut que si $f(1) \neq 0$, alors on peut définir une fonction arithmétique g inverse de f pour la convolution.

En résumé, f est inversible pour la convolution si et seulement si $f(1) \neq 0$

2.4. Formule d'inversion de Möbius

2.4.1. D'après la définition donnée par l'énoncé, la fonction « ν » prend la valeur 1 pour tout $n \geq 1$:

$$\mu * \nu(n) = \sum_{d \text{ divise } n} \mu(d).\, \nu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \text{ divise } n} \mu(d)$$

Or, $\mu * \nu(1) = \mu(1) = 1 = \chi(1)$ et la question 2.2 a montré que pour $n \geq 2$:

$$\mu * \nu(n) = \sum_{d \text{ divise } n} \mu(d) = 0 = \chi(n)$$

La fonction $\mu * \nu$ coïncide avec la fonction χ sur $\mathbb{N}^*$. Nous en déduisons :

$\mu * \nu = \chi$, les fonctions arithmétiques μ et ν sont inverses pour la convolution.

2.4.2. Compte tenu de la définition de g donnée par l'énoncé : $g = f * \nu$.

2.4.3. En composant par la fonction μ qui est inverse de ν : $f = g * \mu = \mu * g$

Nous en déduisons la relation voulue :

$$\forall m \in \mathbb{N}^* : g(m) = \sum_{d \text{ divise } m} f(d) \iff \forall m \in \mathbb{N}^* : f(m) = \sum_{d \text{ divise } m} \mu\left(\frac{m}{d}\right).g(d)$$

2.5. Une application à la fonction d'Euler

2.5.1. La **question 1.3.2** a montré que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{d'/n} \varphi\left(\frac{n}{d'}\right) = \sum_{d/n} \varphi(d) = n$$

Nous sommes amenés à appliquer la formule d'inversion de Möbius lorsque f est la fonction phi et g est la fonction identité, qui associe à tout entier lui-même.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : n = \sum_{d \text{ divise } n} \varphi(d) \iff \forall n \in \mathbb{N}^* : \varphi(n) = \sum_{d \text{ divise } n} \mu\left(\frac{n}{d}\right).d = \sum_{d \text{ divise } n} \mu(d).\frac{n}{d}$$

2.5.3. (On a interverti l'ordre des questions 2.5.2 et 2.5.3)

Montrons que la fonction phi est multiplicative :

Soit *m* et *n* deux entiers strictement positifs premiers entre eux. L'hypothèse « premiers entre eux » induit le fait que, à tout diviseur *d* du produit $m \times n$, on peut associer un et un seul couple $(d_1\,;\,d_2)$ d'entiers strictement positifs tels que $d = d_1 \times d_2$ avec d_1 diviseur de *m* et d_2 diviseur de *n*.

On obtient ainsi une fois et une seule tous les diviseurs de $m \times n$ comme produits d'un diviseur de *m* et d'un diviseur de *n*.

Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$\varphi(m \times n) = \sum_{d_1 \text{ divise } m} \left(\sum_{d_2 \text{ divise } n} \left(\mu\left(\frac{m \times n}{d_1 \times d_2}\right).(d_1 \times d_2) \right) \right)$$

Nous avons vu que la fonction μ était multiplicative. Les deux entiers $\frac{m}{d_1}$ et $\frac{n}{d_2}$ sont l'un diviseur de *m* et l'autre diviseur de *n* : ils sont premiers entre eux, nous pouvons appliquer la multiplicativité :

$$\mu\left(\frac{m \times n}{d_1 \times d_2}\right) = \mu\left(\frac{m}{d_1}\right) \times \mu\left(\frac{n}{d_2}\right)$$

L'expression de $\varphi(m \times n)$ peut être scindée en deux sommations indépendantes :

$$\varphi(m \times n) = \sum_{d_1 \text{ divise } m} \left(\sum_{d_2 \text{ divise } n} \left(\mu\left(\frac{m}{d_1}\right) \times \mu\left(\frac{n}{d_2}\right).(d_1 \times d_2) \right) \right)$$

$$\varphi(m \times n) = \left(\sum_{d_1 \text{ divise } m} \left(\mu\left(\frac{m}{d_1}\right).(d_1) \right) \right) \times \left(\sum_{d_2 \text{ divise } n} \left(\mu\left(\frac{n}{d_2}\right).(d_2) \right) \right)$$

Nous obtenons bien la relation : $\varphi(m \times n) = \varphi(m) \times \varphi(n)$, la fonction phi est multiplicative.

2.5.2. Nous avons vu dans la **question 1.2.4** que si *p* est un nombre premier et α un exposant strictement positif : $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^\alpha\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ et nous venons de démontrer la multiplicativité de la fonction phi en résolvant la **question 2.5.3**.

Soit *n* un nombre entier décomposé en facteurs premiers : $n = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_r}^{\alpha_r}$.

Ces puissances de nombres premiers sont des entiers premiers entre eux deux à deux, nous pouvons leur appliquer la multiplicativité de la fonction phi :

$$\varphi(n) = \varphi({p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \dots \times {p_r}^{\alpha_r}) = \prod_{k=1}^{r} \varphi({p_k}^{\alpha_k})$$

$$\varphi(n) = \prod_{k=1}^{r} {p_k}^{\alpha_k}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \left(\prod_{k=1}^{r} {p_k}^{\alpha_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right)$$

Nous obtenons la relation :

$$\varphi(n) = n\left(\prod_{k=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right)$$

2.6. Une application de la fonction phi

2.6.1 et 2.6.2.

