# Olympiades académiques
# TOULOUSE 2024

## Exercice 2 : La formule de Pick

### Partie A

**1.** Le polygone *C* n'est pas un polygone simple car il est croisé (C1 non vérifiée).

Le polygone *D* n'est pas un polygone simple car l'un de ses sommets n'est pas un point à coordonnées entières (C2 non vérifiée).

Le polygone *E* n'est pas un polygone simple car l'un de ses sommets appartient à trois segments (C3 non vérifiée).

**2.a.** Le polygone *A* admet 4 points intérieurs et 9 points situés sur ses côtés. Ainsi $i = 4$ ; $c = 9$

Dans ce cas, $i + \frac{c}{2} - 1 = 4 + 4{,}5 - 1 = 7{,}5$. Il est de Pick.

Le polygone *B* admet 10 points intérieurs et 9 points situés sur ses côtés. Ainsi $i = 10$ ; $c = 9$

Dans ce cas, $i + \frac{c}{2} - 1 = 10 + 4{,}5 - 1 = 13{,}5$. Il est de Pick.

**2.b.** Le polygone *E* admet 2 points intérieurs et 16 points situés sur ses côtés. Ainsi $i = 2$ ; $c = 16$

Dans ce cas, $i + \frac{c}{2} - 1 = 2 + 8 - 1 = 9$.

Or, ce polygone est la réunion de deux triangles rectangles, l'un de côtés 3 et 3, l'autre de côtés 2 et 4.

Son aire est : $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 + \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4{,}5 + 4 = 8{,}5$. La formule de Pick n'est pas vérifiée.

Le polygone *E* n'est pas un polygone de Pick.

**2.c.** Le nombre *i* est toujours un entier naturel et le nombre *c* est toujours un entier strictement positif. Le nombre $2\left(i + \frac{c}{2} - 1\right)$ est un entier strictement positif. Une condition nécessaire pour qu'un polygone soit susceptible d'être de Pick est que le double de son aire soit un nombre entier.

Or, d'après l'énoncé : $5{,}605 \leq \text{aire}(D) < 5{,}615$ donc $11{,}21 \leq 2 \times \text{aire}(D) < 11{,}23$.

Le double de l'aire de *D* n'est pas un entier, Le polygone *D* n'est pas de Pick.

## Partie A : Quelques cas particuliers

**1.a.** Soit un rectangle simple de longueur 6 et de largeur 4, à l'exemple de la figure fournie par l'énoncé.

Son aire est $A = 6 \times 4 = 24$. On y dénombre 20 points situés sur les côtés et 15 points intérieurs. Pour ce rectangle, $c = 20$ ; $i = 15$. Donc : $i + \frac{c}{2} - 1 = 15 + \frac{20}{2} - 1 = 24$

On constate que $i + \frac{c}{2} - 1 = A$, ce rectangle est de Pick.

**1.b.** Soit *ABCD* un rectangle simple de longueur *L* et de largeur $\ell$ donc d'aire $L \times \ell$.

Etant un rectangle « simple », ses sommets sont des points à coordonnées entières. Ses côtés sont par hypothèse « parallèles aux axes de coordonnées ». Or, lorsqu'un segment dont les extrémités sont des points entiers est parallèle à un axe de coordonnées et est de longueur *N*, il contient exactement $(N + 1)$ points à coordonnées entières.

En l'occurrence, les deux longueurs du rectangle contiennent chacune $(L + 1)$ points à coordonnées entières et les deux largeurs du rectangle contiennent chacune $(\ell + 1)$ points à coordonnées entières. Mais chacun des 4 sommets appartient à deux côtés et est compté deux fois.

Le nombre de points à coordonnées entières situés sur les côtés est : $c = 2(L + 1) + 2(\ell + 1) - 4 = 2L + 2\ell$.

Les points strictement intérieurs constituent une grille rectangulaire de dimensions $L - 1$ et $\ell - 1$ ce qui donne : $i = (L - 1)(\ell - 1) = L \times \ell - L - \ell + 1$ points intérieurs.

Nous obtenons : $i + \frac{c}{2} - 1 = (L \times \ell - L - \ell + 1) + \frac{1}{2}(2L + 2\ell) - 1 = L \times \ell$

Un tel rectangle est un polygone de Pick.

