

## Théorème de Pick

Vous trouverez sur ce même site plusieurs documents concernant d'une façon ou d'une autre le réseau des points du plan à coordonnées entières. Nous sommes ici dans ce cadre : un plan rapporté à un repère orthonormé et l'ensemble des points dont les coordonnées sont des entiers relatifs (on appellera désormais « points entiers » de tels points).

Le « théorème de Pick » permet le calcul de l'aire d'un polygone non croisé, convexe ou non, dont tous les sommets appartiennent au réseau des points du plan à coordonnées entières. Il propose une relation entre l'aire d'un tel polygone, le nombre de points entiers qui lui sont intérieurs, et le nombre de points entiers qui sont situés sur son bord.

Tous les sommets de tous les polygones dont il sera question dans ce sujet seront des points entiers.

### Sujet

#### Notations

- Etant donné un segment  $[AB]$  dont les extrémités  $A$  et  $B$  sont des points entiers, on note  $N_{AB}$  le nombre de points entiers qui appartiennent à ce segment, extrémités comprises. (Donc, pour un tel segment,  $N_{AB} \geq 2$  puisque les points  $A$  et  $B$  sont des points entiers)
- Etant donné un polygone non croisé  $P$  dont tous les sommets sont des points entiers, on note  $B_P$  le nombre de points entiers situés sur son bord (donc, si ce polygone a  $n$  sommets,  $B_P \geq n$ ) et on note  $I_P$  le nombre de points entiers qui lui sont strictement intérieurs.
- On désigne par  $a(P)$  l'aire du polygone  $P$ .

#### Énoncé du théorème de Pick

$$\text{Le théorème de Pick énonce que : } a(P) = I_P + \frac{B_P}{2} - 1$$

Il s'agira dans ce sujet de démontrer le théorème de Pick dans le cas de certains rectangles, puis dans le cas des triangles, en envisageant des « cas de figure » de plus en plus sophistiqués. La démarche sera à peu près la même dans tous les cas de figure considérés. Vous pouvez légitimement étudier deux ou trois cas de figure qui vous sont sympathiques (à votre choix) et admettre les autres.

Pour terminer, on démontre que le théorème de Pick se généralise à tous les polygones non croisés à sommets entiers, en admettant qu'un tel polygone peut toujours être découpé en un nombre fini de triangles entiers.

**0. Un lien entre le nombre de points entiers du bord et la somme des points entiers sur les côtés.**

Soit  $P = A_1A_2\dots A_k$  un polygone non croisé à sommets entiers,  $B_P$  le nombre de points entiers situés sur son bord, et  $N_{A_1A_2}; N_{A_2A_3}; \dots; N_{A_{k-1}A_k}; N_{A_kA_1}$  les nombres de points entiers situés sur ses côtés.

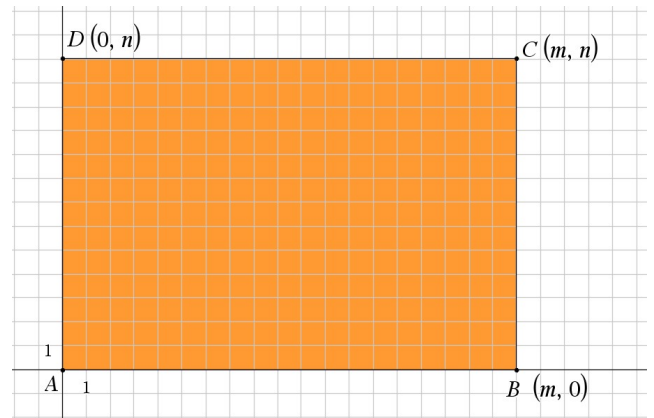
Justifier que :  $B_P = N_{A_1A_2} + N_{A_2A_3} + \dots + N_{A_{k-1}A_k} + N_{A_kA_1} - k$

(Ainsi, dans le cas d'un triangle  $A_1A_2A_3$  :  $B_{A_1A_2A_3} = N_{A_1A_2} + N_{A_2A_3} + N_{A_3A_1} - 3$  et dans le cas d'un quadrilatère non croisé  $A_1A_2A_3A_4$  :  $B_{A_1A_2A_3A_4} = N_{A_1A_2} + N_{A_2A_3} + N_{A_3A_4} + N_{A_4A_1} - 4$ )

**1. Cas d'un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées**

On se donne deux entiers  $m$  et  $n$  strictement positifs. Soit  $ABCD$  un rectangle de longueur  $m$  et de largeur  $n$ , dont les sommets sont des points entiers et dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

Quitte à faire une translation de vecteur entier, on peut considérer que les sommets du rectangle sont les points :  $A(0, 0); B(m, 0); C(m, n); D(0, n)$ .



