Concours Général Maths 2024 : Eléments de correction

Il s'agit ici d'un travail personnel, qui ne prétend pas être une correction « officielle ». Seuls les problèmes 1 et 3 sont étudiés.

Exercice 1 : Etude d'une suite

Partie 1 : Généralités.

1. Il s'agit dans cette question 1 de justifier la légitimité de la construction par récurrence de la suite « associée à α ». Un terme de la suite n'admet un successeur que s'il est positif.

Montrons par récurrence sur *n* que la propriété $\wp_n$: « $u_n \geq 0$ » est vérifiée pour tout entier naturel *n*.
Initialisation : $u_0 = \alpha \geq 0$ par hypothèse, ce qui montre que $\wp_0$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel *n*, la propriété $\wp_n$: « $u_n \geq 0$ » soit vérifiée.
Alors, puisque la fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}^+$ et prend ses valeurs dans ce même ensemble, le nombre $\sqrt{u_n}$ existe et est supérieur ou égal à 0.
Il en résulte que : $u_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n} \geq 0$ (positif car somme de deux nombres positifs)
Si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Etant initialisée au rang 0 et héréditaire, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 0$.

Tous les termes de la suite associée à α sont positifs.

2. Soit deux réels tels que $\beta \geq \alpha \geq 0$ et les suites (v_n) et (u_n) qui leur sont respectivement associées (la positivité des nombres α et β garantit l'existence de ces suites qui sont des suites de nombres positifs.)
Montrons par récurrence sur *n* que la propriété $\wp_n$: « $v_n \geq u_n$ » est vérifiée pour tout entier naturel *n*.
Initialisation : $v_0 = \beta \geq \alpha = u_0$ par hypothèse, ce qui montre que $\wp_0$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel *n*, la propriété $\wp_n$: « $v_n \geq u_n$ » soit vérifiée.

Alors, puisque la fonction racine carrée est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle conserve le sens des inégalités :

$v_n \geq u_n \implies \sqrt{v_n} \geq \sqrt{u_n}$ et en conséquence : $v_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{v_n} \geq \frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n} = u_{n+1}$

Si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Etant initialisée au rang 0 et héréditaire, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 0$.

Pour tout entier naturel *n* : $v_n \geq u_n$

3. Soit (w_n) la suite associée à 0. Montrons par récurrence sur *n* que la propriété $\wp_n$: « $w_n \geq 1$ » est vérifiée pour tout entier strictement positif *n*.

Initialisation : $w_1 = \frac{1}{0+1} + \sqrt{0} = 1$ ce qui montre que $\wp_1$ est vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier strictement positif *n*, la propriété $\wp_n$: « $w_n \geq 1$ » soit vérifiée.

Alors, puisque la fonction racine carrée est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, elle conserve le sens des inégalités :

$w_n \geq 1 \implies \sqrt{w_n} \geq \sqrt{1} = 1$ et en conséquence : $w_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{w_n} \geq \frac{1}{n+1} + 1 \geq 1$

Si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Etant initialisée au rang 1 et héréditaire, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Pour tout entier strictement positif *n* : $w_n \geq 1$

NB. Si tous les termes de la suite associée à 0 sont ≥ 1, alors d'après la **question 2** il en est de même de tous les termes de toute suite (u_n) associée à un réel positif donné α puisqu'une telle suite majore (w_n). Pour tout entier naturel *n* : $u_n \geq w_n \geq 1$.

4. Supposons que la suite (u_n) associée à un réel positif donné α soit convergente vers un réel ℓ. D'après la remarque de la question précédente : $\ell \geq 1$.

Passons à la limite dans la relation de récurrence, en tenant compte que la limite d'une suite ne dépend pas d'un décalage d'indexation :

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \sqrt{u_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) + \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{u_n}\right)$$

D'une part $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right)=0$ et d'autre part, la fonction racine carrée étant continue sur $\mathbb{R}^+$, donc en particulier en ℓ, $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{u_n}\right)=\sqrt{\lim_{n\to\infty}u_n}=\sqrt{\ell}$.

Il en résulte que le nombre ℓ est solution de l'équation $\ell=\sqrt{\ell}$. Cette équation ayant pour solutions 0 et 1, la seule possibilité dans ce contexte est $\ell=1$.

Si la suite (u_n) associée à un réel positif donné α est convergente, alors elle converge vers 1.

5. Considérons la suite (u_n) associée à un réel positif donné α. Etudions les différences de deux termes consécutifs de cette suite, en écrivant à leur propos une relation de récurrence :

$$u_{n+2}-u_{n+1}=\left(\frac{1}{n+2}+\sqrt{u_{n+1}}\right)-\left(\frac{1}{n+1}+\sqrt{u_n}\right)=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\left(\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_n}\right)$$

$$u_{n+2}-u_{n+1}=-\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{(u_{n+1}-u_n)}{\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n}}$$

Déterminons une condition pour que la propriété $\wp_n$: « $u_{n+1}-u_n\leq 0$ » soit vérifiée.

Hérédité : Supposons que, pour un certain entier naturel *n*, la propriété $\wp_n$: « $u_{n+1}-u_n\leq 0$ » soit vérifiée. Alors, nous avons aussi $u_{n+2}-u_{n+1}\leq 0$ car $u_{n+2}-u_{n+1}$ est dans ce cas la somme des deux nombres réels négatifs, $-\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ et $\frac{(u_{n+1}-u_n)}{\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n}}$

Si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire.

Initialisation :

Remarquons d'abord que $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le lecteur pourra vérifier que $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Evaluons la différence entre les deux premiers termes de cette suite : $u_1-u_0=\left(1+\sqrt{\alpha}\right)-\alpha$

Cette différence est la valeur en $b=\sqrt{\alpha}$ du trinôme du second degré *T* défini par : $T(b)=-b^2+b+1$.

Or, ce trinôme *T* a deux racines, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et se factorise en : $T(b)=-\left(b-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(b-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

Il est strictement négatif quand $b>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Lorsque $\alpha>\frac{3+\sqrt{5}}{2}$, nous avons $\sqrt{\alpha}>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $u_1-u_0=T\left(\sqrt{\alpha}\right)<0$. En conséquence $\wp_0$ est vérifiée.

Ainsi, la condition $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ permet l'initialisation au rang 0 de la propriété $\wp_n$: « $u_{n+1} - u_n \leq 0$ ».

Lorsque $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, la propriété $\wp_n$: « $u_{n+1} - u_n \leq 0$ » est vérifiée pour tout entier naturel *n*, la suite associée à α est alors une suite décroissante.

Une telle suite étant décroissante et minorée par 1 est convergente. Elle converge donc vers 1, seule limite possible.

Considérons maintenant une suite (u_n) associée à un réel $\alpha \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2}$. D'après la question 2, elle est majorée par n'importe quelle suite associée à un réel $> \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (par exemple celle qui est associée à 3).

(u_n) est donc encadrée par la suite constante 1 (d'après la question 3) et par une suite qui converge vers 1. D'après le théorème des gendarmes, elle converge vers 1.

Ainsi, toute suite (u_n) associée à un nombre positif α converge vers 1, que $\alpha > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou non.

Partie 2 : Un cas particulier.

Un algorithme pour avoir une petite idée du comportement de la suite étudiée.

```
>>> def suitethé(m):
        t=4
        for n in range(1,m+1):
                t=sqrt(t)+1/n
                x=1+2/n-t
                y=1+3/n-t
                print("n=",n,"t=",t,"x=",x,"y=",y)


>>> suitethé(10)
n= 1 t= 3.0 x= 0.0 y= 1.0
n= 2 t= 2.232050807568877 x= -0.2320508075688772 y= 0.2679491924311228
n= 3 t= 1.8273382890041225 x= -0.16067162233745602 y= 0.17266171099587746
n= 4 t= 1.6017907711639854 x= -0.10179077116398538 y= 0.14820922883601462
n= 5 t= 1.4656187305677746 x= -0.06561873056777467 y= 0.1343812694322255
n= 6 t= 1.3772940786179138 x= -0.043960745284580494 y= 0.12270592138208625
n= 7 t= 1.3164388735507975 x= -0.030724587836511885 y= 0.11213255502063113
n= 8 t= 1.2723617012741872 x= -0.022361701274187224 y= 0.10263829872581276
n= 9 t= 1.2391012268808315 x= -0.016879004658609142 y= 0.0942321064525018
n= 10 t= 1.2131492383687066 x= -0.013149238368706628 y= 0.08685076163129346
```

6. NB. Dans cette question, nous admettons et utiliserons un encadrement de la fonction $x \longmapsto \sqrt{1+x}$ qui est l'encadrement, pour tout réel *x* positif : $1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \leq \sqrt{1+x} \leq 1+\frac{x}{2}$

Montrons par récurrence sur *n* que la propriété $\wp_n$: « $1+\frac{2}{n} \leq t_n \leq 1+\frac{3}{n}$ » est vérifiée pour tout entier strictement positif *n*.

Initialisation : En consultant les résultats affichés par l'algorithme précédent, nous constatons que $\wp_k$ est vérifiée pour tout entier *n* allant de 1 à 10.

Hérédité : Supposons que la propriété $\wp_n$: « $1+\frac{2}{n} \leq t_n \leq 1+\frac{3}{n}$ » soit vérifiée pour un certain entier strictement positif *n*.

Compte tenu de la relation de récurrence $t_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \sqrt{t_n}$ et du fait que la fonction racine carrée conserve le sens des inégalités, nous obtenons l'encadrement : $\frac{1}{n+1} + \sqrt{1+\frac{2}{n}} \leq t_{n+1} \leq \frac{1}{n+1} + \sqrt{1+\frac{3}{n}}$.

Compte tenu de l'encadrement admis :

- D'une part : $1+\frac{1}{2}\times\frac{2}{n}-\frac{1}{8}\times\frac{4}{n^2} = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2} \leq \sqrt{1+\frac{2}{n}}$
- D'autre part : $\sqrt{1+\frac{3}{n}} \leq 1+\frac{1}{2}\times\frac{3}{n} = 1+\frac{3}{2n}$

De sorte que : $1+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right) \leq t_{n+1} \leq 1+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2n}\right)$

- D'une part : $\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)-\frac{2}{n+1}=\frac{n-1}{2n^2(n+1)}$, ce qui est ≥ 0 pour tout $n \geq 1$.

- D'autre part : $\left(\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2n}\right)-\frac{3}{n+1}=\frac{3}{2n}-\frac{2}{n+1}=-\frac{n-3}{2n(n+1)}$ ce qui est ≤ 0 pour tout $n \geq 3$.