L'usage de TI-Nspire nous permet de répondre à ces deux questions et, notamment, de proposer une factorisation de F_5.

Define $f(n)=2^{2^n}+1$	*Terminé*
seq$(f(n),n,0,5)$	$\{3,5,17,257,65537,4294967297\}$
factor$(\{3,5,17,257,65537,4294967297\})$	$\{3,5,17,257,65537,641\cdot 6700417\}$
©gjmaths	
isPrime(257)	true
isPrime(65537)	true
isPrime(4294967297)	false

2.6.4. (Nous intervertissons 2.6.3 et 2.6.4).

Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}_n$: « $2^{2^{n+1}} - 1 = F_0 \times F_1 \times \dots \times F_n$ » est vérifiée pour tout entier naturel n.

Initialisation : Ci-contre nous vérifions cette propriété pour n allant de 0 à 5 :

$$2^{2^{n+1}} - 1 = F_0 \times F_1 \times \dots \times F_n$$

seq$\left(\prod_{k=0}^{n}(f(k)),n,0,5\right)$	$\{3,15,255,65535,4294967295,18446744073709551615\}$
seq$\left(2^{2^{n+1}}-1,n,0,5\right)$	$\{3,15,255,65535,4294967295,18446744073709551615\}$

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel n, la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée, c'est-à-dire que : $2^{2^{n+1}} - 1 = F_0 \times F_1 \times \dots \times F_n$.

Multiplions par $F_{n+1} = 2^{2^{n+1}} + 1$:

$$\left(2^{2^{n+1}} - 1\right) \times F_{n+1} = \left(2^{2^{n+1}} - 1\right) \times \left(2^{2^{n+1}} + 1\right) = \left(2^{2^{n+1}}\right)^2 - 1 = 2^{2^{n+2}} - 1$$

Nous obtenons la relation : $2^{2^{(n+1)+1}} - 1 = F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_n \times F_{n+1}$ c'est-à-dire que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Autrement dit, $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$, la propriété à démontrer est héréditaire.

Etant (abondamment) initialisée dès le rang zéro et étant héréditaire, la propriété $\mathcal{P}_n$:

« $2^{2^{n+1}} - 1 = F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_n$ » est vérifiée pour tout entier naturel *n*.

2.6.3. La propriété que nous venons de démontrer exprime, en d'autres termes que :

$$F_{n+1} - F_0 \times F_1 \times \ldots \times F_n = 2$$

Soit *n* un entier naturel, *k* un entier tel que $0 \leq k \leq n$ et *d* un diviseur commun à F_{n+1} et à F_k.

Si nous notons P_k le produit des nombres de Fermat de F_0 à F_n autres que F_k, nous pouvons écrire que : $F_{n+1} - P_k \times F_k = 2$. Si *d* divise F_{n+1} et F_k, alors *d* divise 2. Mais comme les nombres de Fermat sont des nombres impairs, *d* n'est pas égal à 2. Nécessairement : $d = 1$, les nombres F_{n+1} et F_k sont premiers entre eux, et cela quel que soit *k* tel que $0 \leq k \leq n$.

Nous en déduisons qu'un nombre de Fermat est premier avec chacun des nombres de Fermat qui le précèdent.

Ce qui revient à dire que :

Deux nombres de Fermat d'indices distincts sont toujours premiers entre eux.

2.6.5. La copie d'écran ci-contre nous montre que la relation $\varphi(2^{2^n} - 1) = \varphi(2^{2^n})$ est vérifiée pour *n* allant de 0 à 4.

Define $f(n)=2^{2^n}+1$	*Terminé*
seq($f(n)$,n,0,5)	{3,5,17,257,65537,4294967297}
seq($phi(f(n)-1)$,n,0,4)	{1,2,8,128,32768}
seq($phi(f(n)-2)$,n,0,4)	{1,2,8,128,32768}
factor({1,2,8,128,32768})	$\{1,2,2^3,2^7,2^{15}\}$

De façon générale, $\varphi(2^{2^n}) = 2^{2^n} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2^{2^n - 1}$ et d'autre part, tant que les F_k sont des nombres premiers, $\varphi(F_n) = F_n - 1 = 2^{2^n}$. C'est pourquoi la relation est vérifiée dans ces circonstances.

Conjecturons que l'égalité $(2^{2^n} - 1) = \varphi(2^{2^n})$ n'est plus vérifiée à partir du rang 5 car F_5 n'est pas un nombre premier. Son image par phi est calculée ci-contre, cette image n'est plus une puissance de 2.

factor(4294967297)	641·6700417
phi(641)	640
phi(6700417)	6700416
640·6700416	4288266240
factor(4288266240)	$2^{14}\cdot 3\cdot 5\cdot 17449$

Partie 3 : Convergence et limite de certaines suites numériques

3.1.1. Pour tout entier *n* strictement positif : $U_{n+1} - U_n = u_{n+1}$.

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est une suite numérique à termes positifs, la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ définie par la somme de ses *n* premiers termes est telle que la différence de deux termes consécutifs est toujours positive :

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est une suite croissante.

3.1.2. On sait qu'une suite croissante et majorée converge. Réciproquement, une suite croissante convergente est majorée par sa limite. Donc, la suite croissante $(U_n)_{n\in\mathbb{N}*}$ est convergente si et seulement si elle est majorée.