**1.1.** Déterminer en fonction de  $m$  et de  $n$  le nombre  $B_{ABCD}$  de points entiers situés sur le bord du rectangle  $ABCD$ .

**1.2.** Déterminer en fonction de  $m$  et de  $n$  le nombre  $I_{ABCD}$  de points entiers qui lui sont strictement intérieurs.

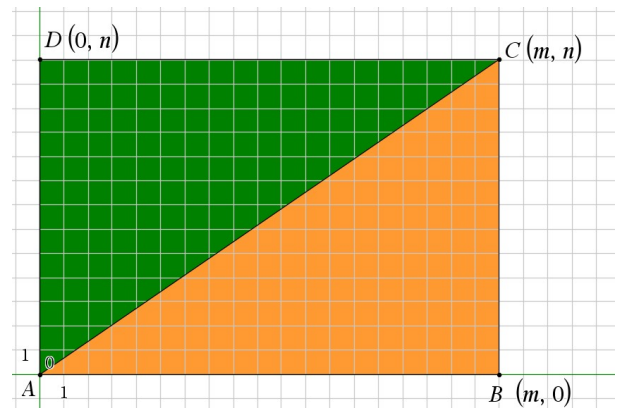
**1.3.** Vérifier que :  $a(ABCD) = I_{ABCD} + \frac{B_{ABCD}}{2} - 1$

**2. Cas d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes de coordonnées**

Dans la figure précédente, on considère les triangles rectangles  $ABC$  et  $ACD$ . On note  $N_{AC}$  le nombre de points entiers situés sur la diagonale  $[AC]$ .

**2.1.** Exprimer les nombres  $I_{ABC}, I_{ACD}, B_{ABC}, B_{ACD}$  en fonction de  $I_{ABCD}, B_{ABCD}, N_{AC}$ .

**2.2.** Montrer que le théorème de Pick est vérifié pour ces triangles rectangles  $ABC$  ou  $ACD$ .



**3. Cas d'un triangle dont un des côtés exactement est parallèle à un axe de coordonnées**

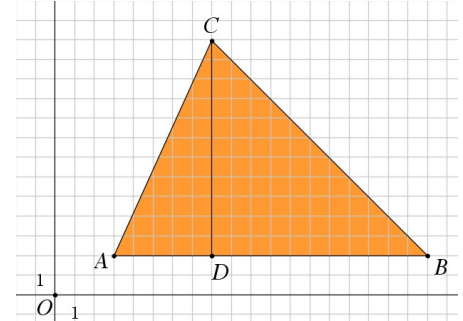
On peut supposer sans restreindre la généralité que cet axe est l'axe  $Ox$  et que  $(AB)$  est le côté parallèle à  $Ox$ .

On note  $D$  le pied de la hauteur issue de  $C$  sur  $(AB)$ . Si  $D = A$  ou  $D = B$ , le triangle  $ABC$  est rectangle avec les côtés de l'angle droit parallèles aux axes et entre dans le cas précédent. On suppose que non.

**3.1. Un premier cas de figure**

Le point  $D$  est entre  $A$  et  $B$ .

Référons-nous à la figure ci-contre. Le triangle  $ABC$  est la réunion des deux triangles rectangles  $ACD$  et  $BCD$ , sur lesquels s'applique le théorème de Pick.



3.1.1. Etablir que :  $a(ABC) = (I_{ACD} + I_{BCD}) + \frac{1}{2}(B_{ACD} + B_{BCD}) - 2$

3.1.2. Vérifier que :  $I_{ACD} + I_{BCD} = I_{ABC} - N_{CD} + 2$

3.1.3. Vérifier que :  $B_{ACD} + B_{BCD} = B_{ABC} - 2N_{CD} - 2$

3.1.4. Montrer que le théorème de Pick est vérifié pour un tel triangle  $ABC$ .

**3.2. Un deuxième cas de figure**

L'un des angles du triangle de sommet  $A$  ou de sommet  $B$  (par exemple lui) est obtus, le point  $D$  est à l'extérieur du segment  $[AB]$ .