En conséquence nous obtenons pour $n \geq 3$ les deux inégalités simultanément :

$$1+\frac{2}{n+1} \leq 1+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right) \leq t_{n+1} \leq 1+\left(\frac{1}{n+1}+\frac{3}{2n}\right) \leq 1+\frac{3}{n+1}$$

Lorsque $n \geq 3$, si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire à partir du rang 3.

Etant initialisée aux rangs 1, 2 et 3 et héréditaire à partir du rang 3, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Pour tout entier strictement positif n : $1+\frac{2}{n} \leq t_n \leq 1+\frac{3}{n}$

7. Un algorithme pour avoir une petite idée de ce qu'il se passe dans cette question.

```
>>> def suitethé(m):
        t=4
        for n in range(1,m+1):
                t=sqrt(t)+1/n
                z=1+2/n+6/(n**2)-t
                print("n=",n,"t=",t,"z=",z)


>>> suitethé(10)
n= 1 t= 3.0 z= 6.0
n= 2 t= 2.232050807568877 z= 1.2679491924311228
n= 3 t= 1.8273382890041225 z= 0.5059950443292105
n= 4 t= 1.6017907711639854 z= 0.2732092288360146
n= 5 t= 1.4656187305677746 z= 0.17438126943222532
n= 6 t= 1.3772940786179138 z= 0.12270592138208625
n= 7 t= 1.3164388735507975 z= 0.09172439175532476
n= 8 t= 1.2723617012741872 z= 0.07138829872581276
n= 9 t= 1.2391012268808315 z= 0.05719506941546481 6
n= 10 t= 1.2131492383687066 z= 0.046850761631293425
```

L'inégalité $1+\frac{2}{n} \leq t_n$ déjà obtenue implique que $2 \leq n(t_n-1)$, c'est-à-dire que $2 \leq s_n$ pour tout $n \geq 1$.

Il reste à démontrer que $n(t_n-1)=s_n \leq 2+\frac{6}{n}$, inégalité équivalente à : $t_n \leq 1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}$.

Montrons par récurrence sur n que la propriété $\wp_n$: « $t_n \leq 1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}$ » est vérifiée pour tout entier strictement positif n.

Initialisation : En consultant les résultats affichés par l'algorithme précédent, $\wp_k$ est vérifiée pour tout entier n allant de 1 à 10.

Hérédité : Supposons que la propriété $\wp_n$: « $t_n \leq 1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}$ » soit vérifiée pour un certain entier strictement positif n.

Compte tenu de la relation de récurrence $t_{n+1}=\frac{1}{n+1}+\sqrt{t_n}$ et du fait que la fonction racine carrée conserve le sens des inégalités, nous obtenons l'encadrement : $t_{n+1} \leq \frac{1}{n+1}+\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}}$.

Compte tenu de la majoration admise sur la fonction racine carrée :

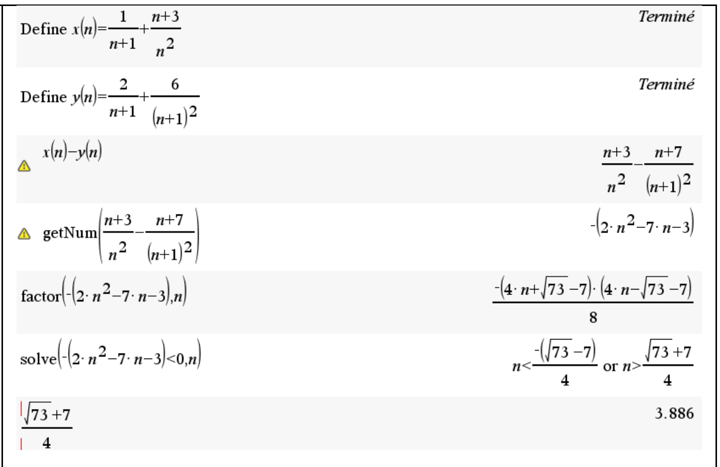
$\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}} \leq 1+\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}\right)=1+\frac{n+3}{n^2}$ de sorte que : $t_{n+1} \leq 1+\frac{1}{n+1}+\frac{n+3}{n^2}$

Comparons le nombre $\frac{1}{n+1}+\frac{n+3}{n^2}$ avec le nombre $\frac{2}{n+1}+\frac{6}{(n+1)^2}$ en étudiant le signe de la différence $\left(\frac{1}{n+1}+\frac{n+3}{n^2}\right)-\left(\frac{2}{n+1}+\frac{6}{(n+1)^2}\right)$

La copie d'écran ci-contre montre que cette différence est égale à $\frac{2n^2-7n-3}{n^2.(n+1)^2}$ et qu'elle est négative pour tout entier $n \geq 4$.

Lorsque $n \geq 4$, nous obtenons :

$$t_{n+1} \leq 1+\frac{2}{n+1}+\frac{6}{(n+1)^2}$$



Lorsque $n \geq 4$, si $\wp_n$ est vérifiée, alors $\wp_{n+1}$ l'est aussi, la propriété $\wp_n$ est héréditaire à partir du rang 4.

Etant initialisée aux rangs 1, 2, 3 et 4 et héréditaire à partir du rang 4, cette propriété $\wp_n$ est vérifiée pour tout entier $n \geq 1$. Pour tout entier strictement positif n : $t_n \leq 1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}$.

Il est équivalent de dire que $s_n \leq 2+\frac{6}{n}$ et finalement $2 \leq s_n \leq 2+\frac{6}{n}$ pour tout entier strictement positif *n.*

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{t_n-1-\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}(n(t_n-1)-2)=\lim\limits_{n\to\infty}(s_n-2)=2$ d'après le théorème des gendarmes appliqué à la suite (s_n) minorée par 2 et majorée par une suite convergeant vers 2.

9. Traitée en cours de route.

10. Soit α un réel positif et (u_n) sa suite associée. Considérons la propriété $\wp_n$: « $1+\frac{2}{n} \leq u_n \leq 1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}$».

Hérédité. Par rapport à ce que nous avons vu à la **question 8**, rien ne change, cette propriété est héréditaire à partir du rang 4.

Cette propriété peut-elle être initialisée ?

<table>
<tr><td>

Cas de l'inégalité $\boldsymbol{1+\frac{2}{n} \leq u_n}$

L'algorithme « **suitecg** » est ici appliqué pour $\alpha = 0$,il montre que cette inégalité est initialisée au rang 5. Elle est donc initialisée à ce rang pour tout $\alpha \geq 0$

</td><td>

```
>>> def suitecg(a,m):
        for n in range(1,m+1):
            a=sqrt(a)+1/n
            print(n,a)


>>> suitecg(0,5)
1 1.0
2 1.5
3 1.5580782047249222
4 1.4982300287707078
5 1.4240220703772901
```

</td></tr>
<tr><td>

Cas de l'inégalité : $\boldsymbol{u_n \leq 1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}}$

L'algorithme ci-contre montre que cette inégalité est initialisée au rang 4 lorsque $\alpha \leq 400$ mais non pas lorsque $\alpha = 500$.

</td><td>

```
>>> suitecg(400,4)
1 21.0
2 5.08257569495584
3 2.587790184762484
4 1.8586609912478402
>>> suitecg(500,4)
1 23.360679774997898
2 5.333288712150134
3 2.6427247493020802
4 1.8756459483239516
```

</td></tr>
<tr><td>

Elle est initialisée au rang 5 lorsque $\alpha \leq 4000$ mais non pas lorsque $\alpha = 5000$.

</td><td>

```
>>> 1+2/5+6/25
1.64
>>> suitecg(5000,5)
1 71.71067811865476
2 8.96821575768206
3 3.3280312743086933
4 2.074289251820745
5 1.6402393036647573
>>> suitecg(4000,5)
1 64.24555320336759
2 8.515332382588236
3 3.2514375779737192
4 2.053174306043018
5 1.6328901932957103
```

</td></tr>
</table>

Etant donné un entier $n \geq 2$, on peut se demander quelle valeur initiale $a(n)$ conviendrait pour que l'on ait exactement : $u_n = 1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}$

- De la relation $u_n = \sqrt{u_{n-1}}+\frac{1}{n}$, on déduit que : $u_{n-1} = \left(u_n - \frac{1}{n}\right)^2$
- De la relation $u_{n-1} = \sqrt{u_{n-2}}+\frac{1}{n-1}$, on déduit que : $u_{n-2} = \left(u_{n-1} - \frac{1}{n-1}\right)^2$
- …
- De la relation $u_2 = \sqrt{u_1}+\frac{1}{2}$, on déduit que : $u_1 = \left(u_2 - \frac{1}{2}\right)^2$
- De la relation $u_1 = \sqrt{u_0}+1$, on déduit que : $a(n) = u_0 = (u_1 - 1)^2$

L'algorithme Python « **initial** » nous permet de proposer les premiers seuils.

Nous retrouvons le fait que le seuil d'initialisation est 5 lorsque la valeur initiale est 4000 mais 6 lorsque la valeur initiale est 5000

```
>>> from math import *
>>> def initial(m):
        for n in range(2,m+1):
                u=1+2/n+6/(n**2)
                for k in range(1,n+1):
                        u=(u-1/(n+1-k))**2
                print("initialisation au rang",n,"si alpha < ou = à",u)

>>> initial(12)
initialisation au rang 2 si alpha < ou = à 64.0
initialisation au rang 3 si alpha < ou = à 126.56249999999989
initialisation au rang 4 si alpha < ou = à 495.8222787014591
initialisation au rang 5 si alpha < ou = à 4964.042618666292
initialisation au rang 6 si alpha < ou = à 209456.92872741207
initialisation au rang 7 si alpha < ou = à 90690635.25852086
initialisation au rang 8 si alpha < ou = à 1870663656422.476
initialisation au rang 9 si alpha < ou = à 2.5792493338601136e+19
initialisation au rang 10 si alpha < ou = à 2.3006509816204384e+31
initialisation au rang 11 si alpha < ou = à 3.84821897462082e+51
initialisation au rang 12 si alpha < ou = à 1.4439001644272566e+86
```

Ici, une mouture TI-Nspire est concordante avec les résultats obtenus.