*Il est possible de détailler ce dénombrement :*

On peut supposer sans diminuer la généralité que $A(u\,;v)$ est le sommet dont les coordonnées sont les plus petites et que les coordonnées des autres sommets sont : $B(u + L\,; v)$, $C(u + L\,; v + \ell)$, $D(u\,; v + \ell)$.

Dénombrons les points situés sur les côtés :

- Sur le segment $[AB[$ sont situés les points de coordonnées $(u + k\,; v)$ avec $0 \leq k < L$ (soit *L* points).
- Sur le segment $[BC[$ sont situés les points de coordonnées $(u + L\,; v + k)$ avec $0 \leq k < \ell$ (soit $\ell$ points).
- Sur le segment $[CD[$ sont situés les points de coordonnées $(u + L - k\,; v + \ell)$ avec $0 \leq k < L$ (soit *L* points).
- Sur le segment $[DA[$ sont situés les points de coordonnées $(u + L\,; v + k)$ avec $0 \leq k < \ell$ (soit $\ell$ points).

Il y a au total : $c = 2L + 2\ell$ points à coordonnées entières situés sur les côtés.

Dénombrons les points strictement intérieurs :

Il s'agit des points de coordonnées $(u + k\,; v + m)$ avec $0 < k < L$ et $0 < m < \ell$.

Le couple d'entiers $(k\,; m)$ décrit l'ensemble $\{1\,; 2\,; \ldots; L - 1\} \times \{1\,; 2\,; \ldots; \ell - 1\}$.

Le nombre de points à coordonnées entières intérieurs est : $i = (L - 1)(\ell - 1)$

**2.** Considérons un triangle rectangle simple de côtés de l'angle droits parallèles aux axes de coordonnées et de longueurs respectives *L* et $\ell$, donc d'aire $A = \frac{L\times\ell}{2}$

Si on désigne par *h* le nombre de points situés sur l'hypoténuse (extrémités comprises), le nombre de points situés sur les côtés du triangle est : $c = L + \ell + h - 3$ (si on ajoute les nombres de points entiers situés sur les côtés du triangle et sur l'hypoténuse, soit $L, \ell, h$ respectivement chacun des trois sommets du triangle est compté deux fois).

Pour exprimer le nombre de points intérieurs, complétons le triangle par son triangle symétrique par rapport au milieu de son hypoténuse. On obtient un rectangle de format $L \times \ell$ qui a, d'après la question précédente, $(L - 1)(\ell - 1)$ points intérieurs dont $h - 2$ sont des points de l'hypoténuse. Les deux triangles ont le même nombre *i* de points intérieurs soit chacun : $i = \frac{1}{2}[(L - 1)(\ell - 1) - (h - 2)] = \frac{1}{2}(L \times \ell - L - \ell - h + 3)$

Pour ce triangle : $i + \frac{c}{2} - 1 = \frac{1}{2}(L \times \ell - L - \ell - h + 3) + \frac{1}{2}(L + \ell + h - 3\,) = \frac{L\times\ell}{2}$

On constate que $i + \frac{c}{2} - 1 = A$, ce triangle est de Pick.

## Partie C : Cas général

**1.a.** Explicitons les relations entre les divers paramètres définis dans l'énoncé.

On note que le « segment séparateur », frontière commune de $P_1$ et $P_2$ contient *h* points de la grille ($h \geq 2$) dont ses deux extrémités (sommets de *P*) situés sur les côtés du polygone *P*.

- Les aires : $A = A_1 + A_2$ car les polygones $P_1$ et $P_2$, ainsi que leur frontière commune qui a une aire nulle, forment une partition du polygone *P*.
- Les points intérieurs : $i = i_1 + i_2 + (h - 2)$ car l'ensemble des points intérieurs à *P* est la réunion des ensembles des points intérieurs à $P_1$, à $P_2$ et de l'ensemble des points de la grille qui sont sur le segment séparateur, extrémités exclues.
- Les points sur les côtés : $c = c_1 + c_2 - 2h + 2$. En effet, si on dénombre séparément les ensembles des points de la grille situés sur les côtés de $P_1$ et sur ceux de $P_2$, on dénombre les points situés sur les côtés de *P*, et deux fois ceux qui sont sur le segment séparateur. Sur ce segment, seules les extrémités doivent être comptabilisées et cela une seule fois.