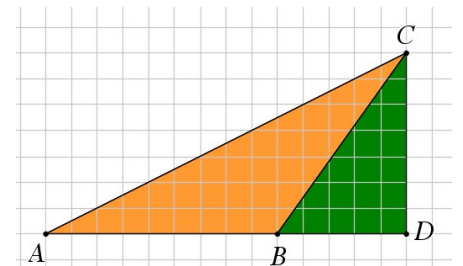
Référons-nous à la figure ci-contre. L'aire du triangle  $ABC$  est égale à l'aire du triangle rectangle  $ACD$  diminuée de l'aire du triangle rectangle  $BCD$ .

3.2.1. Etablir que  $a(ABC) = (I_{ACD} - I_{BCD}) + \frac{1}{2}(B_{ACD} - B_{BCD})$

3.2.2. Vérifier que :  $I_{ACD} - I_{BCD} = I_{ABC} + (N_{BC} - 2)$

3.2.3. Vérifier que :  $B_{ACD} - B_{BCD} = N_{AC} - N_{BC} + N_{AB} - 1$

3.2.4. Montrer que le théorème de Pick est vérifié pour un tel triangle  $ABC$ .



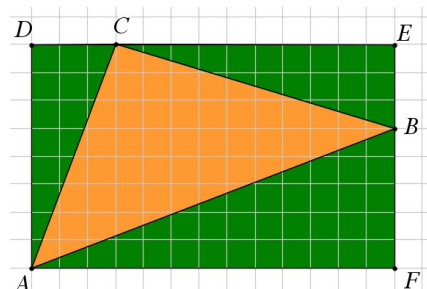
#### 4. Cas d'un triangle quelconque dont aucun des côtés n'est parallèle à un axe de coordonnées

On note  $A$  est le point d'abscisse minimale et  $B$  le point d'abscisse maximale. Quitte à prendre le triangle symétrique par rapport à  $Ox$ , on peut supposer que l'ordonnée de  $B$  est plus grande que celle de  $A$ .

##### 4.1. Un premier cas de figure

On suppose d'abord que l'ordonnée de  $C$  n'est pas comprise entre celle de  $A$  et celle de  $B$ .

En traçant des droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par ses sommets, on admet que l'on peut inscrire le triangle  $ABC$  dans un rectangle comme l'indique la figure ci-contre.



4.1.1. Etablir que : 
$$a(ABC) = (I_{AFED} - I_{AFB} - I_{ACD} - I_{BCE}) + \frac{1}{2}(B_{ABED} - B_{AFB} - B_{ACD} - B_{BCE}) + 2$$

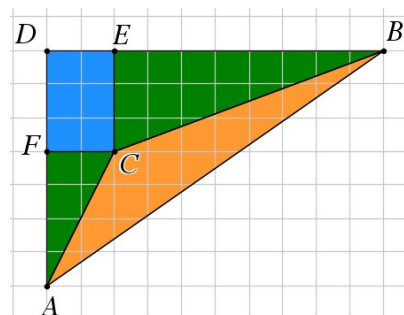
4.1.2. En s'inspirant des démarches décrites précédemment, montrer que le théorème de Pick est vérifié pour un tel triangle  $ABC$ .

##### 4.2. Un deuxième cas de figure

On suppose maintenant que l'ordonnée de  $C$  est comprise entre celle de  $A$  et celle de  $B$ .

En traçant des droites parallèles aux axes de coordonnées et passant par  $A$  et par  $B$ , on admet que l'on peut inscrire le triangle  $ABC$  dans un triangle rectangle comme l'indique la figure ci-contre.

S'inspirer des démarches précédentes pour montrer que le théorème de Pick s'applique à un tel triangle  $ABC$ .



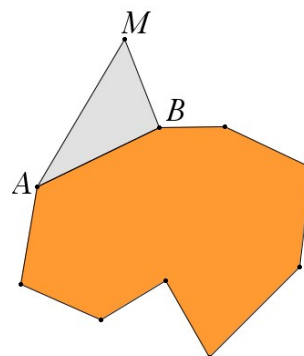
On estime que l'on a à peu près fait le tour de tous les cas de figure possibles(?) et on convient désormais que le théorème de Pick s'applique à tous les triangles entiers.

5. Supposons que le théorème de Pick s'applique à un polygone entier  $P$  non croisé décomposable en  $n$  triangles entiers.

On considère le polygone  $P'$  « augmenté » obtenu en adjoignant au polygone  $P$  un nouveau triangle entier. Notons  $[AB]$  le côté sur lequel vient se greffer le nouveau triangle et  $ABM$  ce nouveau triangle.

Montrer que, si le théorème de Pick s'applique au polygone  $P$ , alors il s'applique aussi au polygone « augmenté »  $P'$ .

Que peut-on en conclure ?