Si cet algorithme est correct, nous pouvons dire que pour :

$$\alpha \leq 1{,}44 \times 10^{86}$$

l'inégalité qui initialise le processus est vérifiée au plus tard au rang 12 et la propriété $\wp_n$ est dès lors vérifiée.

seuil(12)

seuil pour 2. égal à 64.
seuil pour 3. égal à 126.5625
seuil pour 4. égal à 495.822278702
seuil pour 5. égal à 4964.04261867
seuil pour 6. égal à 209456.928727
seuil pour 7. égal à 90690635.2585
seuil pour 8. égal à 1.87066365643E12
seuil pour 9. égal à 2.5792493339E19
seuil pour 10. égal à 2.30065098167E31
seuil pour 11. égal à 3.84821897487E51
seuil pour 12. égal à 1.443900165E86

Terminé

"initial" enregistr. effectué
Define **initial**(n)=
Prgm
Local v
Define $u=1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2}$
For k,1,n
Define $v=\left(u-\frac{1}{n+1-k}\right)^2$
$v \to u$
EndFor
Return u
EndPrgm

"seuil" enregistr. effectué
Define **seuil**(m)=
Prgm
For n,2,m
initial(n)
Disp "seuil pour",n,"égal à",u
EndFor
EndPrgm

Comme dans la **question 8,** il en résulte que, lorsque $\alpha \leq 1{,}44 \times 10^{86}$, il est assuré que : $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{u_n-1-\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=2$

Pour autant, la question n'est pas résolue. Il faudrait justifier rigoureusement que la suite des seuils diverge vers plus l'infini. Voilà qui restera ouvert …

Une « feuille de route » possible (?) pour résoudre cette question

Désignons par *u* la suite associée au seuil $a(n)$ et par *v* la suite associée au seuil $a(n-1)$.

Par définition de ces suites les termes de rangs n de l'une et $n-1$ de l'autre sont définis par : $\begin{cases} u_n = 1+\frac{2}{n}+\frac{6}{n^2} \\ v_{n-1} = 1+\frac{2}{n-1}+\frac{6}{(n-1)^2} \end{cases}$. Leurs termes de rang $n-1$ sont : $\begin{cases} u_{n-1} = \left(u_n - \frac{1}{n}\right)^2 = \left(1+\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}\right)^2 \\ v_{n-1} = 1+\frac{2}{n-1}+\frac{6}{(n-1)^2} \end{cases}$

Pour tout entier *k* tel que $0 \leq k \leq n-1$,considérer le quotient : $q_k = \frac{u_k}{v_k}$

Au rang $q_{n-1} = \frac{u_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}+\frac{6}{n^2}\right)^2}{1+\frac{2}{n-1}+\frac{6}{(n-1)^2}}$ compte tenu des propriétés des termes de ce rang. Et au rang zéro le quotient $q_0 = \frac{u_0}{v_0}$ représente le quotient des deux seuils $\frac{a(n)}{a(n-1)}$

On peut rappeler pour éventuel usage que si *x, y et z* sont trois réels tels que $x > y > z > 0$, alors :
$\frac{x-z}{y-z} > \frac{x}{y}$ car $\frac{x-z}{y-z} - \frac{x}{y} = \frac{z(x-y)}{y(y-z)}$

1. Justifier que $q_{n-1} \geq 1+\frac{1}{n^2}$ (pour $n \geq 3$ semble-t-il).

2. Vérifier que $q_{n-2} = \frac{u_{n-2}}{v_{n-2}} = \left(\frac{u_{n-1}-\frac{1}{n-1}}{V_{n-1}-\frac{1}{n-1}}\right)^2 \geq {q_{n-1}}^2$

3. Montrer que, plus généralement, pour $1 \leq j \leq n$, $q_{n-j} \geq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2^{j-1}}$ et qu'en particulier le quotient des seuils en jeu vérifie : $\frac{a(n)}{a(n-1)} = \frac{u_0}{v_0} \geq \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{2^{n-1}}$

4. Conclure à propos de la divergence vers plus l'infini de la suite des seuils $(a(n))_{n\geq 2}$

Exercice 2 : Les bonbons cachés

N'étant pas du tout parvenu à entrer dans la logique de la démarche de la partie 3 de l'énoncé, je ne suis pas en mesure d'en proposer une solution un tant soit peu consistante.

En ce qui concerne les parties 1 et 2, de nombreuses sources traitent du « paradoxe de Monty-Hall ». Voir aussi sur la page « Concours Général » un document dédié à propos de cet exercice.

Exercice 3 : Intersections et réunions

Partie 1 : Quelques cas particuliers

1.a. Par définition, $\mathrm{ent}(x)$ est l'unique entier tel que : $\mathrm{ent}(x) \leq x < \mathrm{ent}(x)+1$ **(1)**

En retranchant 1 à chaque membre de cette double inégalité : $\mathrm{ent}(x) - 1 \leq x - 1 < \mathrm{ent}(x)$ **(1')**.

Des deux doubles inégalités, on déduit : $x - 1 < \mathrm{ent}(x) \leq x$.

1.b. Sous les hypothèses de cette question : $\begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq y < 1 \\ x = n + y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} n \in \mathbb{Z} \\ n \leq x < n+1 \\ y = x - n \end{cases}$

Par définition des parties entière et fractionnaire et compte tenu de l'unicité de la partie entière :

$$\begin{cases} n = \mathrm{ent}(x) \\ y = \mathrm{frac}(x) \end{cases}$$

2.a. $\mathcal{E}(1) = \left\{\mathrm{ent}(\frac{1}{1})=1\,;\, \mathrm{ent}(\frac{2}{1})=2\,;\, \mathrm{ent}(\frac{3}{1})=3\,;\, \ldots\right\}$ est par construction inclus dans $\mathbb{N}^*$. Réciproquement, tout entier strictement positif *k* appartient à $\mathcal{E}(1)$ puisque $k = \mathrm{ent}(\frac{k}{1})$, ce qui justifie que $\mathbb{N}^* \subset \mathcal{E}(1)$.

$$\mathcal{E}(1) = \mathbb{N}^*$$

2.b. Supposons que $x > 1$ et soit *n* un entier strictement positif. $\mathcal{E}(x)$ est par construction inclus dans $\mathbb{N}$. Réciproquement, pour tout entier naturel *n*, l'intervalle $[nx\,;\,(n+1)x[$ a pour longueur *x*, c'est-à-dire une longueur strictement plus grande que 1. Cet intervalle contient donc au moins un entier :

L'ensemble des entiers *K* tels que $nx \leq K < (n+1)x$ est non vide. Soit alors *K* un tel entier. Il vérifie la double inégalité : $n \leq \frac{K}{x} < n+1$ et de ce fait : $\mathrm{ent}(\frac{K}{x})=n$

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathcal{E}(x)$ car il existe toujours au moins un entier *K* tel que : $\mathrm{ent}(\frac{K}{x})=n$, ce qui justifie l'inclusion $\mathbb{N} \subset \mathcal{E}(x)$ comme dans la question précédente. On peut déduire de **2.a** et **2.b** que **:**

Si $x > 1$, alors $\mathcal{E}(x) = \mathbb{N}$

3.a. Si le plus grand des deux réels α ou β est exactement égal à 1, l'ensemble qui lui est associé est égal à $\mathbb{N}^*$, l'un des deux ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$ ou $\mathcal{E}(\beta)$ est déjà égal à $\mathbb{N}^*$et contient l'autre ensemble.

$\mathcal{E}(\alpha) \cup \mathcal{E}(\beta) = \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E}(\alpha) \cap \mathcal{E}(\beta) \neq \emptyset$. La propriété $P_\cup$ est vérifiée, $P_\cap$ ne l'est pas.

3.b. Si $\max(\alpha, \beta)>1$, l'ensemble qui lui est associé est égal à $\mathbb{N}$ et contient l'autre ensemble.

$\mathcal{E}(\alpha) \cup \mathcal{E}(\beta) = \mathbb{N} \neq \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{E}(\alpha) \cap \mathcal{E}(\beta) \neq \emptyset$. Les propriétés $P_\cup$ et $P_\cap$ ne sont pas vérifiées.

4.a. Soit *x* un réel quelconque, *n* un entier strictement positif et *k* un entier naturel.
Par définition de la partie fractionnaire d'un nombre, si on considère le réel *kx* : $0 \leq \text{frac}(kx) < 1$.

Donc, quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad 0 \leq n \times \text{frac}(kx) < n$

$$\begin{cases} 0 \leq n \times \text{frac}(kx) \Rightarrow \ \text{ent}\big(n \times \text{frac}(kx)\big) \geq 0 \\ n \times \text{frac}(kx) < n \Rightarrow \ \text{ent}\big(n \times \text{frac}(kx)\big) \leq n-1 \end{cases}$$

Les deux inégalités impliquent : $\text{ent}\big(n \times \text{frac}(kx)\big) \in \{\, 0\,;1\,;\ldots;n-1\}$.

4.b. Considérons la liste $\{\text{ent}\big(n \times \text{frac}(jx)\big)\,; j = 0,\ 1, \ldots, n\}$ obtenue avec les parties entières des $(n+1)$ premiers multiples entiers de *x*.

Elle est composée de $(n+1)$ termes, tous appartenant, d'après la question précédente, au même ensemble de *n* nombres, l'ensemble $\{\, 0\,;1\,;\ldots;n-1\}$.

Vu que la liste a une unité de plus que le cardinal de l'ensemble dans lequel elle prend ses valeurs, il y a au moins deux termes de la liste $\{\text{ent}\big(n \times \text{frac}(jx)\big)\,; j = 0,\ 1, \ldots, n\}$ qui sont égaux.

Il existe deux entiers distincts $0 \leq k < \ell \leq n$ tels que $\text{ent}\big(n \times \text{frac}(\ell x)\big) = \text{ent}\big(n \times \text{frac}(kx)\big)$.

4.c. Désignons par *E* le nombre : $E = \text{ent}\big(n \times \text{frac}(\ell x)\big) = \text{ent}\big(n \times \text{frac}(kx)\big)$. Compte tenu de la définition de la partie entière :

$$\begin{cases} E \leq n \times \text{frac}(\ell x) < E+1 \\ E \leq n \times \text{frac}(kx) < E+1 \end{cases} \Longrightarrow -1 < n \times \text{frac}(\ell x) - n \times \text{frac}(kx) < 1$$

Nous obtenons la double inégalité : $-\frac{1}{n} < \text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx) < \frac{1}{n}$.

Suivant le signe de $\text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx) < \frac{1}{n}$, ce nombre a pour partie entière 0 ou -1, ce qui influe sur l'expression de sa partie fractionnaire :

- Si $0 \leq \text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx) < \frac{1}{n}$, alors $\text{frac}(mx) = \text{frac}(\ell x - kx) = \text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx)$ et dans ce cas : $\text{frac}(mx) \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right[$.
- Si $-\frac{1}{n} < \text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx) < 0$, alors $\text{frac}(mx) = \text{frac}(\ell x - kx) = 1 + \text{frac}(\ell x) - \text{frac}(kx)$ et dans ce cas : $\text{frac}(mx) \in \left]1 - \frac{1}{n}\,;1\right[$.