On en déduit la relation ® :

$$i + \frac{c}{2} - 1 = (i_1 + i_2 + h - 2) + \frac{c_1 + c_2 - 2h + 2}{2} - 1 = \left(i_1 + \frac{c_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{c_2}{2} - 1\right)$$

Cette relation liant les nombres de Pick associés aux trois polygones, utile pour les deux questions suivantes, ne dépend pas du nombre de points de la grille qui sont situés sur le « segment séparateur ».

**1.b.** Si $P_1$ et $P_2$ sont des polygones de Pick, alors $i_1 + \frac{c_1}{2} - 1 = i_2 + \frac{c_2}{2} - 1 = 0$. Ce qui implique, compte tenu de la relation ® que : $i + \frac{c}{2} - 1 = \left(i_1 + \frac{c_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{c_2}{2} - 1\right) = 0$ : le polygone $P$ est un polygone de Pick.

**1.c.** Si $P$ et $P_1$ sont des polygones de Pick, alors $i + \frac{c}{2} - 1 = i_1 + \frac{c_1}{2} - 1 = 0$. Ce qui implique, compte tenu de la relation ® que : $i_2 + \frac{c_2}{2} - 1 = \left(i + \frac{c}{2} - 1\right) - \left(i_1 + \frac{c_1}{2} - 1\right) = 0$ : le polygone $P_2$ est un polygone de Pick.

NB. Il ne semble pas utile que le polygone $P$ « possède au moins quatre sommets » mais plutôt que le nombre de points sur les côtés soit au moins égal à quatre. Il suffit en effet que le « segment séparateur » soit intérieur au polygone.

Dans le cas d'un triangle $T$ découpé en deux triangles $T_1$ et $T_2$, il est nécessaire qu'un côté contienne au moins trois points de la grille pour qu'un tel segment séparateur existe. Soit alors $h$ le nombre de points de la grille situés sur ce segment :

- Aires : $A = A_1 + A_2$
- Points de la grille intérieurs : $i = i_1 + i_2 + (h - 2)$
- Points de la grille sur les côtés : $c = c_1 - (h - 2) + c_2 - (h - 2) - 2$ soit $c = c_1 + c_2 - 2h + 2$ comme dans le cas précédent

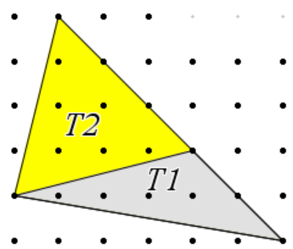
Dans l'exemple ci-contre, les paramètres prennent les valeurs suivantes :

$c = 7$ ; $i = 10$ ; $h = 2$ ainsi que $c_1 = 4$ ; $i_1 = 4$ ; $c_2 = 5$ ; $i_2 = 6$

Nous avons bien :

$$i + \frac{c}{2} - 1 = 12{,}5$$

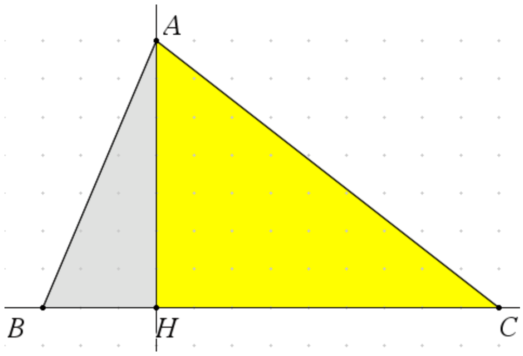
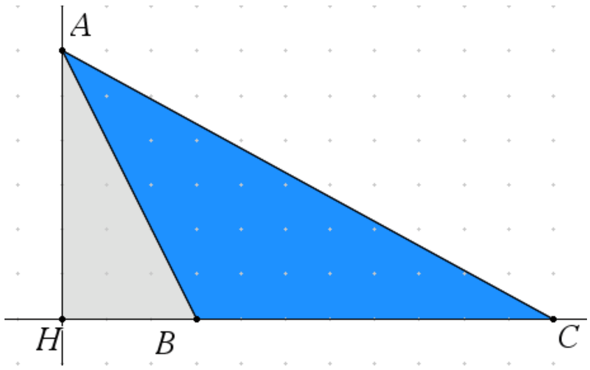
$$\left(i_1 + \frac{c_1}{2} - 1\right) + \left(i_2 + \frac{c_2}{2} - 1\right) = 5 + 7{,}5 = 12{,}5$$