3.2.1. On sait par définition de la valeur absolue que, pour tout nombre réel *x* : $\begin{cases} x \leq |x| \\ -x \leq |x| \end{cases}$ car la valeur absolue de *x* est le plus grand des deux nombres *x* ou $-x$.

- De l'inégalité $x \leq |x|$, on déduit $0 \leq |x| - x$ en ajoutant $-x$ aux deux membres de l'inégalité.
- De l'inégalité $-x \leq |x|$, on déduit $|x| - x \leq 2|x|$ en ajoutant $|x|$ aux deux membres de l'inégalité.

En conséquence, pour tout nombre réel *x* : $0 \leq |x| - x \leq 2|x|$.

En appliquant cette double inégalité avec $x = u_n$, nous obtenons : $0 \leq |u_n| - u_n \leq 2|u_n|$.

Ceci pour tout entier *n* strictement positif.

3.2.2. D'après la question précédente, la suite de terme général $|u_n| - u_n$ est une suite à termes positifs.

La suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} |u_k| - u_k$ est une suite croissante.

Si la suite de terme général $U'_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$ est convergente vers une limite *L'*, alors la suite de terme général $U^*_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k| - u_k$, en qualité de suite majorée par la suite $\sum_{k=1}^{n} 2|u_k|$, est majorée par $2L'$.

Etant croissante et majorée, cette suite converge.

3.2.3. Par définition de ces suites : $U_n = U'_n - U^*_n$ pour tout entier *n* strictement positif. La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ apparaît comme étant la différence de deux suites convergentes : elle est elle-même convergente.

On conclut que la convergence de la suite définie par $U'_n = \sum_{k=1}^{n} |u_k|$

implique la convergence de la suite définie par $U_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$

3.3. Produit de convolution de deux suites

Le produit de convolution de deux suites *u* et *v* associe à tout entier $n \in \mathrm{N}^*$ le nombre réel défini par :

$$w_n = \sum_{d/n} u_d . v_{\frac{n}{d}}$$

Les entiers *d* et $\frac{n}{d}$ étant deux diviseurs complémentaires de *n*, il est possible d'exprimer plus symétriquement le produit de convolution ainsi, la relation $ij = n$ signifiant que le couple (i, j) décrit l'ensemble des diviseurs complémentaires de *n* (c'est-à-dire dont le produit est exactement égal à *n*) :

$$w_n = \sum_{ij=n} u_i . v_j$$

3.3.1. Par définition des suites en jeu dans cette question :

$$U_n V_n = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) \times \left(\sum_{k=1}^{n} v_k\right) = \sum_{(i,j)\in C_n} u_i v_j$$

$$W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{ij=k} u_i v_j\right) = \sum_{(i\,;j)\in \Delta_n} u_i v_j$$

Les termes $u_i v_j$ qui figurent à la fois dans l'expression de W_n et dans celle de $U_n V_n$ sont en effet ceux pour lesquels le couple $(i\,; j)$ de C_n a pour produit un entier *k* tel que $1 \leq k \leq n$. Il s'agit des couples$(i\,; j)$ qui appartiennent à Δ_n. Dans la différence $U_n V_n - W_n$, ces termes sont éliminés. Il reste dans la sommation les couples de C_n qui n'appartiennent pas à Δ_n. Soit :

$$U_n V_n - W_n = \sum_{(i\,;j)\in C_n\,;\, ij>n} u_i . v_j$$

3.3.2. L'ensemble Δ_{n^2} est l'ensemble des couples $(i\,;j)$ tels que : $\begin{cases} 1 \leq i \leq n^2 \\ 1 \leq j \leq n^2 \\ 1 \leq i \times j \leq n^2 \end{cases}$.

- Par sa construction donnée par l'énoncé, Δ_n est inclus dans l'ensemble C_n.
- C_n est l'ensemble des couples $(i\,;j)$ tels que : $\begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n \end{cases}$.

  Quel que soit un tel couple : $\begin{cases} 1 \leq i \leq n \leq n^2 \\ 1 \leq j \leq n \leq n^2 \\ 1 \leq i \times j \leq n \times n = n^2 \end{cases}$. Tout élément de C_n est élément de Δ_{n^2}

Il en résulte la double inclusion : $\Delta_n \subset C_n \subset \Delta_{n^2}$

Puisque les suites en jeu sont à termes positifs, cette double inclusion implique que :

$$\sum_{(i\,;j)\in\Delta_n} u_i v_j \leq \sum_{(i\,;j)\in C_n} u_i v_j \leq \sum_{(i\,;j)\in\Delta_{n^2}} u_i v_j$$

Autrement dit : $W_n \leq U_n V_n \leq W_{n^2}$

(ii) On sait que si deux suites (U_n) et (V_n) sont convergentes, alors leur suite produit $(U_n V_n)$ est convergente et a pour limite le produit de leurs limites. Ainsi, $(U_n V_n)$ converge vers $\left(\lim\limits_{n\to\infty} U_n\right) \times \left(\lim\limits_{n\to\infty} V_n\right)$

Les suites (U_n) et (V_n) étant croissantes (elles vérifient les hypothèses de **3.1**), elles sont majorées par leurs limites et la suite produit est majorée par $\left(\lim\limits_{n\to\infty} U_n\right) \times \left(\lim\limits_{n\to\infty} V_n\right)$.