4.d. L'hypothèse faite dans cette question, $\mathrm{frac}(mx) \in \left]1-\frac{1}{n}\,;1\right[$, équivaut à $0 < 1-\mathrm{frac}(mx) < \frac{1}{n}$.

Il en résulte que $\frac{1}{1-\mathrm{frac}(mx)} > n$ et donc que $u = \mathrm{ent}\left(\frac{1}{1-\mathrm{frac}(mx)}\right) \geq n$

Du fait que $u = \mathrm{ent}\left(\frac{1}{1-\mathrm{frac}(mx)}\right)$, nous avons : $u \leq \frac{1}{1-\mathrm{frac}(mx)} < u+1$, ce qui équivaut à l'inégalité :

$$1-\frac{1}{u+1} > \mathrm{frac}(mx) \geq 1-\frac{1}{u} = \frac{u-1}{u}$$

En multipliant par l'entier strictement positif *u* nous obtenons : $u-\frac{u}{u+1} > u \times \mathrm{frac}(mx) \geq u-1$

Remarquons au passage que $u-\frac{u}{u+1} = u-1+\frac{1}{u+1}$

Décomposons : $mx = \mathrm{ent}(mx)+\mathrm{frac}(mx)$ en somme de ses parties entière et fractionnaire.

En multipliant par *u* : $umx = u \times \mathrm{ent}(mx) + u \times \mathrm{frac}(mx)$. Nous obtenons l'encadrement :

$$u \times \mathrm{ent}(mx) + u - 1 + \frac{1}{u+1} > umx \geq u \times \mathrm{ent}(mx) + u - 1$$

Cette double inégalité montre que :

- $\mathrm{ent}(umx) = u \times \mathrm{ent}(mx) + u - 1.$
- $0 \leq \mathrm{frac}(umx) < \frac{1}{u+1}$, donc *a fortiori* $0 \leq \mathrm{frac}(umx) < \frac{1}{n}$, puisque $u \geq n$

4.e. En synthèse des questions **4.c** et **4.d** ou bien $\mathrm{frac}(mx) \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right[$, ou bien $\mathrm{frac}(umx) \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right[$. Quel que soit le cas de figure, on a obtenu un entier *v* tel que $\mathrm{frac}(vx) \in \left[0\,;\frac{1}{n}\right[$. Il s'agit soit de *m* lui-même soit de l'entier *um* construit au **4.d.**

5. Dans cette question $\alpha = \frac{p}{q}$ est un rationnel et β un réel tous deux strictement compris entre 0 et 1.

Leurs inverses sont rus deux strictement supérieurs à 1.

5.a. Soit $\varepsilon > 0$. Avec les notations de cette question, choisissons un entier n tel que $n > \frac{q}{\varepsilon}$ (ce qui permettra d'avoir l'inégalité $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{q}$)

Appliquons la conclusion de la **question 4.e** avec le nombre $x = \frac{1}{\beta}$.

Il existe un entier strictement positif v tel que $\text{frac}(\frac{v}{\beta}) \in \left[0\,;\,\frac{1}{n}\right[$.

Si on note k la partie entière de ce nombre : $k \leq \frac{v}{\beta} < k + \frac{1}{n} < k + \frac{\varepsilon}{q}$

En multipliant par q : $kq \leq \frac{vq}{\beta} < kq + \varepsilon$. Nous obtenons l'inégalité voulue en posant $\ell = vq$.

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \exists\,(k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \qquad kq \leq \frac{\ell}{\beta} < kq + \varepsilon$$

En particulier, en prenant $\varepsilon < 1$, on en déduit qu'il existe des multiples de q qui appartiennent à $\mathcal{E}(\beta)$.

5.b. Considérons l'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ lorsque $\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et $p < q$

$\mathcal{E}\left(\frac{p}{q}\right) = \left\{\text{ent}\left(\frac{kq}{p}\right), k \in \mathbb{N}^*\right\}$. Lorsque k est un multiple de p, $\frac{kq}{p}$ est un entier multiple de q. L'ensemble $\mathcal{E}\left(\frac{p}{q}\right)$ contient l'ensemble des multiples de q.

La **question 4.b** a montré que certains d'entre eux appartenaient à $\mathcal{E}(\beta)$.

La propriété $P_\cap$ n'est pas satisfaite.

D'autre part, puisque $\mathcal{E}\left(\frac{p}{q}\right)$ contient l'ensemble des multiples de p, en revanche il ne contient aucun entier de la forme $k = mq - 1$. En effet, l'écart entre $\frac{(mp)\times q}{p}$ et $\frac{(mp-1)\times q}{p}$ est égal à $\frac{q}{p}$. Cet écart est strictement supérieur à 1, donc quel que soit l'entier m, $\text{ent}\left(\frac{(mp-1)\times q}{p}\right) < mq - 1$.

A propos de β, appliquons le résultat **5.a** avec un nombre tel que $0 < \varepsilon < \frac{1}{\beta} - 1$

$\exists (k,\ell) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*,\ kq \leq \frac{\ell}{\beta} < kq + \left(\frac{1}{\beta} - 1\right)$. Alors : $kq - \frac{1}{\beta} \leq \frac{\ell-1}{\beta} < kq - 1$, et donc $\begin{cases} \text{ent}\left(\frac{\ell}{\beta}\right) = kq \\ \text{ent}\left(\frac{\ell-1}{\beta}\right) < kq - 1 \end{cases}$

On en déduit qu'il existe des entiers de la forme $kq - 1$ qui n'appartiennent pas à $\mathcal{E}(\beta)$.

Ces éléments ne sont ni dans $\mathcal{E}\left(\frac{p}{q}\right)$ ni dans $\mathcal{E}(\beta)$.

$\mathcal{E}\left(\frac{p}{q}\right) \cup \mathcal{E}(\beta) \neq \mathbb{N}^*$: la propriété $P_\cup$ n'est pas non plus vérifiée.

Partie 2 : Partition

6.a. Par définition de la partie entière : $\mathrm{ent}(n\alpha) < n\alpha < \mathrm{ent}(n\alpha) + 1$ avec des inégalités strictes car $n\alpha$ est un irrationnel qui ne peut pas être égal à sa partie entière. En conséquence : $\frac{\mathrm{ent}(n\alpha)}{\alpha} < n < \frac{\mathrm{ent}(n\alpha)+1}{\alpha}$.

- D'une part $\mathrm{ent}\left(\frac{\mathrm{ent}(n\alpha)}{\alpha}\right) \leq n - 1$ en raison de l'inégalité stricte. L'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ compte au moins $\mathrm{ent}(n\alpha)$ éléments compris entre 1 et $n - 1$.
- D'autre part $\mathrm{ent}\left(\frac{\mathrm{ent}(n\alpha)+1}{\alpha}\right) \geq n$. L'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ n'en compte pas d'autre.

L'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ compte exactement $\mathrm{ent}(n\alpha)$ éléments compris entre 1 et $n - 1$.

Remarquons pour la suite de la question une propriété de la partie entière d'une somme de deux nombres ; elle est égale à la somme des parties entières éventuellement augmentée ou diminuée d'une unité :

$$\mathrm{ent}(n(\alpha+\beta)) = \mathrm{ent}(n\alpha + n\beta) = \begin{cases} \mathrm{ent}(n\alpha) + \mathrm{ent}(n\beta) \\ \text{ou bien} \\ \mathrm{ent}(n\alpha) + \mathrm{ent}(n\beta) + 1 \\ \text{ou bien} \\ \mathrm{ent}(n\alpha) + \mathrm{ent}(n\beta) - 1 \end{cases}$$

6.b. Supposons que $\alpha + \beta > 1$. On peut choisir l'entier *n* de façon que $n \times (\alpha + \beta) > n + 1$.

La somme des cardinaux de $\mathcal{E}(\alpha)$ et de $\mathcal{E}(\beta)$ est égale à $\mathrm{ent}(n\alpha) + \mathrm{ent}(n\beta) \geq \mathrm{ent}(n(\alpha+\beta)) - 1 \geq n$.

Ces ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$ et $\mathcal{E}(\beta)$ étant tous deux inclus dans $\{1 ; 2 ; \dots ; n - 1\}$ qui contient exactement $(n - 1)$ éléments, ils ont en commun au moins un élément, ils ne sont pas disjoints.

La propriété $P_\cap$ n'est pas satisfaite.

6.c. Supposons que $\alpha + \beta < 1$. On peut choisir l'entier *n* de façon que $n \times (\alpha + \beta) < n - 2$.

$\mathrm{ent}(n\alpha + n\beta) = \mathrm{ent}(n\alpha) + \mathrm{ent}(n\beta) \leq \mathrm{ent}(n(\alpha+\beta)) < n - 2 + 1 = n - 1$. La somme des cardinaux de $\mathcal{E}(\alpha)$ et de $\mathcal{E}(\beta)$ est strictement inférieure au cardinal de $\{1 ; 2 ; \dots ; n - 1\}$. La réunion de ces ensembles ne peut pas être égale à $\{1 ; 2 ; \dots ; n - 1\}$.

La propriété $P_\cup$ n'est pas satisfaite.

7.a. Supposons que α et β soient deux irrationnels de somme 1.

Auquel cas, puisque leur somme est égale à 1, pour tout entier $n > 0$: $\mathrm{ent}(n(\alpha+\beta)) = n$

Des inégalités toutes deux nécessairement strictes $\mathrm{ent}(n\alpha) < n\alpha$ et $\mathrm{ent}(n\beta) < n\beta$, on déduit que $\mathrm{ent}(n\alpha) + \mathrm{ent}(n\beta) < n(\alpha+\beta) = n$

Des trois possibilités envisagées en « remarque », il n'en reste qu'une : $\mathrm{ent}(n\alpha) + \mathrm{ent}(n\beta) + 1 = n$.

Nous obtenons : $\mathrm{ent}(n\alpha) + \mathrm{ent}(n\beta) = n - 1$.

7.b. Soit *n* un entier strictement positif.

Nous disposons des relations : $\begin{cases} \mathrm{ent}(n\alpha) + \mathrm{ent}(n\beta) = n - 1 \\ \mathrm{ent}((n+1)\alpha) + \mathrm{ent}((n+1)\beta) = n \end{cases}$ d'après la question précédente.

En passant à l'entier $n+1$, une et une seule des deux parties entières en jeu a augmenté d'une unité.