**Georg Alexander Pick** (10 août 1859 – 26 juillet 1942) était un mathématicien autrichien, né à Vienne et mort en déportation. En 1899, il prouve son théorème.

## Eléments de correction.

### 0. Un lien entre le nombre de points entiers du bord et la somme des points entiers sur les côtés.

Soit  $P = A_1 A_2 \dots A_k$  un polygone à sommets entiers,  $B_P$  le nombre de points entiers situés sur son bord, et  $N_{A_1 A_2}; N_{A_2 A_3}; \dots; N_{A_{k-1} A_k}; N_{A_k A_1}$  les nombres de points entiers situés sur ses côtés.

Dans la somme  $N_{A_1 A_2} + N_{A_2 A_3} + \dots + N_{A_{k-1} A_k} + N_{A_k A_1}$ , tous les points du bord sont comptés, exactement une fois pour les points entiers autres que les sommets, et deux fois pour les sommets. Le nombre de points du bord est donc égal à cette somme diminuée du nombre de sommets.

*Autre justification :* On note pour  $i = 1, 2, \dots, k$   $E_i$  l'ensemble des points entiers situés sur le segment  $[A_i A_{i+1}]$  en convenant que  $E_k$  est l'ensemble des points entiers situés sur le segment  $[A_k A_1]$ .

Par définition de ces nombres :  $\text{card}(E_i) = N_{A_i A_{i+1}}$  (avec la convention sur  $E_k$ ).

Et par définition aussi :  $B_P$  est le cardinal de la réunion de tous les ensembles  $E_i$ .

Mais les intersections de ces ensembles ne sont non vides que s'il s'agit de l'intersection de deux ensembles consécutifs, et dans ce cas cette intersection est un singleton (le sommet commun aux deux côtés consécutifs). La formule de Pascal donnant le cardinal d'une réunion en fonction des cardinaux des diverses intersections donne le

résultat. Elle se résume à : 
$$B_P = \sum_{i=1}^k \text{card}(E_i) - \sum_{i=1}^{k-1} \text{card}(E_i \cap E_{i+1}) - \text{card}(E_k \cap E_1) = \sum_{i=1}^{k-1} N_{A_i A_{i+1}} + N_{A_k A_1} - k$$

### 1.1. Répertorions quels sont les points entiers situés sur le bord du rectangle.

- Les points de coordonnées  $(x, 0)$  avec  $0 \leq x \leq m$  sont les points entiers du segment  $[AB]$ . Les points de coordonnées  $(x, n)$  avec  $0 \leq x \leq m$  sont ceux du segment  $[DC]$ . Il y en a  $m+1$  sur chaque segment (extrémités comprises) :  $N_{AB} = N_{CD} = m+1$
- Les points de coordonnées  $(m, y)$  et ceux de coordonnées  $(0, y)$  avec  $0 \leq y \leq n$  sont les points entiers, respectivement, du segment  $[BC]$  et du segment  $[AD]$ ) : il y en a  $n+1$  sur chaque segment (extrémités comprises) :  $N_{BC} = N_{AD} = n+1$

On obtient :  $B_{ABCD} = N_{AB} + N_{BC} + N_{CD} + N_{DA} - 4 = 2N_{AB} + 2N_{AD} - 4 = 2m + 2n$

On note au passage que le nombre de points entiers situés sur les côtés opposés d'un tel rectangle est le même.

### 1.2. Les points intérieurs sont les points de coordonnées $(x, y)$ où $x$ et $y$ sont des entiers vérifiant :

$1 \leq x \leq m-1$  ;  $1 \leq y \leq n-1$ . Il y a ainsi  $I_{ABCD} = (m-1) \times (n-1) = (N_{AB} - 2) \times (N_{AD} - 2)$  points intérieurs.

Ou aussi bien :  $I_{ABCD} = m \times n - m - n + 1$

$$1.3. I_{ABCD} + \frac{B_{ABCD}}{2} - 1 = (m \times n - m - n + 1) + \left( \frac{2m + 2n}{2} \right) - 1 = m \times n = a(ABCD)$$

Une formule donnant l'aire du rectangle en fonction des différents nombres de points est conforme au « théorème de

Pick » :  $a(ABCD) = I_{ABCD} + \frac{B_{ABCD}}{2} - 1$

2. Les deux triangles  $ABC$  et  $ACD$  étant symétriques par rapport au centre du rectangle, symétrie qui transforme un point entier en un point entier, ces deux triangles ont la même aire, le même nombre de points entiers sur leurs bords,

le même nombre de points entiers intérieurs :  $a(ABC) = a(ACD) = \frac{1}{2}a(ABCD)$  et  $B_{ABC} = B_{ACD}$  ;  $I_{ABC} = I_{ACD}$

En ce qui concerne les points situés sur les bords :

$$B_{ABC} = N_{AB} + N_{BC} + N_{AC} - 3$$

D'autre part :  $N_{AB} + N_{BC} = \frac{B_{ABCD}}{2} + 2$  d'après la question 1.1.