La suite (W_n) est une suite croissante (elle vérifie les hypothèses de **3.1**) et elle est majorée par $\left(\lim\limits_{n\to\infty} U_n\right) \times \left(\lim\limits_{n\to\infty} V_n\right)$. Elle est donc elle-même convergente.

Si nous notons W sa limite, nous pouvons dire que : $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = \lim\limits_{n\to\infty} W_{n^2} = W$, car la limite de W_{n^2} s'obtient par composition des limites : $\begin{cases} N = n^2 \to +\infty \\ W_N \to W \end{cases}$. L'inégalité universelle $W_n \leq U_n V_n \leq W_{n^2}$ implique, par passage à la limite : $W \leq \left(\lim\limits_{n\to\infty} U_n\right) \times \left(\lim\limits_{n\to\infty} V_n\right) \leq W$.

En fin de compte : $\lim\limits_{n\to\infty} W_n = \lim\limits_{n\to\infty} W_{n^2} = \left(\lim\limits_{n\to\infty} U_n\right) \times \left(\lim\limits_{n\to\infty} V_n\right)$

3.3.3. Reprenons les notations de la question 3.3.1 où nous avions :

$$U_nV_n - W_n = \sum_{(i\,;j)\in C_n\,;\,ij>n} u_i.v_j$$

Et par la même occasion (l'ensemble sur lequel s'effectue la sommation est exactement le même) :

$$U'_nV'_n - T_n = \sum_{(i\,;j)\in C_n\,;\,ij>n} |u_i|.|v_j|$$

Pour chaque couple $(i\,;j)$ de cet ensemble de sommation : $-|u_i|.|v_j| \leq u_i.v_j \leq |u_i|.|v_j|$, donc cette double inégalité commune aux termes associés à l'ensemble de sommation s'étend aux sommes elles-mêmes :

$$-\sum_{(i\,;j)\in C_n\,;\,ij>n} |u_i|.|v_j| \leq \sum_{(i\,;j)\in C_n\,;\,ij>n} u_i.v_j \leq \sum_{(i\,;j)\in C_n\,;\,ij>n} |u_i|.|v_j|$$

Il en résulte l'inégalité :

$$\left|\sum_{(i\,;j)\in C_n\,;\,ij>n} u_i.v_j\right| \leq \sum_{(i\,;j)\in C_n\,;\,ij>n} |u_i|.|v_j|$$

Autrement dit : $|U_nV_n - W_n| \leq U'_nV'_n - T_n$

(ii). Nous avons vu dans la **question 3.2.3** que la convergence des sommes des valeurs absolues des termes d'une suite impliquait la convergence des sommes des termes de cette suite.

L'hypothèse « (U'_n) et (V'_n) sont convergentes » implique que (U_n) et (V_n) sont elles-mêmes convergentes.

Il en résulte que la suite produit (U_nV_n) converge vers $\left(\lim_{n\to\infty} U_n\right) \times \left(\lim_{n\to\infty} V_n\right)$.

D'autre part, la **question 3.3.2**, appliquée au présent contexte, montre que les suites $(U'_nV'_n)$ et leur convolée (T_n) ont la même limite. Leur différence a pour limite zéro : $\lim_{n\to\infty} (U'_nV'_n - T_n) = 0$.

La suite $(U_nV_n - W_n)$ étant majorée en valeur absolue par une suite qui converge vers zéro, elle converge elle-même vers zéro. Nous pouvons en déduire que la suite (W_n) est elle aussi convergente et qu'elle a pour limite celle de (U_nV_n) :

Les suites (U_nV_n) et (W_n) convergent vers $\left(\lim_{n\to\infty} U_n\right) \times \left(\lim_{n\to\infty} V_n\right)$.

3.4. Application à l'étude d'une suite

Les suites en jeu sont les suivantes : $u_n = \frac{\mu(n)}{n^2}$; $v_n = \frac{1}{n^2}$

3.4.1. Leur produit de convolution est la suite définie par :

$$w_n = \sum_{d \text{ divise } n} \frac{\mu(d)}{d^2} \times \frac{1}{\left(\frac{n}{d}\right)^2} = \sum_{d \text{ divise } n} \frac{\mu(d)}{d^2} \times \frac{d^2}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{d \text{ divise } n} \mu(d)$$

La **question 2.2** a montré que $\sum_{d \text{ divise } 1} \mu(d) = \mu(1) = 1$ et que pour $n \geq 2$: $\sum_{d \text{ divise } n} \mu(d) = 0$

En conséquence : $w_1 = 1$ et pour $n \geq 2,\ w_n = 0$

Nous pouvons en déduire que pour tout entier strictement positif *n* : $W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k = 1$.

La suite (W_n) est la suite constante égale à 1 pour tout *n*.

3.4.2. La convergence de la suite $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ a été établie dans le **problème 1** (résultat « classique »). Ce problème a aussi établi que la limite de cette suite est égale à $\frac{\pi^2}{6}$. Nous admettons ces résultats.

La suite $\sum_{k=1}^{n} u_k$ est alors convergente car ses termes sont majorés en valeur absolue par ceux d'une série convergente : $\left|\frac{\mu(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout *n* vu que la fonction « mu » prend les valeurs 0, ou 1, ou -1.

Dans le présent contexte, le produit des suites $(\sum_{k=1}^{n} u_k)$ et $(\sum_{k=1}^{n} v_k)$ a pour limite la même que celle de la suite constante (W_n), égale ici à 1 pour tout *n*.