1er cas : $\mathrm{ent}((n+1)\alpha) = \mathrm{ent}(n\alpha) + 1$; $\mathrm{ent}((n+1)\beta) = \mathrm{ent}(n\beta)$.

L'ensemble $\mathcal{E}(\alpha)$ compte $\mathrm{ent}(n\alpha)$ éléments compris entre 1 et $n-1$, et un de plus compris entre 1 et *n* : c'est donc que $n \in \mathcal{E}(\alpha)$. En revanche $\mathcal{E}(\beta)$ compte autant d'éléments compris entre 1 et $n-1$ que d'éléments compris entre 1 et *n* : c'est donc que $n \notin \mathcal{E}(\beta)$.

2ème cas : $\mathrm{ent}((n+1)\alpha) = \mathrm{ent}(n\alpha)$; $\mathrm{ent}((n+1)\beta) = \mathrm{ent}(n\beta) + 1$. Il s'agit du cas « symétrique » du précédent. $n \notin \mathcal{E}(\alpha)$ et $n \in \mathcal{E}(\beta)$.

8. La **question 7** nous montre que, si α et β sont deux irrationnels de somme 1, alors tout entier *n* strictement positif appartient à un et un seul des deux ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$ ou $\mathcal{E}(\beta)$.

Cette question nous montre que :

Si α et β sont deux irrationnels de somme 1, alors $P_\cap$ et $P_\cup$ sont simultanément vérifiées.

Réciproquement, si $P_\cap$ et $P_\cup$ sont simultanément vérifiées, alors en vertu de la **question 6** la somme $\alpha + \beta$ ne peut être ni < 1, ni > 1. Elle est donc exactement égale à 1.

D'autre part, la **question 5** a montré que, si au moins l'un des deux nombres α ou β était rationnel, alors $P_\cap$ n'était pas vérifiée. Nécessairement, ce sont deux irrationnels.

Si $P_\cap$ et $P_\cup$ sont simultanément vérifiées, alors α et β sont deux irrationnels de somme 1.

Partie 3 : Intersection vide

L'ensemble Ω est l'ensemble des points *M* dont les coordonnées sont de la forme $(k\alpha + m\,;k\beta + n)$ avec *k, m, n* entiers relatifs.

9. Soit α et β deux irrationnels tels qu'il existe des entiers *u* et *v* strictement positifs vérifiant $\alpha u + \beta v = 1$.

Supposons que $P_\cap$ ne soit pas vérifiée. Alors il existe deux entiers *k* et ℓ strictement positifs tels que : $\text{ent}\left(\frac{k}{\alpha}\right) = \text{ent}\left(\frac{\ell}{\beta}\right)$. Dans ce cas, $\text{ent}\left(\frac{ku}{u\alpha}\right) = \text{ent}\left(\frac{\ell v}{v\beta}\right)$, ce qui prouverait que $\mathcal{E}(u\alpha) \cap \mathcal{E}(v\beta) \neq \emptyset$

Or, les deux nombres $\alpha u\,;\,\beta v$ sont irrationnels et de somme 1. Le théorème *A* serait mis en défaut à leur propos. L'hypothèse est à rejeter.

Si α et β sont deux irrationnels tels qu'il existe des entiers strictement positifs *u* et *v* vérifiant $\alpha u + \beta v = 1$, alors $P_\cap$ est vérifiée.

10. La **question 5** a montré que, si au moins l'un des deux nombres α ou β était rationnel, alors $P_\cap$ n'était pas vérifiée. Nécessairement, ce sont deux irrationnels.
La **question 2** a montré que, si $\alpha \geq 1$ ou $\beta \geq 1$, alors $\mathcal{E}(\alpha) = \mathbb{N}^*$ ou, respectivement, $\mathcal{E}(\beta) = \mathbb{N}^*$ et dans ce cas $P_\cap$ ne peut pas être vérifiée. Nécessairement, $\max(\alpha, \beta) < 1$.

11. Les résultats de cette question sont liés aux propriétés algébriques de l'ensemble $\mathbb{Z}$ qui est un « anneau », un groupe pour l'addition et un ensemble stable par multiplication.

11.a. Soit $A(k_A\alpha + m_A\,;k_A\beta + n_A)$ et $B(k_B\alpha + m_B\,;k_B\beta + n_B)$ deux points de Ω (tous les coefficients indexés sont des entiers relatifs).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\big((k_B - k_A)\alpha + (m_B - m_A)\,;(k_B - k_A)\beta + (n_B - n_A)\big)$

L'image de $M(k\alpha + m\,;k\beta + n)$ par la translation $T_{\overrightarrow{AB}}$ est le point $M'\big((k + k_B - k_A)\alpha + (m + m_B - m_A)\,;(k + k_B - k_A)\beta + (n + n_B - n_A)\big)$. Réciproquement, *M* est l'image par cette translation du point $M''\big((k - k_B + k_A)\alpha + (m - m_B + m_A)\,;(k - k_B + k_A)\beta + (n - n_B + n_A)\big)$.

Or, en raison de la stabilité de l'ensemble $\mathbb{Z}$ pour l'addition, les nombres *k, m, n* sont des entiers relatifs si et seulement si $(k + k_B - k_A), (m + m_B - m_A), (n + n_B - n_A)$ et $(k - k_B + k_A), (m - m_B + m_A), (n - n_B + n_A)$ sont des entiers relatifs :

L'image de Ω par $T_{\overrightarrow{AB}}$ est incluse dans Ω et l'image réciproque de Ω par $T_{\overrightarrow{AB}}$ (image par $T_{\overrightarrow{BA}}$) est incluse dans Ω : L'ensemble Ω est globalement invariant par $T_{\overrightarrow{AB}}$.

11.b. L'image de $M(k\alpha + m\,; k\beta + n)$ par la symétrie centrale de centre *O* est $M_3(-k\alpha - m\,; -k\beta - n)$. En raison de la stabilité de l'ensemble $\mathbb{Z}$ pour la symétrisation (pour l'opération +), les nombres *k, m, n* sont des entiers relatifs si et seulement si leurs opposés sont des entiers relatifs. Un point appartient à Ω si et seulement si son symétrique par rapport à *O* appartient à Ω.

L'ensemble Ω est globalement invariant par la symétrie centrale de centre *O*.

L'image de $M(k\alpha + m\,; k\beta + n)$ par l'homothétie de centre *O* de rapport ℓ (entier relatif) est $M_4(k\ell\alpha + m\ell\,; k\ell\beta + n\ell)$. En raison de la stabilité de l'ensemble $\mathbb{Z}$ pour la multiplication, si les nombres *k, m, n* sont des entiers relatifs alors les nombres $k\ell, m\ell, n\ell$ sont des entiers relatifs. Si un point appartient à Ω alors son homothétique appartient à Ω.

L'image de Ω par une homothétie de centre *O* et de rapport un entier relatif est incluse dans Ω.

12. Considérons deux points de Ω : $M_1(k_1\alpha + m_1\,; k_1\beta + n_1)$ et $M_2(k_2\alpha + m_2\,; k_2\beta + n_2)$.

$M_1 = M_2 \iff \begin{cases} k_1\alpha + m_1 = k_2\alpha + m_2 \\ k_1\beta + n_1 = k_2\beta + n_2 \end{cases}$ soit : $\begin{cases} (k_1 - k_2)\alpha = m_2 - m_1 \\ (k_1 - k_2)\beta = n_2 - n_1 \end{cases}$

Or, par hypothèse α et β sont deux nombres irrationnels, tandis que $k_1 - k_2$, $m_2 - m_1$ et $n_2 - n_1$ sont des entiers relatifs. Ces relations ne peuvent être vérifiées que si : $k_1 - k_2 = m_2 - m_1 = n_2 - n_1 = 0$.

Un point de Ω n'admet qu'un seul triplet (k, m, n) permettant de définir ses coordonnées.

L'unicité de ce triplet légitime la définition de l'application *f*.

13.a. D'après l'énoncé : $k \in \mathcal{E}(\alpha) \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, k \leq \frac{n}{\alpha} < k + 1$ soit :

$k \in \mathcal{E}(\alpha) \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, k\alpha < n < (k+1)\alpha$. Avec des inégalités strictes, le cas d'égalité $k\alpha = n$ est impossible vu que α est un nombre irrationnel.

Cette double inégalité est équivalente à : $\exists n \in \mathbb{N}^*, n < (k+1)\alpha < n + \alpha$

Or $\alpha < 1$ et donc $n + \alpha < n + 1$.

En conséquence $\text{ent}\big((k+1)\alpha\big) = n$; le nombre $(k+1)\alpha - n$ représente la partie fractionnaire de $(k+1)\alpha$ et l'inégalité de droite signifie que $(k+1)\alpha - n < \alpha$.

$$k \in \mathcal{E}(\alpha) \iff \text{frac}\big((k+1)\alpha\big) < \alpha$$

13.b. On ne perd pas de vue que d'après la **question 10** : $\max(\alpha,\beta) < 1$

Supposons que le rectangle $]0\,;\ \alpha[\times]0\,;\ \beta[$ contienne un point $X\,(k\alpha+m\,;k\beta+n)$ de Ω tel que $f(X)\geq 1$, c'est-à-dire tel que $k\geq 1$. Cela signifie que : $\begin{cases}0<k\alpha+m<\alpha\\0<k\beta+n<\beta\end{cases}$ avec $k\geq 1$

Des inégalités $\begin{cases}0<k\alpha+m<\alpha\\0<k\beta+n<\beta\end{cases}$ on déduit que $\begin{cases}0<\text{frac}(k\alpha+m)<\alpha\\0<\text{frac}(k\beta+n)<\beta\end{cases}$.

Mais puisque *m* et *n* sont des entiers, $\begin{cases}\text{frac}(k\alpha+m)=\text{frac}(k\alpha)\\\text{frac}(k\beta+n)=\text{frac}(k\beta)\end{cases}$

En conséquence : $\begin{cases}\text{frac}(k\alpha)<\alpha\\\text{frac}(k\beta)<\beta\end{cases}$ donc d'après **13.a,** $\begin{cases}k-1\in\mathcal{E}(\alpha)\\k-1\in\mathcal{E}(\beta)\end{cases}$.

L'intersection $\mathcal{E}(\alpha)\cap\mathcal{E}(\beta)$ ne serait donc pas vide, ce qui serait contraire à l'hypothèse.

Le rectangle $]0\,;\ \alpha[\times]0\,;\ \beta[$ ne contient aucun point *X* de Ω tel que $f(X)\geq 1$.