Donc :  $B_{ABC} = \frac{B_{ABCD}}{2} + N_{AC} - 1$

En ce qui concerne les points intérieurs, ceux qui sont intérieurs au rectangle se répartissent en ceux qui sont à l'intérieur de  $ABC$ , un même nombre à l'intérieur de  $ACD$ , et ceux qui sont sur la diagonale, extrémités exclues :

$$I_{ABCD} = I_{ABC} + I_{ACD} + (N_{AC} - 2) = 2I_{ABC} + N_{AC} - 2.$$

On en déduit :  $I_{ABC} = \frac{I_{ABCD} - N_{AC}}{2} + 1$

En conséquence :  $I_{ABC} + \frac{B_{ABC}}{2} - 1 = \left( \frac{I_{ABCD} - N_{AC}}{2} + 1 \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{B_{ABCD}}{2} + N_{AC} - 1 \right) - 1$

Soit :  $I_{ABC} + \frac{B_{ABC}}{2} - 1 = \frac{I_{ABCD}}{2} + \frac{B_{ABCD}}{4} - \frac{N_{AC}}{2} + \frac{N_{AC}}{2} + 1 - \frac{1}{2} - 1$

On obtient :  $I_{ABC} + \frac{B_{ABC}}{2} - 1 = \frac{1}{2} \left( I_{ABCD} + \frac{B_{ABCD}}{2} - 1 \right) = \frac{1}{2} a(ABCD) = a(ABC)$

Le théorème de Pick est vérifié pour le triangle  $ABC$  (et évidemment aussi pour  $ACD$ )

Il est vérifié pour un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes.

**3. Cas d'un triangle dont un des côtés exactement est parallèle à un axe de coordonnées**

**3.1.1.**  $a(ABC) = a(ACD) + a(BCD) = \left( I_{ACD} + \frac{B_{ACD}}{2} - 1 \right) + \left( I_{BCD} + \frac{B_{BCD}}{2} - 1 \right)$

Ou aussi bien :  $a(ABC) = (I_{ACD} + I_{BCD}) + \frac{1}{2}(B_{ACD} + B_{BCD}) - 2$

**3.1.2.** Les points intérieurs au triangle  $ABC$  sont ceux qui sont intérieurs au triangle  $ACD$  ou au triangle  $BCD$  et ceux qui sont sur le segment  $[CD]$ , extrémités exclues :  $I_{ABC} = I_{ACD} + I_{BCD} + (N_{CD} - 2)$  et donc :

$$I_{ACD} + I_{BCD} = I_{ABC} - N_{CD} + 2$$

**3.1.3.**  $\begin{cases} B_{ACD} = N_{AC} + N_{AD} + N_{CD} - 3 \\ B_{BCD} = N_{BC} + N_{BD} + N_{CD} - 3 \end{cases}$ . Par conséquent :  $B_{ACD} + B_{BCD} = N_{AC} + N_{BC} + 2N_{CD} + (N_{AD} + N_{BD}) - 6$ .

Or la somme  $N_{AD} + N_{BD}$  dénombre une fois tous les points du segment  $[AB]$  à l'exception du point  $D$  qui est compté deux fois :  $N_{AD} + N_{BD} = N_{AB} + 1$

En conséquence :  $B_{ACD} + B_{BCD} = N_{AC} + N_{BC} + (N_{AB} + 1) + 2N_{CD} - 6 = (N_{AC} + N_{BC} + N_{BC}) - 2N_{CD} - 5$

Ou aussi bien :  $B_{ACD} + B_{BCD} = B_{ABC} - 2N_{CD} - 2$

**3.1.4.** On obtient :  $a(ABC) = (I_{ABC} - N_{CD} + 2) + \frac{1}{2}(B_{ABC} - 2N_{CD} - 2) - 2 = I_{ABC} + \frac{B_{ABC}}{2} - 1$ .

Le théorème de Pick s'applique à un tel triangle  $ABC$ .