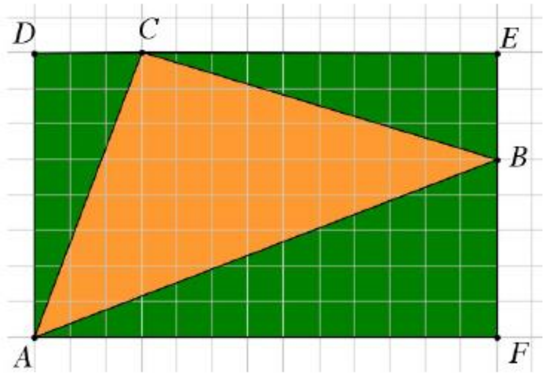

Le résultat est encore valable pour un triangle à condition que l'un des côtés contienne au moins trois points de la grille.

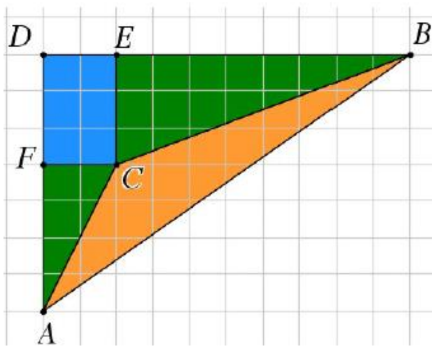
**2.** Considérons un triangle *ABC* non rectangle ni en *B* ni en *C* dont le côté (*BC*) est parallèle à un axe. Sans diminuer la généralité, on peut supposer que cet axe est l'axe *Ox*.

Soit *H* le pied sur (*BC*) de la hauteur issue de *A*.

| | |
|---|---|
| *Premier cas de figure*<br>Supposons que les angles de sommets *B* et *C* soient tous deux aigus. Considérons le découpage du triangle *ABC* en deux triangles *ABH* et *ACH*. Ce sont des triangles rectangles dont les côtés sont parallèles aux axes. En vertu de la **question B2**, ils sont de Pick. Dans ce cas [*BC*] contient au moins trois points de la grille, dont le point *H*, et le NB de la **question 1** s'applique (même si le triangle *ABC* est un polygone qui n'a pas « au moins quatre sommets »). Donc en vertu de la **question 1.b**, *ABC* est de Pick. |  |
| *Deuxième cas de figure*<br>L'un des angles de sommets *B* ou *C* (par exemple de sommet *B*) est obtus. Le point *H* est extérieur à [*BC*]. Considérons le découpage du triangle *ACH* en deux triangles *ABH* et *ABC*. En vertu de la **question B2**, *ACH* et *ABH* sont de Pick Le côté [*CH*] du triangle *ACH* contient au moins trois points de la grille, dont le point *B,* et le NB de la **question 1** s'applique (même si le triangle *ACH* est un polygone qui n'a pas « au moins quatre sommets »). Donc en vertu de la **question 1.c**, *ABC* est de Pick. |  |

**3.** Lorsque *ABC* est un triangle quelconque, en traçant des droites parallèles aux axes passant par ses sommets, on détermine un rectangle et un découpage dont *ABC* est un des éléments et dans lequel les théorèmes **C.1.b** et **C.1.c** s'appliquent. Nous laissons le lecteur détailler les deux cas de figure qui se présentent :






**4.** Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ : « Tout polygone simple à *n* sommets est un polygone de Pick ». Démontrons cette propriété par récurrence.

**Initialisation :** La **question 3** montre que tout triangle simple est un polygone de Pick : la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n = 3$.

**Hérédité :** Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée pour un certain entier $n \geq 3$. Soit *P* un polygone simple quelconque à $n + 1$ sommets. Ce polygone admet au moins quatre sommets. Soit $A_1$, $A_2$ et $A_3$ trois sommets consécutifs (non alignés) de ce polygone. Soit *P'* le polygone constitué par $A_1$, $A_3$ et les autres sommets du polygone *P* (sans le sommet $A_2$).

Ce polygone *P'* est un polygone à *n* sommets : d'après l'hypothèse de récurrence, il est de Pick.

Le triangle $A_1A_2A_3$ en tant que triangle simple est de Pick.

- Si l'angle $\widehat{A_1A_2A_3}$ est saillant, le segment $[A_1A_3]$ découpe le polygone *P* en deux polygones *P'* et $A_1A_2A_3$ tous deux de Pick. En vertu de la **question C.1.b**, Le polygone *P* est de Pick.
- Si l'angle $\widehat{A_1A_2A_3}$ est rentrant, le segment $[A_1A_3]$ découpe le polygone *P'* est de Pick et est découpé en deux polygones, le polygone *P* et $A_1A_2A_3$ qui est de Pick. En vertu de la **question C.1.c**, Le polygone *P* est de Pick.