Rappelons le théorème d'approximation de Dirichlet d'un nombre irrationnel :

Pour tout irrationnel *x*, il existe une infinité de rationnels $\frac{p}{q}$ où *p* et *q* sont des entiers tels que $\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$.

13.c. Soit $\varepsilon>0$. Appliquons le théorème de Dirichlet à α et β en choisissant un même dénominateur *q* entier strictement positif vérifiant $q>\frac{1}{\varepsilon}$:

Il existe deux entiers *p* et *p'* tels que : $\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$ et $\left|\beta-\frac{p'}{q}\right|<\frac{1}{q^2}$

Dans ce cas : $|q\alpha-p|<\frac{1}{q}<\varepsilon$ et $|q\beta-p'|<\frac{1}{q}<\varepsilon$.

En posant $k=q\,;m=-p\,;n=-p'$, nous obtenons un point $Y\,(k\alpha+m\,;k\beta+n)$ de Ω avec $f(Y)\geq 1$ qui appartient au carré $]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[\times]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[$.

Contenant ce point, ce carré contient aussi son symétrique par rapport à *O*, de coordonnées opposées : le carré contient aussi des points de Ω avec $f(Y)\leq -1$.

Pour tout $\varepsilon>0$, le carré $]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[\times]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[$ contient des points *Y* de Ω avec $f(Y)\geq 1$

et des points *Y* de Ω avec $f(Y)\leq -1$.

Notons que ces points n'ont pas de coordonnées rationnelles puisque $f(Y)\neq 0$

De ce fait, le carré contient des points *Y* de Ω avec $f(Y)\geq n$ où *n* est un entier strictement positif donné. En effet, le carré $\left]-\frac{\varepsilon}{n}\,;\ \frac{\varepsilon}{n}\right[\times\left]-\frac{\varepsilon}{n}\,;\ \frac{\varepsilon}{n}\right[$ contient des points *Y* de Ω avec $f(Y)\geq 1$, et on considère leurs homothétiques par l'homothétie de centre *O* et de rapport *n* qui sont dans Ω et dans le carré $]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[\times]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[$. De même que leurs symétriques par rapport à *O*.

13.d. Supposons que le rectangle $]0\,;\ \alpha[\times]0\,;\ \beta[$ contienne un point *M* de Ω (donc nécessairement un point tel que $k = f(X) \leq 0$)

<table>
<tr>
<td>
Choisissons ε de sorte que le côté du carré $]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[\times]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[$ soit plus petit que la distance de M aux bords du rectangle $]0\,;\ \alpha[\times]0\,;\ \beta[$

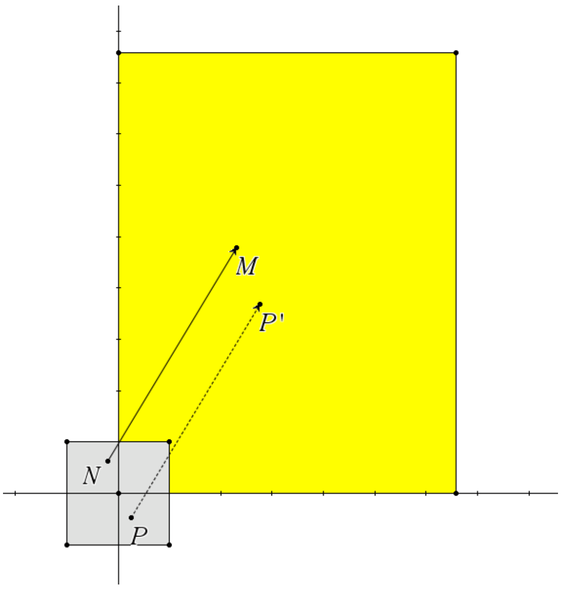
Soit N un point de Ω situé dans ce même carré $]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[\times]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[$ de coordonnées :

$(k_1\alpha + m_1\,; k_1\beta + n_1)$ avec $k_1 \geq 1$

Soit $P(k_2\alpha + m_2\,; k_2\beta + n_2)$ un deuxième point de Ω situé dans le même carré et choisi de sorte que $k_2 > k_1 - k$ (il en existe, voir remarque page précédente)

La translation de vecteur $\overrightarrow{NM}$ envoie P en un point P’ de Ω situé dans le rectangle $]0\,;\ \alpha[\times]0\,;\ \beta[$ et tel que : $f(P') = (k_2 + k - k_1) \geq 1$

Ce qui est contraire au résultat de la question 13.a.

Le rectangle $]0\,;\ \alpha[\times]0\,;\ \beta[$ ne contient aucun point M de Ω.
</td>
<td>


</td>
</tr>
</table>

14.a. D’après la question **13**, le carré $]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[\times]-\varepsilon\,;\ \varepsilon[$ contient au moins un point *Y* de Ω avec $f(Y) \neq 0$. Mais ce point ne peut appartenir ni au quadrant $]0\,;\ \varepsilon[\times]0\,;\ \varepsilon[$ (il serait dans le rectangle $]0\,;\ \alpha[\times]0\,;\ \beta[$) ni non plus au quadrant $]-\varepsilon\,;\ 0[\times]-\varepsilon\,;\ 0[$ (son symétrique par rapport à *O* serait dans ce rectangle).

Il en résulte que ce point, ou bien son symétrique par rapport à *O* qui est aussi dans Ω, appartient au quadrant $]0\,;\ \varepsilon[\times]0\,;-\varepsilon[$.

14.b. Supposons que le rectangle $]ks\,;(k+2)s]\times]kt\,;(k-2)t]$ contienne un point $M(x\,;y)$ de Ω. Les coordonnées de ce point vérifient les inégalités : $ks < x \leq (k+2)s$ et $kt < y \leq (k-2)t$.

Puisque $Q(s,t)$ et l’origine du repère *O* appartiennent à Ω, les translatés de *M* par une ou plusieurs translations de vecteur $\overrightarrow{QO}\ (-s\,;\ -t)$ appartiennent aussi à Ω. Il en est ainsi du point *M’* obtenu après *k* translations :

$M'(x' = x - ks\,; y' = y - kt)$. Les coordonnées de ce point vérifient les inégalités : $0 < x' \leq 2s$ et $0 < y \leq -2t$. Puisque *s* et *t* sont strictement plus petits que $\frac{\min(\alpha,\beta)}{2}$, ce point est dans le rectangle $]0\,;\ \alpha[\times]0\,;\ \beta[$. Nous avons vu que c’était impossible. L’hypothèse est à rejeter.

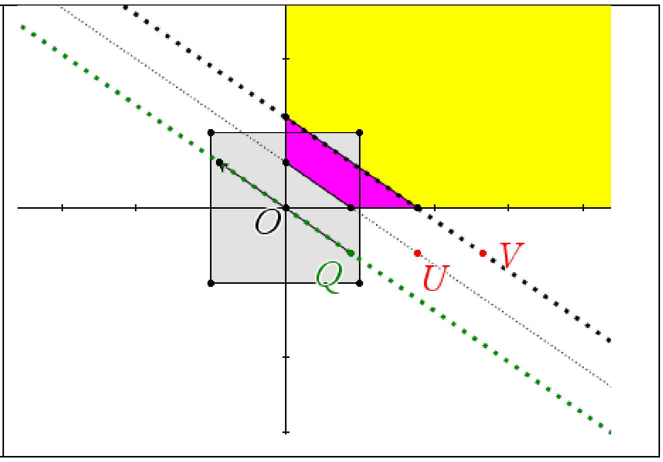
Le rectangle $]ks\,;(k+2)s]\times]kt\,;(k-2)t]$ ne contient aucun point de Ω.

14.c. L'ensemble des points P tels que $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = 0$ est la droite (OQ). De façon générale, les points P dont les coordonnées vérifient une relation de la forme $g(P) = \lambda$ (constante réelle) c'est-à-dire $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \lambda$ sont sur une droite parallèle à (OQ).

- La droite d'équation $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = 1$ est la parallèle à (OQ) qui passe par le point U de cordonnées $(2s\,;t)$.
- La droite d'équation $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = 2$ est la parallèle à (OQ) qui passe par le point V de cordonnées $(3s\,;t)$.

Graphiquement, s'il y avait un point entre les deux droites (celle passant par U exclue, celle par V incluse) qui appartient à Ω, on pourrait en déduire par une translation $T_{k.\overrightarrow{OQ}}$ convenable un point de Ω situé dans le trapèze colorié en magenta (petite base et côtés ouverts) donc dans le rectangle $]0\,;\,\alpha[\times]0\,;\,\beta[$, ce qui est impossible.

Il n'y a pas dans Ω de point P tel que $1 < g(P) \leq 2$.



14.d. Soit $P\ (x\,;y)$ un point tel que $0 < |g(P)| \leq 2$. Supposons que P appartienne à Ω.

Sans diminuer la généralité, on peut supposer que $0 < g(P) \leq 2$, quitte à considérer le symétrique de P par rapport à O.

La **question 14.c** a montré qu'il n'est pas possible que $1 < g(P) \leq 2$.

Il n'est pas possible non plus que $g(P) = 1$, sinon l'homothétique P' de P par l'homothétie de centre O et de rapport 2 vérifierait $g(P') = 2$ et serait lui aussi dans Ω, ce qui est impossible.

Il reste à étudier le cas $0 < g(P) < 1$. Considérons alors l'homothétique P' de P par l'homothétie de centre O et de rapport l'entier k qui vérifie la double inégalité $\frac{1}{g(P)} < k \leq \frac{1}{g(P)} + 1$

$g(P') = \frac{kx}{s} - \frac{ky}{t} = k.g(P)$. Utilisons l'inégalité que vérifie k :

$\frac{1}{g(P)} \times g(P) < k.g(P) = g(P') \leq \left(\frac{1}{g(P)} + 1\right) \times g(P)$ soit $1 < g(P') \leq 1 + g(P) \leq 2$.

Ce point P' serait dans la bande $1 < g(P') \leq 2$ et serait lui aussi dans Ω, ce qui est impossible.

Il n'y pas de point de Ω tel que $0 < |g(P)| \leq 2$.

Ainsi, tous les points P de Ω qui vérifient $|g(P)| \leq 2$ sont sur la droite d'équation $g(P) = 0$

Tout point P de Ω qui vérifie $|g(P)| \leq 2$ appartient à la droite (OQ).

14.e. Si $\varepsilon \geq \frac{\min(\alpha,\beta)}{2}$, la question est réglée par ce qu'on vient de voir puisque le point Q lui-même convient.

Il reste le cas où $0 < \varepsilon < \frac{\min(\alpha,\beta)}{2}$. Dans ce cas, considérons le nombre $\varepsilon' = \min(\varepsilon, s, -t)$.