**3.2.1.** L'aire du triangle  $ABC$  est égale à l'aire du triangle rectangle  $ACD$  diminuée de l'aire du triangle rectangle  $BCD$ , triangles pour lesquels le théorème de Pick est vérifié :

$$a(ABC) = a(ACD) - a(BCD)$$

$$a(ABC) = \left( I_{ACD} + \frac{B_{ACD}}{2} - 1 \right) - \left( I_{BCD} + \frac{B_{BCD}}{2} - 1 \right) \text{ ou aussi bien :}$$

$$a(ABC) = (I_{ACD} - I_{BCD}) + \frac{1}{2}(B_{ACD} - B_{BCD})$$

**3.2.2.** Les points entiers intérieurs au triangle  $ACD$  sont ceux qui sont intérieurs à l'un des triangles  $ABC$  ou  $BCD$  et ceux qui sont sur  $[BC]$  et qui sont distincts des extrémités :

$$I_{ACD} - I_{BCD} = I_{ABC} + (N_{BC} - 2)$$

**3.2.3.** D'autre part :  $\begin{cases} B_{ACD} = N_{AC} + N_{CD} + N_{AD} - 3 \\ B_{BCD} = N_{BC} + N_{BD} + N_{CD} - 3 \end{cases}$ . Et donc :  $B_{ACD} - B_{BCD} = N_{AC} - N_{BC} + (N_{AD} - N_{BD})$

Tenons compte que  $N_{AD} - N_{BD} = N_{AB} - 1$  (la différence dénombre tous les points du segment  $[AB]$  sauf l'extrémité  $B$  de ce segment) :  $B_{ACD} - B_{BCD} = N_{AC} - N_{BC} + N_{AB} - 1$

3.2.4. On obtient une nouvelle expression de l'aire du triangle  $ABC$  :

$$a(ABC) = (I_{ABC} + N_{BC} - 2) + \frac{1}{2}(N_{AC} - N_{BC} + N_{AB} - 1) = I_{ABC} + \frac{1}{2}(N_{AC} + N_{BC} + N_{AB} - 1) - 2 \text{ soit :}$$

$$a(ABC) = I_{ABC} + \frac{1}{2}(N_{AB} + N_{AC} + N_{BC} + 1) - 3$$

$$\text{Or : } a(ABC) = I_{ABC} + \frac{1}{2}((B_{ABC} + 3) - 1) - 2 = I_{ABC} + \frac{1}{2}B_{ABC} - 1$$

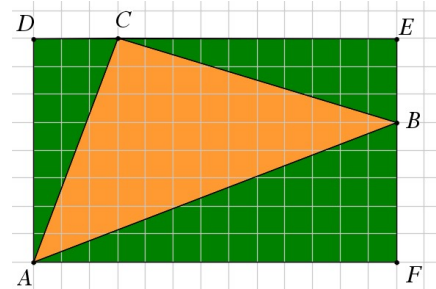
C'est-à-dire que le théorème de Pick est vérifié pour un tel triangle  $ABC$ .

#### 4. Cas d'un triangle $ABC$ dont aucun des côtés n'est parallèle à un axe de coordonnées

4.1. Référons-nous à la figure ci-contre :

L'aire du triangle  $ABC$  est égale à l'aire du rectangle  $AFED$  diminuée de l'aire des triangles rectangles  $AFB$ ,  $ACD$  et  $BCE$ , polygones pour lesquels le théorème de Pick est vérifié :

$$a(ABC) = a(AFED) - a(AFB) - a(ACD) - a(BCE)$$



$$a(ABC) = \left( I_{AFED} + \frac{B_{AFED}}{2} - 1 \right) - \left( I_{AFB} + \frac{B_{AFB}}{2} - 1 \right) - \left( I_{ACD} + \frac{B_{ACD}}{2} - 1 \right) - \left( I_{BCE} + \frac{B_{BCE}}{2} - 1 \right) \text{ ou aussi bien :}$$

$$a(ABC) = (I_{AFED} - I_{AFB} - I_{ACD} - I_{BCE}) + \frac{1}{2}(B_{AFED} - B_{AFB} - B_{ACD} - B_{BCE}) + 2$$

Les points entiers intérieurs au rectangle  $AFED$  sont ceux qui sont intérieurs à l'un des quatre triangles de la figure et ceux qui sont sur les segments  $[AB]$ ,  $[AC]$  ou  $[BC]$  et qui sont distincts des extrémités :

$$I_{AFED} - I_{AFB} - I_{ACD} - I_{BCE} = I_{ABC} + (N_{AB} - 2) + (N_{AC} - 2) + (N_{BC} - 2) = I_{ABC} + (N_{AB} + N_{AC} + N_{BC}) - 6$$