C'est donc que le produit de leurs limites est égal à 1 :

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2}\right) \times \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1)}{k^2}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2}\right) \times \frac{\pi^2}{6} = 1$$

Nous en déduisons que :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(k)}{k^2} = \frac{6}{\pi^2}$$

Partie 4 : Un théorème de Césaro

4.1. Première méthode de calcul de $P(C_n)$

4.1.1. Considérons l'application $(x,y) \longmapsto s(x,y) = (y,x)$ définie sur l'ensemble $\{1\,;\dots;n\}^2$.

Il s'agit d'une bijection de $\{1\,;\dots;n\}^2$ sur lui-même (en effet, l'application s est involutive : $s \circ s = I_d$).

On note que s laisse globalement invariant l'ensemble C_n. En effet, $x \wedge y = y \wedge x$ pour tout couple d'entiers (x,y), en particulier le couple (x,y) est un couple d'entiers premiers entre eux si et seulement si le couple (y,x) en est un, de ce fait $(x,y) \in C_n \iff s(x,y) \in C_n$.

L'application s étant une bijection de l'ensemble fini $\{1\,;\dots;n\}^2$ sur lui-même, chaque partie de cet ensemble et son image par s ont le même nombre d'éléments. Or : $x < y \iff y > x$, c'est-à-dire que l'application s échange les deux ensembles C_n^+ et C_n^- : $(x,y) \in C_n^+ \iff s(x,y) \in C_n^-$.

Nous en déduisons que : $\mathrm{card}(C_n^+) = \mathrm{card}(C_n^-)$

D'autre part, on peut définir une partition de C_n en trois ensembles disjoints : $C_n = C_n^+ \cup C_n^- \cup \{(1,1)\}$.

Nous en déduisons que : $\mathrm{card}(C_n) = \mathrm{card}(C_n^+) + \mathrm{card}(C_n^-) + 1 = 1 + 2\mathrm{card}(C_n^+)$

4.1.2 et 4.1.3. Trions les couples $(a,b) \in C_n^+$ suivant la valeur de leur deuxième composante *b*. Compte tenu de l'inégalité $1 \leq a < b$ pour les couples de C_n^+, cette deuxième composante prend les valeurs allant de 2 à *n*.

Définissons, pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$: $C_n^+(k) = \{(a,b) \in C_n^+ \ ;\ b = k\}$. Nous obtenons une partition de C_n^+ en sous-ensembles deux à deux disjoints : $C_n^+ = C_n^+(2) \cup \dots \cup C_n^+(n)$.

En conséquence : $\mathrm{card}(C_n^+) = \mathrm{card}(C_n^+(2)) + \cdots + \mathrm{card}(C_n^+(n))$.

Par construction, les éléments de $C_n^+(k)$ sont les couples (a,k) tels que : $\begin{cases} 1 \leq a < k \\ a \wedge k = 1 \end{cases}$.

Par définition de la fonction indicatrice d'Euler, le nombre d'éléments de $C_n^+(k)$ est : $\mathrm{card}(C_n^+(k)) = \varphi(k)$

Nous en déduisons :

$$\mathrm{card}(C_n^+) = \varphi(2) + \cdots + \varphi(n) = \sum_{k=2}^{n} \varphi(k)$$

$$\mathrm{card}(C_n) = 1 + 2\mathrm{card}(C_n^+) = 1 + 2\sum_{k=2}^{n} \varphi(k)$$

Compte tenu de l'équiprobabilité des tirages, et du fait que la probabilité d'un couple donné de $\{1\,;\ldots;n\}^2$ soit égale à $\frac{1}{n^2}$:

$$P(C_n) = \frac{\mathrm{card}(C_n)}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(1 + 2\sum_{k=2}^{n} \varphi(k)\right)$$

Si nous commençons la sommation à l'indice $k = 1$:

$$\sum_{k=2}^{n} \varphi(k) = \left(\sum_{k=1}^{n} \varphi(k)\right) - 1$$

Ce qui donne la relation :

$$P(C_n) = \frac{1}{n^2}\left(-1 + 2\sum_{k=1}^{n} \varphi(k)\right)$$

4.2. Deuxième méthode de calcul

Dans cette question, l'ensemble D_k est l'ensemble des couples (a, b) appartenant à $\{1\,;\ldots;n\}^2$ tels que les entiers *a* et *b* sont tous deux des multiples du nombre premier q_k, c'est-à-dire tels que q_k figure dans les deux décompositions en facteurs premiers, celle de *a* et celle de *b*.

4.2.1. Etant donné un couple (a, b) appartenant à $\{1\,;\ldots;n\}^2$, on sait que les entiers *a* et *b* ne sont pas premiers entre eux si et seulement s'ils sont multiples d'un même nombre premier. S'il existe, ce nombre premier est $\leq n$, il ne peut être qu'un nombre premier de la liste $\{q_1, \ldots, q_r\}$:

$$\begin{cases}(a, b) \in \{1\,;\ldots;n\}^2 \\ a \wedge b \neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \exists\, k \in \{1\,;\ldots;r\}, (a, b) \in D_k$$

Il en résulte que la réunion $\bigcup_{k=1}^{r} D_k$ d'une part et l'ensemble C_n d'autre part sont complémentaires. En conséquence :

$$\operatorname{card}(C_n) + \operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{r} D_k\right) = \operatorname{card}(\{1\,;\dots;n\}^2) = n^2$$

$$\operatorname{card}(C_n) = n^2 - \operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{r} D_k\right)$$