D'après la **question 14.a.** Il existe un point $P\,(x,y)$ qui est à la fois dans Ω et dans le rectangle $]0\,;\,\varepsilon'[\times]0\,;-\varepsilon'[$ (donc *a fortiori* dans le rectangle $]0\,;\,\varepsilon[\times]0\,;-\varepsilon[$).

Ce point P est tel que $0 < x < s$ et $t < y < 0$. Donc : $-1 < g(P) = \frac{x}{s} - \frac{y}{t} < 1$

D'après la **question 14.d**, ce point appartient à la droite (OQ).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point P qui est à la fois dans Ω, dans le rectangle $]0\,;\,\varepsilon[\times]0\,;-\varepsilon[$

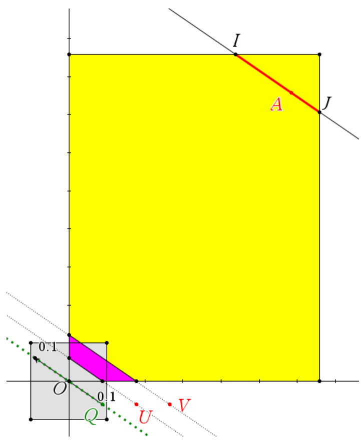
et sur la droite (OQ).

P étant un tel point, $\|\overrightarrow{OP}\| \leq \varepsilon\sqrt{2}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, par translations successives de vecteur $\overrightarrow{OP}$ ou de son opposé, on peut construire un réseau de points de Ω régulièrement échelonnés sur la droite (OQ) et dont la distance à leur voisin est majorée par $\varepsilon\sqrt{2}$.

Considérons une parallèle à (OQ) passant par un point A intérieur au rectangle $]0\,;\,\alpha[\times]0\,;\,\beta[$. Alors cette droite a en commun avec ce rectangle un segment $]IJ[$.

Supposons que cette droite contienne un point de Ω. Choisissons $\varepsilon = \frac{IJ}{\sqrt{2}}$ et construisons sur cette droite à partir de ce point, par translations successives, le réseau de points de Ω décrit ci-dessus. Nous obtiendrons ainsi au moins un point de Ω situé à l'intérieur du segment [IJ], donc situé dans le rectangle $]0\,;\,\alpha[\times]0\,;\,\beta[$. C'est impossible.

Une parallèle à (OQ) passant par un point A intérieur au rectangle $]0\,;\,\alpha[\times]0\,;\,\beta[$ ne contient aucun point de Ω.



15. L'ensemble $\mathcal{H}$ est stable pour la soustraction et il n'est pas vide puisqu'il contient x. De ce fait, il contient $0 = x - x$ ainsi que $-x = 0 - x$. Il contient $2x = x - (-x)$ ainsi que $-2x = -x - x$. Par itération k fois du procédé, pour tout entier k positif, $\mathcal{H}$ contient kx et son opposé $-kx$.

Pour tout entier relatif k, $kx \in \mathcal{H}$, autrement dit, l'ensemble $\mathcal{H}$ contient $k\mathbb{Z}$.

Réciproquement, soit $y \in \mathcal{H}$. Il existe un entier relatif k tel que : $kx \leq y < (k+1)x$. (Cet entier est ent$\left(\frac{y}{x}\right)$).

Par stabilité pour la soustraction : $y - kx \in \mathcal{H}$. Mais cet élément vérifie : $0 \leq y - kx < x$.

Puisque $\mathcal{H}$ ne contient aucun élément de $]0\,;x[$, nécessairement $y - kx = 0$. Il existe ainsi un entier relatif k tel que $y = kx$

Pour tout $y \in \mathcal{H}$, $y \in k\mathbb{Z}$, autrement dit $\mathcal{H}$ est contenu dans $k\mathbb{Z}$.

En définitive, $\mathcal{H} = k\mathbb{Z}$.

16.a. Considérons la parallèle à (OQ) passant par le point de coordonnées $\left(\lambda = \alpha - \frac{s}{t}\beta\,;0\right)$.

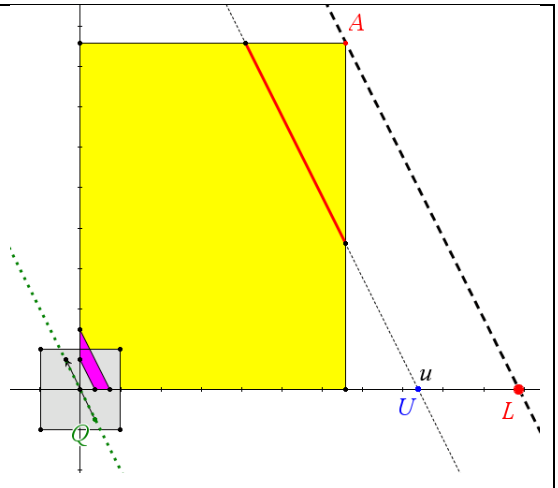
Elle a pour équation : $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{\lambda}{s}$, soit : $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{\alpha}{s} - \frac{\beta}{t}$.

Cette droite passe par le point A de coordonnées $(\alpha\,;\,\beta)$ qui est le point de Ω dont le triplet associé est le triplet $(k = 1\,; m = n = 0)$.

Il s'agit de la droite (AL) passant par le sommet A « Nord-Est » du rectangle $]0\,;\,\alpha[\times]0\,;\,\beta[$.

Toute parallèle à (OQ) coupant l'axe Ox en un point U situé strictement entre O et L passe à l'intérieur du rectangle $]0\,;\,\alpha[\times]0\,;\,\beta[$ et a un segment commun avec lui. En vertu de la **question 14.f**, une telle droite ne contient aucun point de Ω.

Aucune valeur u appartenant à $]0\,;\,\lambda[$ n'appartient à l'ensemble Λ.



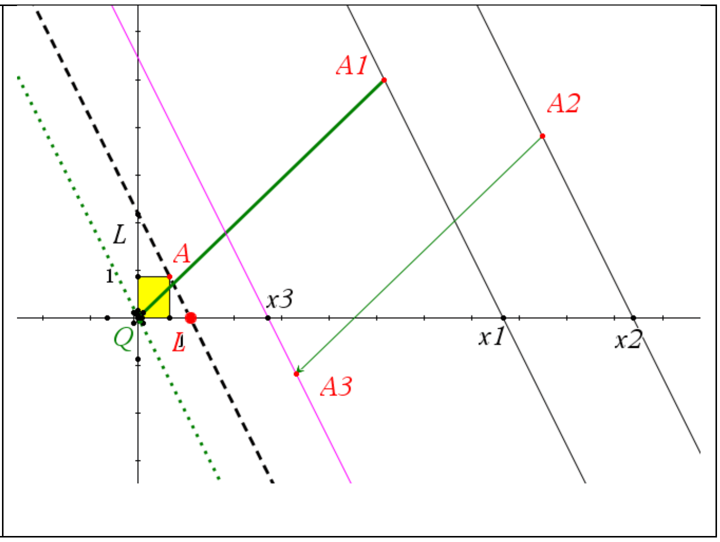
16.b. Montrons que l'ensemble Λ est stable pour la soustraction.

Soit x_1 et x_2 deux éléments de Λ. Les parallèles à (OQ) passant par les points $(x_1\,;0)$ et $(x_2\,;0)$ ont pour équations respectives : $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{x_1}{s}$ et $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{x_2}{s}$

Elles passent chacune par un point de de Ω, le point A_1 et le point A_2 respectivement.

Le point A_3 translaté de A_2 par la translation de vecteur $\overrightarrow{A_1O}$ appartient à Ω d'après la **question 11**. Or :

$$\begin{cases} x_{A3} = x_{A2} - x_{A1} \\ y_{A3} = y_{A2} - y_{A1} \end{cases}$$



Les coordonnées de ce point A_3 vérifient : $\frac{x_{A3}}{s} - \frac{y_{A3}}{t} = \frac{x_{A2}-x_{A1}}{s} + \frac{y_{A2}-y_{A1}}{t} = \frac{x_2-x_1}{s}$.

La parallèle à *OQ* passant par A_3 a pour équation $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = \frac{x_2-x_1}{s}$ et coupe l'axe *Ox* au point d'abscisse : $x_3 = x_2 - x_1$. Il en résulte que, si x_1 et x_2 sont deux éléments de Λ, leur différence $x_3 = x_2 - x_1$ est aussi un élément de Λ.

Les deux hypothèses de la **question 15** sont satisfaites :

$$\Lambda = \lambda\mathbb{Z} \quad \text{avec } \lambda = \alpha - \frac{s}{t}$$

17.a. Les points *P* de Ω tels que $f(P) = 0$ ont des coordonnées entières. Si nous considérons le point $Q(s\,;t)$ lui-même qui appartient à Ω, il existe trois entiers *k, m, n* tels que : $s = k\alpha + m\,; t = k\beta + n$

Or, ses coordonnées vérifient $0 < s < \min(\alpha,\beta) < 1$ et $-1 < -\min(\alpha,\beta) < t < 0$.

Les cordonnées de *Q* sont non entières donc $f(Q) = k \neq 0$.

Le point *Q'* symétrique de *Q* par rapport à *O* appartient à Ω et a des coordonnées opposées.

Compte tenu de l'unicité du triplet qui le caractérise, $f(Q') = -k = -f(Q)$.

L'un u l'autre des deux points *Q* ou *Q'* a une image par *f* qui est un entier strictement positif.

L'ensemble Γ contient au moins un entier strictement positif.

L'ensemble des entiers > 0 appartenant à Γ étant non vide, cet ensemble a bien un plus petit élément.

17.b. Montrons que Γ est stable pour la soustraction.

Soit *k* et *k'* deux éléments de Γ et $P(k\alpha + m\,; k\beta + n)$ et $P'(k'\alpha + m'\,; k'\beta + n')$ des points de Ω situés sur la droite (*OQ*) qui leur sont associés. Le point *P''* translaté de *P'* par la translation de vecteur $\overrightarrow{PO}$ appartient à Ω d'après la question **11** et à la droite (*OQ*) car cette droite est globalement invariante par cette translation. Ses coordonnées sont $(k'\alpha + m' - (k\alpha + m); k'\beta + n' - (k'\beta + n'))$

Le triplet qui caractérise ce point est le triplet $(k' - k\,;\ m' - m\,; n' - n)$. Ainsi : $f(P'') = f(P') - f(P)$. Si *k* et *k'* deux éléments de Γ, leur différence $k' - k$ est aussi un élément de Γ.