$$\text{Autrement dit : } I_{AFED} - I_{AFB} - I_{ACD} - I_{BCE} = I_{ABC} + B_{ABC} - 3$$

$$\text{D'autre part : } \begin{cases} B_{AFED} = 2N_{AF} + 2N_{AD} - 4 \\ B_{AFB} = N_{AF} + N_{FB} + N_{AB} - 3 \\ B_{ACD} = N_{AC} + N_{CD} + N_{AD} - 3 \\ B_{BCE} = N_{BC} + N_{CE} + N_{EB} - 3 \end{cases}$$

$$\text{Et donc : } B_{AFED} - B_{AFB} - B_{ACD} - B_{BCE} = N_{AF} + N_{AD} - (N_{FB} + N_{BE}) - (N_{CD} + N_{CE}) - N_{AB} - N_{AC} - N_{BC} + 5$$



Tenons compte que  $N_{CD} + N_{CE} = N_{DE} + 1 = N_{AF} + 1$  et que  $N_{FB} + N_{BE} = N_{FE} + 1 = N_{AD} + 1$  :

$$B_{AFED} - B_{AFB} - B_{ACD} - B_{BCE} = 3 - N_{AB} - N_{AC} - N_{BC} = -B_{ABC}$$

On obtient une nouvelle expression de l'aire du triangle  $ABC$  :

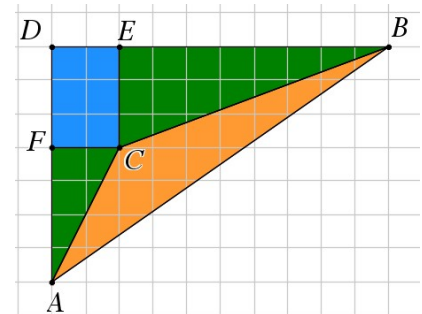
$$a(ABC) = (I_{ABC} + B_{ABC} - 3) - \frac{1}{2}B_{ABC} + 2 = I_{ABC} + \frac{B_{ABC}}{2} - 1$$

C'est-à-dire que le théorème de Pick est vérifié pour un tel triangle  $ABC$ .

4.2. Référons-nous à la figure ci-contre :

L'aire du triangle  $ABC$  est égale à l'aire du triangle rectangle  $ABD$  diminuée de l'aire des triangles rectangles  $AFC$  et  $BCE$ , ainsi que de l'aire du rectangle  $CEDF$ , polygones pour lesquels le théorème de Pick est vérifié :

$$a(ABC) = a(ABD) - a(AFC) - a(BCE) - a(CEDF)$$



$$a(ABC) = \left( I_{ABD} + \frac{B_{ABD}}{2} - 1 \right) - \left( I_{ACF} + \frac{B_{ACF}}{2} - 1 \right) - \left( I_{BCE} + \frac{B_{BCE}}{2} - 1 \right) - \left( I_{CEDF} + \frac{B_{CEDF}}{2} - 1 \right) \text{ ou aussi bien :}$$

$$a(ABC) = (I_{ABD} - I_{ACF} - I_{BCE} - I_{CEDF}) + \frac{1}{2}(B_{ABD} - B_{ACF} - B_{BCE} - B_{CEDF}) + 2$$

Les points entiers intérieurs au triangle rectangle  $ABD$  sont les points entiers intérieurs aux différentes « pièces du puzzle » et ceux qui sont sur les segments  $[CA]$ ,  $[CB]$ ,  $[CE]$  ou  $[CF]$  à l'exception des extrémités  $A$ ,  $B$ ,  $E$ ,  $F$  de ces segments (le point  $C$ , quant à lui, doit être compté une fois, par exemple sur le segment  $[BC]$ ) :

$$I_{ABD} - I_{ACF} - I_{BCE} - I_{CEDF} = I_{ABC} + (N_{CA} - 2) + (N_{CB} - 1) + (N_{CE} - 2) + (N_{CF} - 2)$$

$$\text{Soit : } I_{ABD} - I_{ACF} - I_{BCE} - I_{CEDF} = I_{ABC} + N_{AC} + N_{BC} + N_{CE} + N_{CF} - 7$$

Tenons compte que  $N_{AC} + N_{BC} = B_{ABC} - N_{AB} + 3$  et que  $N_{CE} + N_{CF} = \frac{1}{2}(B_{CEDF} + 4) = \frac{B_{CEDF}}{2} + 2$  :