4.2.2. Soit, conformément à l'énoncé, k indices tels que : $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq r$ et q_{i_j} pour $j = 1\,;\ \dots ; k$ les nombres premiers associés. Les entiers q_{i_j} étant des nombres premiers, ils sont deux à deux premiers entre eux, leur PPCM est égal à leur produit. Deux entiers *a* et *b* sont divisibles par chacun d'entre eux si et seulement s'ils sont tous deux divisibles par le produit $\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$. Autrement dit :

$$(a, b) \in \bigcap_{j=1}^{k} D_{i_j} \iff \prod_{j=1}^{k} q_{i_j} \ \text{divise } a \text{ et } b$$

Un couple (a, b) de $\{1\,;\dots;n\}^2$ appartient à $\bigcap_{j=1}^{k} D_{i_j}$ si et seulement si *a* et *b* sont tous deux divisibles par le nombre $\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$. On note que l'ensemble décrit par ces entiers $\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$ lorsqu'on fait varier les indices *k* et i_j est un ensemble de nombres « sans facteur carré », chacun de ces nombres « sans facteur carré » représentant l'ensemble $\bigcap_{j=1}^{k} D_{i_j}$ auquel il appartient.

Déterminons le nombre d'éléments de l'ensemble $\bigcap_{j=1}^{k} D_{i_j}$:

Pour cela, considérons la division euclidienne de *n* par le nombre $\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$

Un entier strictement positif *x* est divisible par $\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$ si et seulement s'il existe un entier *d* strictement positif tel que $x = \left(\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}\right) \times d$.

Or, dans l'ensemble $\{1\,;\dots;n\}$, il y a $\left[\frac{n}{\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}}\right]$ multiples du nombre $\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$.

En effet, la partie entière $\left[\frac{n}{\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}}\right]$ représente le quotient de la division euclidienne de *n* par $\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$. Les multiples de $\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$ situés entre 1 et *n* sont $\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$; $2 \times \prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$;… ; $\left[\frac{n}{\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}}\right] \times \prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$

Nous en déduisons qu'il y a dans l'ensemble Ω_n exactement $\left[\frac{n}{\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}}\right]^2$ couples (a, b) constitués d'entiers tous deux divisibles par les entiers q_{i_j} :

$$\operatorname{card} \bigcap_{j=1}^{k} D_{i_j} = \left[\frac{n}{\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}}\right]^2$$

4.2.3. En appliquant la formule d'inclusion-exclusion :

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{r} D_k\right) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \operatorname{card} \bigcap_{j=1}^{k} D_{i_j}\right)$$

Nous en déduisons, par complémentarité :

$$\operatorname{card}(C_n) = n^2 - \operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{r} D_k\right) = n^2 + \sum_{k=1}^{r} (-1)^k \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \left[\frac{n}{\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}}\right]^2\right)$$

Il reste à établir un lien avec la formule donnée dans l'énoncé. Pour cela, revenons sur la formule :

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{r} D_k\right) = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \operatorname{card} \bigcap_{j=1}^{k} D_{i_j}\right)$$

Comptabilisons les couples de $\{1 ; \ldots ; n\}^2$ formé de deux entiers non premiers entre eux en les triant suivant les entiers *d* de l'ensemble $\{2 ; \ldots ; n\}$ qui les divisent.

- Ou bien *d* est sans facteur carré. Il est de la forme $d = \prod_{j=1}^{k} q_{i_j}$ et il représente une intersection $\bigcap_{j=1}^{k} D_{i_j}$ avec ses $\left[\frac{n}{\prod_{j=1}^{k} q_{i_j}}\right]^2 = \left[\frac{n}{d}\right]^2$ éléments. Dans ce cas : $(-1)^{k-1} = -\mu(d)$
- Ou bien *d* a des facteurs carrés et dans ce cas les couples (a, b) divisibles par *d* sont déjà comptabilisés avec les diviseurs de *d* sans facteur carré. Dans ce cas : $\mu(d) = 0$

Nous obtenons la formule :

$$\operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{r} D_k\right) = -\sum_{d=2}^{n} \mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]^2$$

$$\operatorname{card}(C_n) = n^2 - \operatorname{card}\left(\bigcup_{k=1}^{r} D_k\right) = n^2 + \sum_{d=2}^{n} \mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]^2$$

Soit, en fin de compte, vu que $n^2 = \mu(1).\left[\frac{n}{1}\right]^2$:

$$\operatorname{card}(C_n) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]^2$$

$$P(C_n) = \frac{\operatorname{card}(C_n)}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{d=1}^{n} \mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]^2$$

4.3. Confrontons les deux expressions de $P(C_n)$ obtenues dans les deux méthodes de calcul :

$$\begin{cases} P(C_n) = \dfrac{1}{n^2}\left(-1 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(k)\right) \\ P(C_n) = \dfrac{1}{n^2}\left(\displaystyle\sum_{d=1}^{n} \mu(d).\left[\frac{n}{d}\right]^2\right) \end{cases} \Longrightarrow -1 + 2\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \sum_{d=1}^{n} \mu(d).\left[\frac{n}{d}\right]^2$$

Nous en déduisons :

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{d=1}^{n} \mu(d).\left[\frac{n}{d}\right]^2\right)$$

Ci-contre la liste des probabilités $p(C_n)$ pour n allant de 1 à 20, calculées d'abord par la première méthode puis par la deuxième.