Si γ est le plus petit entier > 0 appartenant à Γ, par définition l'intervalle $]0\,;\ \gamma[$ ne contient aucun élément de Γ. Les hypothèses de la question **15** sont satisfaites : $\Gamma = k\mathbb{Z}$.

17.c. Considérons un point P_1 appartenant à Ω et à la droite (OQ) tel que $f(P_1) = \gamma$.

Considérons un autre point P_2 appartenant à Ω et à la droite (OQ) tel que $f(P_2) = k_2\gamma$ qui n'est pas homothétique de P_1 par une homothétie de centre O et de rapport entier (il en existe puisqu'on peut trouver des points convenables arbitrairement voisins de O, notamment entre O et P_1).

Soit (γ, m_1, n_1) et $(k_2\gamma, m_2, n_2)$ leurs triplets associés.

Compte tenu de l'appartenance de ces points à la droite (OQ) :

$\frac{\gamma\alpha + m_1}{s} = \frac{\gamma\beta + n_1}{t}$ et $\frac{k_2\gamma\alpha + m_2}{s} = \frac{k_2\gamma\beta + n_2}{t}$.

Puisque P_2 est choisi non homothétique de P_1 dans un rapport entier, $k_2 m_1 - m_2$ et $k_2 n_1 - n_2$

Nous pouvons en déduire :

$$\frac{s}{t} = \frac{\gamma\alpha + m_1}{\gamma\beta + n_1} = \frac{k_2\gamma\alpha + m_2}{k_2\gamma\beta + n_2} = \frac{k_2(\gamma\alpha + m_1)}{k_2(\gamma\beta + n_1)} - \frac{(k_2\gamma\alpha + m_2)}{(k_2\gamma\beta + n_2)} = \frac{k_2 m_1 - m_2}{k_2 n_1 - n_2}$$

Dans ce dernier rapport, tous les ingrédients sont des entiers, ce rapport est rationnel.

Le rapport $\frac{s}{t}$ ainsi que son opposé $-\frac{s}{t}$ sont des nombres rationnels.

18.a. Vu que $\frac{u}{v}$ est la forme irréductible de $-\frac{s}{t}$, une équation cartésienne d'une parallèle à (OQ) est l'équation $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = c$ où c est une constante arbitraire.

Les entiers *u* et *v* étant premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout il existe deux entiers relatifs *a* et *b* tels que $au + bv = 1$

Supposons que $c = \frac{u}{v}$ et montrons que la droite d'équation $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{u}{v}$ passe par un point de Ω. Une équation équivalente en est l'équation : $vx + uy = u^2$. Cette droite passe par le point de coordonnées $(bu^2\,;au^2)$ qui est un point de Ω en tant que point à coordonnées entières. Ceci montre que $\frac{u}{v} \in \Lambda$ donc que $u \in W$.

Supposons que $c = \frac{v}{v} = 1$ et montrons que la droite d'équation $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 1$ passe par un point de Ω. Une équation équivalente en est l'équation : $vx + uy = uv$. Cette droite passe par le point de coordonnées $(buv\,;auv)$ qui est un point de Ω en tant que point à coordonnées entières. Ceci montre que $1 = \frac{v}{v} \in \Lambda$ donc que $v \in W$.

Les entiers *u* et *v* appartiennent à W.

18.b. Dès lors que $\frac{u}{v}$ et $1 = \frac{v}{v}$ appartiennent à Λ, par stabilité de cet ensemble pour l'addition, les nombres $a\frac{u}{v}$ et $b\frac{v}{v}$ appartiennent à Λ, ainsi que leur somme $\frac{au+bv}{v} = \frac{1}{v}$.

L'entier 1 appartient à W et, avec lui, tous ses multiples entiers.

$W = \mathbb{Z}$

19. La **question 9** a montré le sens : Si α et β sont deux irrationnels tels qu'il existe des entiers strictement positifs *u* et *v* vérifiant $\alpha u + \beta v = 1$, alors $P_\cap$ est vérifiée.

Réciproquement, la **question 5** a montré que $P_\cap$ ne peut être vérifiée qu'avec deux irrationnels. Faisons une synthèse des **questions 11** et suivantes qui partent de l'hypothèse «$P_\cap$ est vérifiée » :

Les parallèles à la droite (*OQ*) ont une équation de la forme : $\frac{x}{s} - \frac{y}{t} = c$ soit, avec la notation $\frac{s}{t} = -\frac{u}{v}$ une équation de la forme : $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = c$

Puisque *s* et *t* sont de signes contraires, *u* et *v* sont de même signe, on peut sélectionner la paire d'entiers strictement positifs.

Celles qui passent par un point de Ω ont une équation de la forme : $\frac{x}{u} + \frac{y}{v} = \frac{1}{u} \times k\lambda$ avec $\lambda = \alpha + \frac{u}{v}\beta$.

La **question 18** a montré que $W = \mathbb{Z}$. Nécessairement, plus petit coefficient strictement positif $\frac{1}{v}$ est associé à celle qui coupe la demi-droite [*Ox*) le plus près de l'origine (celle de la **question 16.a**).

Nous obtenons : $\frac{1}{u}\left(\alpha + \frac{u}{v}\beta\right) = \frac{1}{v}$ soit : $\alpha u + \beta v = 1$.

Réciproquement, si $P_\cap$ est vérifiée, α et β sont deux irrationnels tels qu'il existe des entiers strictement positifs *u* et *v* vérifiant $\alpha u + \beta v = 1$.

20. Soit α et β deux réels strictement positifs. Nous avons vu en **question 3** que la condition $\max(\alpha, \beta) \geq 1$ était une condition suffisante pour que la propriété $P_\cup$ soit vérifiée.

Supposons que $\max(\alpha, \beta) < 1$. Nous avons vu en **question 5 que** si l'un au moins des deux nombres α ou β était rationnel, alors il n'est pas possible que la propriété $P_\cup$ soit vérifiée. L'irrationnalité des deux nombres est une condition nécessaire.

Dans un tel cas, les nombres α et $1 - \alpha$ sont deux irrationnels strictement positifs de somme 1. Ils satisfont les conditions du théorème A. Les ensembles $\mathcal{E}(\alpha)$ et $\mathcal{E}(1-\alpha)$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, ils sont complémentaires : $\mathcal{E}(\alpha) = \overline{\mathcal{E}(1-\alpha)}$.

De la même façon, les ensembles $\mathcal{E}(\beta)$ et $\mathcal{E}(1-\beta)$ sont complémentaires : $\mathcal{E}(\beta) = \overline{\mathcal{E}(1-\beta)}$.

Or : $\overline{\mathcal{E}(\alpha) \cup \mathcal{E}(\beta)} = \overline{\mathcal{E}(\alpha)} \cap \overline{\mathcal{E}(\beta)} = \mathcal{E}(1-\alpha) \cap \mathcal{E}(1-\beta)$. Nous obtenons dans ces conditions :

$$\mathcal{E}(\alpha) \cup \mathcal{E}(\alpha) = \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \mathcal{E}(1-\alpha) \cap \mathcal{E}(1-\beta) = \emptyset$$

Les réels α et β vérifient $P_\cup$ si et seulement si les réels $1 - \alpha$ et $1 - \beta$ vérifient $P_\cap$.

En vertu du théorème démontré en **question 19**, la propriété $P_\cup$ est vérifiée si et seulement si :

- Ou bien $\max(\alpha, \beta) \geq 1$
- Ou bien $\max(\alpha, \beta) < 1$ mais α et β sont deux irrationnels strictement positifs tels qu'il existe des entiers *u* et *v* strictement positifs vérifiant : $u(1-\alpha) + v(1-\beta)$=1

21. Considérons trois nombres irrationnels *a, b, c* tels que $\mathcal{E}(a) \cap \mathcal{E}(b) = \mathcal{E}(a) \cap \mathcal{E}(c) = \emptyset$.

D'après le **théorème B**, il existe des entiers strictement positifs *u, v, u'* et *v'* tels que : $\begin{cases} au + bv = 1 \\ au' + cv' = 1 \end{cases}$.

On en déduit la relation : $bvu' - cuv' = u' - u$.

Supposons qu'il existe des entiers strictement positifs *x* et *y* tels que $bx + cy = 1$.

Nous aurions à la fois : $\begin{cases} bvu' - cuv' = u' - u \\ bx + cy = 1 \end{cases}$

Or, $\det\begin{pmatrix} vu' & -uv' \\ x & y \end{pmatrix} = vu'y + uv'x > 0$.

Le système d'équations en *b* et *c* représenté par les deux relations simultanées aurait des solutions.

Il serait possible d'exprimer *b* et *c* en fonction de *u, v, u', v', x* et *y* : les nombres *b* et *c* seraient des rationnels.

Cette hypothèse est à rejeter. La réciproque du théorème B ne peut pas s'appliquer.

Si $\mathcal{E}(a) \cap \mathcal{E}(b) = \mathcal{E}(a) \cap \mathcal{E}(c) = \emptyset$, alors $\mathcal{E}(b) \cap \mathcal{E}(c) \neq \emptyset$.

On ne peut pas obtenir trois ensembles disjoints deux à deux.

La copie d'écran TI-NSpire ci-contre illustre la situation des **questions 19 et 20** avec deux réels irrationnels *a* et *b* et leurs deux compléments à l'unité.

On fait afficher les 25 premiers termes des ensembles qui leur sont associés.

On peut conjecturer que

$\mathcal{E}(a) \cap \mathcal{E}(b) = \emptyset$ et que

$\mathcal{E}(1-a) \cup \mathcal{E}(1-b) = \mathbb{N}^*$

Define $a=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ — *Terminé*

Define $b=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$ — *Terminé*

entr$(a,25)$

$\{2,4,7,9,12,14,16,19,21,24,26,28,31,33,36,38,41,43,45,48,50,53,55,57,60\}$

Terminé

entr$(b,25)$

$\{3,6,10,13,17,20,23,27,30,34,37,40,44,47,51,54,58,61,64,68,71,75,78,81,85\}$

Terminé

entr$(1-a,25)$

$\{1,3,5,6,8,10,11,13,15,17,18,20,22,23,25,27,29,30,32,34,35,37,39,40,42\}$

Terminé

entr$(1-b,25)$

$\{1,2,4,5,7,8,9,11,12,14,15,16,18,19,21,22,24,25,26,28,29,31,32,33,35\}$

Terminé

$a+2\cdot b$ — 1

entr

```
Define entr(x,n)=
Prgm
newList(n)→l
For k,1,n
  iPart(k/x)→l[k]
EndFor
Disp l
EndPrgm
```