$$I_{ABD} - I_{ACF} - I_{BCE} - I_{CEDF} = I_{ABC} + B_{ABC} + \frac{B_{CEDF}}{2} - N_{AB} - 2$$

Nous obtenons une expression quelque peu hétérogène de l'aire du triangle  $ABC$  :

$$a(ABC) = \left( I_{ABC} + B_{ABC} + \frac{B_{CEDF}}{2} - N_{AB} - 2 \right) + \frac{1}{2}(B_{ABD} - B_{ACF} - B_{BCE} - B_{CEDF}) + 2 \text{ soit :}$$

$$a(ABC) = I_{ABC} + B_{ABC} - N_{AB} + \frac{1}{2}(B_{ABD} - B_{ACF} - B_{BCE})$$

$$\text{D'autre part : } \begin{cases} B_{ABD} = N_{AB} + N_{AD} + N_{BD} - 3 \\ B_{ACF} = N_{AC} + N_{AF} + N_{CF} - 3 \\ B_{BCE} = N_{BC} + N_{CE} + N_{EB} - 3 \end{cases}$$

$$B_{ACF} + B_{BCE} = N_{AC} + N_{BC} + (N_{AF} + N_{CE}) + (N_{CF} + N_{EB}) - 6 = N_{AC} + N_{BC} + (N_{AD} + 1) + (N_{BD} + 1) - 6 \text{ ou aussi bien :}$$

$$B_{ACF} + B_{BCE} = N_{AC} + N_{BC} + N_{AD} + N_{BD} - 4.$$

$$\text{Par conséquent : } B_{ABD} - (B_{ACF} + B_{BCE}) = (N_{AB} + N_{AD} + N_{BD} - 3) - (N_{AC} + N_{BC} + N_{AD} + N_{BD} - 4) \text{ ou aussi bien :}$$

$$B_{ABD} - (B_{ACF} + B_{BCE}) = N_{AB} - N_{AC} - N_{BC} + 1$$

Nous obtenons une nouvelle expression de l'aire de  $ABC$  :

$$a(ABC) = I_{ABC} + B_{ABC} - N_{AB} + \frac{1}{2}(N_{AB} - N_{AC} - N_{BC} + 1) = I_{ABC} + B_{ABC} - \frac{1}{2}(N_{AB} + N_{AC} + N_{BC} - 1)$$

$$\text{C'est-à-dire : } a(ABC) = I_{ABC} + B_{ABC} - \frac{1}{2}(B_{ABC} + 2) = I_{ABC} + \frac{B_{ABC}}{2} - 1$$

Le théorème de Pick est vérifié dans le cas d'un tel triangle  $ABC$ .

$$5. \text{ En ce qui concerne les points situés au bord : } B_{P'} = B_P - N_{AB} + (N_{AM} + N_{BM} - 1) = B_P + B_{ABM} - 2N_{AB} + 2$$

Les points à l'intérieur du polygone augmenté sont ceux qui sont à l'intérieur du polygone initial ou du triangle et ceux qui sont sur le segment ouvert d'extrémités  $A$  et  $B$ .

$$I_{P'} = I_P + I_{ABM} + N_{AB} - 2. \text{ En ce qui concerne les aires : } a(P') = a(P) + a(ABM)$$

Le théorème de Pick s'applique au triangle  $ABM$  d'après les questions précédentes. Supposons qu'il s'applique au polygone  $P$ . Dans cette hypothèse :

$$a(P') = \left( I_P + \frac{B_P}{2} - 1 \right) + \left( I_{ABM} + \frac{B_{ABM}}{2} - 1 \right)$$

$$\text{En réorganisant autrement : } a(P') = (I_P + I_{ABM}) + \frac{1}{2}(B_P + B_{ABM}) - 2$$

$$\text{On obtient : } a(P') = (I_{P'} - N_{AB} + 2) + \frac{1}{2}(B_{P'} + 2N_{AB} - 2) - 2 \text{ c'est-à-dire } a(P') = I_{P'} + \frac{1}{2}B_{P'} - 1$$

Le théorème de Pick s'applique au polygone  $P'$ .

Si ce théorème s'applique pour tout polygone décomposable en  $n$  triangles entiers, il s'applique aussi pour tout polygone décomposable en  $(n + 1)$  triangles entiers. Ceci prouve l'hérédité de la relation en question.

Or nous avons vu que cette relation est vérifiée pour les triangles. Ce qui initialise la relation en question pour la valeur  $n = 1$ . Nous pouvons légitimement affirmer que, pour tout polygone à sommets entiers décomposable en un

$$\text{nombre quelconque de triangles, } a(P) = I_P + \frac{1}{2}B_P - 1.$$