Les deux méthodes sont concordantes.

Define $p(n)=\dfrac{-1+2\cdot\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(phi(k))}{n^2}$ *Terminé*

seq$(p(n),n,1,20)$ $\left\{1,\frac{3}{4},\frac{7}{9},\frac{11}{16},\frac{19}{25},\frac{23}{36},\frac{5}{7},\frac{43}{64},\frac{55}{81},\frac{63}{100},\frac{83}{121},\frac{91}{144},\frac{115}{169},\frac{127}{196},\frac{143}{225},\frac{159}{256},\frac{191}{289},\frac{203}{324},\frac{239}{361},\frac{51}{80}\right\}$

©gilbertjulia

Define $mu=\{1,-1,-1,0,-1,1,-1,0,0,1,-1,0,-1,1,1,0,-1,0,-1,0\}$ *Terminé*

Define $q(n)=\dfrac{\displaystyle\sum_{d=1}^{n}\left(mu[d]\cdot\left(\operatorname{int}\left(\frac{n}{d}\right)\right)^2\right)}{n^2}$ *Terminé*

seq$(q(n),n,1,20)$ $\left\{1,\frac{3}{4},\frac{7}{9},\frac{11}{16},\frac{19}{25},\frac{23}{36},\frac{5}{7},\frac{43}{64},\frac{55}{81},\frac{63}{100},\frac{83}{121},\frac{91}{144},\frac{115}{169},\frac{127}{196},\frac{143}{225},\frac{159}{256},\frac{191}{289},\frac{203}{324},\frac{239}{361},\frac{51}{80}\right\}$

Calculons $\varphi(n)$:

Pour cela, exprimons, pour $n \geq 2$, la différence $\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \varphi(k)$:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{d=1}^{n} \mu(d).\left[\frac{n}{d}\right]^2\right) \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \varphi(k) = \frac{1}{2}\left(1 + \sum_{d=1}^{n-1} \mu(d).\left[\frac{n-1}{d}\right]^2\right) \end{cases} \Rightarrow \varphi(n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{d=1}^{n} \mu(d).\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \sum_{d=1}^{n-1} \mu(d).\left[\frac{n-1}{d}\right]^2\right)$$

Exprimons la différence des deux sommes figurant dans l'expression de $\varphi(n)$:

$$\sum_{d=1}^{n} \mu(d).\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \sum_{d=1}^{n-1} \mu(d).\left[\frac{n-1}{d}\right]^2 = \mu(n) + \sum_{d=1}^{n-1} \mu(d).\left(\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \left[\frac{n-1}{d}\right]^2\right)$$

Etudions les parties entières figurant dans cette expression, lorsque *d* varie de 1 à $n-1$:

Soit $n = Q.d + r$ avec $Q = \left[\frac{n}{d}\right]$ et $0 \leq r < d$ la division euclidienne de *n* par *d*.

- Si $0 < r < d$, la relation $n - 1 = Q.d + (r-1)$ est aussi une division euclidienne car $0 \leq r - 1 < d$.

  Dans ce cas, *d* ne divise pas *n* et $\left[\frac{n-1}{d}\right] = \left[\frac{n}{d}\right]$.
- Si $r = 0$, la relation $n - 1 = (Q-1).d + (d-1)$ devient la division euclidienne de $(n-1)$ par *d*.

  Dans ce cas, *d* divise *n*, $\left[\frac{n}{d}\right] = \frac{n}{d}$ et $\left[\frac{n-1}{d}\right] = \frac{n}{d} - 1$. Par conséquent $\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \left[\frac{n-1}{d}\right]^2 = 2\frac{n}{d} - 1$

Les seules valeurs de *d* qui apportent une contribution non nulle à la somme qui précède sont celles qui divisent l'entier *n*. Nous obtenons :

$$\sum_{d=1}^{n} \mu(d).\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \sum_{d=1}^{n-1} \mu(d).\left[\frac{n-1}{d}\right]^2 = \mu(n) + \sum_{\substack{d \text{ divise } n \\ d<n}} \mu(d)\left(2\frac{n}{d} - 1\right)$$

Nous en déduisons :

$$\varphi(n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{d=1}^{n} \mu(d).\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \sum_{d=1}^{n-1} \mu(d).\left[\frac{n-1}{d}\right]^2\right) = \frac{1}{2}\left(\mu(n) + \sum_{\substack{d \text{ divise } n \\ d<n}} \mu(d)\left(2\frac{n}{d} - 1\right)\right)$$

Dans la somme obtenue, il manque le cas « $d = n$ » pour parcourir tous les diviseurs de *n*. Or, lorsque $d = n$, l'expression $\mu(d)\left(2\frac{n}{d} - 1\right)$ prend la valeur $\mu(n)\left(2\frac{n}{n} - 1\right) = \mu(n)$, qui est égal au terme placé « hors-somme ».

Nous pouvons incorporer ce terme dans le sigma pour y représenter le cas « $d = n$ ».

$$\varphi(n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{d \text{ divise } n} \mu(d)\left(2\frac{n}{d} - 1\right)\right) = \sum_{d \text{ divise } n} \mu(d)\frac{n}{d} - \frac{1}{2}\sum_{d \text{ divise } n} \mu(d)$$

Nous avons vu dans la **question 2.2** que : $\sum_{d \text{ divise } n} \mu(d) = 0$.

Nous obtenons en fin de compte :

$$\varphi(n) = \sum_{d \text{ divise } n} \mu(d)\frac{n}{d}$$

4.4. Nous avons vu la formule donnant une expression de $P(C_n)$:

$$P(C_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{d=1}^{n} \mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]^2 = \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2$$

Nous avons vu aussi que $|\mu(d)| \leq 1$ pour tout entier $d \geq 1$.

Démontrons d'abord que la suite $\left(P(C_n)\right)_{n\in\mathbb{N}*}$ est une suite convergente.

Soit *n* un entier tel que $n \geq 1$.

Pour tout entier *d* tel que $1 \leq d \leq n$ et d'après la définition de la partie entière :

$0 \leq \frac{n}{d} - 1 < \left[\frac{n}{d}\right] \leq \frac{n}{d}$ donc $0 < \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2 \leq \frac{1}{d^2}$ et aussi : $\left|\frac{\mu(d)}{n^2}\right|\left[\frac{n}{d}\right]^2 \leq \frac{1}{d^2}$.

Les termes de la somme $\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2$ sont majorés en valeur absolue par ceux, homologues, d'une somme convergente, d'après la **question 3.3.3**, la suite $\left(P(C_n)\right)_{n\in\mathbb{N}*}$ est convergente.

NB. Le fait que la suite $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d^2}$ est convergente est prouvé dans le **problème 1** du même sujet.

Majorons en valeur absolue l'écart entre $\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2$ et $\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}$:

$$\left|\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}\right| = \left|\sum_{d=1}^{n} \mu(d)\left(\frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \frac{1}{d^2}\right)\right| \leq \sum_{d=1}^{n}\left|\frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \frac{1}{d^2}\right|$$

D'après la définition de la partie entière :

$\frac{n}{d} - 1 < \left[\frac{n}{d}\right] \leq \frac{n}{d}$ donc $\frac{1}{d} - \frac{1}{n} < \frac{1}{n}\left[\frac{n}{d}\right] \leq \frac{1}{d}$ et $\frac{1}{d^2} - \frac{2}{dn} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2 \leq \frac{1}{d^2}$.

Nous en déduisons pour tous entiers tels que $1 \leq d \leq n$ l'encadrement :

$$-\frac{2}{dn} + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \frac{1}{d^2} \leq 0$$

Puis la majoration de chaque terme figurant dans la dernière somme écrite :

$$\left|\frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \frac{1}{d^2}\right| \leq \frac{2}{dn} - \frac{1}{n^2}$$

D'où une majoration de l'écart :

$$\left|\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2 - \sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}\right| \leq \sum_{d=1}^{n}\left(\frac{2}{dn} - \frac{1}{n^2}\right)$$

Majorons cette dernière somme, en admettant la majoration (classique) : $\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d} \leq \ln n + 1$:

$$\sum_{d=1}^{n}\left(\frac{2}{dn} - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{n}\left(\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}\right) - \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}\left(\left(\sum_{d=1}^{n} \frac{1}{d}\right) - 1\right) \leq \frac{\ln n}{n}$$

On sait que $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right) = 0$. L'écart entre les deux suites est majoré par une suite qui converge vers zéro. Nous en déduisons que les deux suites converge vers la même limite :

$$\lim_{n\to\infty}(P(C_n)) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{n^2}\left[\frac{n}{d}\right]^2\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{d=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d^2}\right) = \frac{6}{\pi^2}$$

Ci-contre avec TI-Nspire CAS :

- Le calcul de la probabilité $P(C_n)$ lorsque $n = 10$ puis lorsque $n = 100$.
- Une simulation permettant de comparer les fréquences observées (ici sur 10000 essais) avec les probabilités théoriques.

$$\text{Define } p(n)=\frac{-1+2\cdot\sum_{k=1}^{n}(phi(k))}{n^2} \qquad \textit{Terminé}$$

$p(10)$	0.63
$p(100)$	0.6087

test(10,10000)

nombre d'essais 10000.
nombre de succès 6324.
fréquence 0.6324

Terminé

test(100,10000)

nombre d'essais 10000.
nombre de succès 6076.
fréquence 0.6076

Terminé

"test" enregistr. effectue

```
Define test(n,e)=
Prgm
Local u,r,a,b
0→r
For u,1,e
 randInt(1,n)→a
 randInt(1,n)→b
  If gcd(a,b)=1 Then
   r+1→r
  EndIf
EndFor
Disp "nombre d'essais",e
Disp "nombre de succès",r
Disp "fréquence",r/e
EndPrgm
```

On constate que le nombre $P(C_{100})$ n'est déjà plus très éloigné de la limite $\frac{6}{\pi^2} = 0{,}6079$ à 10^{-4} près.

On constate que les résultats théoriques sont compatibles avec ceux de la simulation. Avec 10000 essais, la simulation donne au seuil 95 % les fourchettes $0{,}6224 \leq P(C_{10}) \leq 0{,}6424$ et $0{,}5976 \leq P(C_{100}) \leq 0{,}6176$, les probabilités théoriques sont bien dans ces fourchettes).

Ce que confirme ci-contre une autre tentative analogue de simulation.

test(10,10000)

nombre d'essais 10000.
nombre de succès 6291.
fréquence 0.6291

Terminé

test(100,10000▸

nombre d'essais 10000.
nombre de succès 6096.
fréquence 0.6096

Terminé▸