Quel que soit le cas de figure, *P* est de Pick. Ainsi : $\mathcal{P}_n \implies \mathcal{P}_{n+1}$, la propriété $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

**Conclusion :** Etant héréditaire et initialisée au rang 3, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier au moins égal à 3.

Tout polygone simple à *n* sommets ($n \geq 3$) est un polygone de Pick.

NB. A propos du « théorème de Pick », on trouvera un problème sur ce thème en consultant la page suivante (rubrique « Mathématiques générales ») : https://gjmaths.fr/index.php/ecrit-1/

# Exercice 3 : Persistance multiplicative

## Partie A : Quelques exemples

L'algorithme « prodchif » renvoie le produit des chiffres d'un nombre entier et l'algorithme « persist » calcule la persistance d'un nombre entier et affiche le nombre résiduel.

<table>
<tr>
<td>

```
>>> def prodchif(n):
        p=1
        while n>1:
                c=n%10
                n=(n-c)//10
                p=p*c
        return p

>>> prodchif(37)
21
>>> prodchif(5425)
200
```

</td>
<td>

```
>>> def persist(n):
        ps=0
        m=n
        while m>10:
                m=prodchif(m)
                ps=ps+1
        print("L'entier",n,"admet une persistance de longueur",ps,
"il persiste le nombre",m)


>>> persist(326)
L'entier 326 admet une persistance de longueur 3 il persiste le no
mbre 8
>>> persist(14732)
L'entier 14732 admet une persistance de longueur 4 il persiste le
nombre 6
```

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Cette mouture détaille les étapes menant à la persistance multiplicative d'un entier. Elle est appliquée à divers entiers rencontrés au fil de l'exercice.

</td>
<td>

```
>>> def detailpersist(n):
        ps=0
        m=n
        while m>10:
                p=prodchif(m)
                print("produit des chiffres de",m,"égal à",p)
                m=p
                ps=ps+1
        print("longueur de persistance égale à",ps)


>>> detailpersist(326)
produit des chiffres de 326 égal à 36
produit des chiffres de 36 égal à 18
produit des chiffres de 18 égal à 8
longueur de persistance égale à 3
>>> detailpersist(154)
produit des chiffres de 154 égal à 20
produit des chiffres de 20 égal à 0
longueur de persistance égale à 2
>>> detailpersist(2646)
produit des chiffres de 2646 égal à 288
produit des chiffres de 288 égal à 128
produit des chiffres de 128 égal à 16
produit des chiffres de 16 égal à 6
longueur de persistance égale à 4
>>> detailpersist(14732)
produit des chiffres de 14732 égal à 168
produit des chiffres de 168 égal à 48
produit des chiffres de 48 égal à 32
produit des chiffres de 32 égal à 6
longueur de persistance égale à 4
```

</td>
</tr>
</table>

**1.** $\begin{cases} 1\times 4\times 7\times 3\times 2 = 168 \\ 1\times 6\times 8 = 48 \\ 4\times 8 = 32 \\ 3\times 2 = 6 \end{cases}$. Il faut quatre étapes pour obtenir la persistance multiplicative de 14732.

**2.** Du fait que le produit des deux premiers chiffres du nombre 28? Est déjà égal à 16, qui a une persistance de longueur 2, il faut que le chiffre des unités soit 0 pour obtenir un nombre dont la persistance a pour longueur 1. Un petit algorithme Python, déterminant systématiquement les persistances de tous les nombres 28? peut finir de nous en convaincre :

```
>>> def question2():
        for k in range(0,10):
            persist(280+k)

>>> question2()
L'entier 280 admet une persistance de longueur 1 il persiste le nombre 0
L'entier 281 admet une persistance de longueur 2 il persiste le nombre 6
L'entier 282 admet une persistance de longueur 2 il persiste le nombre 6
L'entier 283 admet une persistance de longueur 3 il persiste le nombre 6
L'entier 284 admet une persistance de longueur 3 il persiste le nombre 8
L'entier 285 admet une persistance de longueur 2 il persiste le nombre 0
L'entier 286 admet une persistance de longueur 4 il persiste le nombre 0
L'entier 287 admet une persistance de longueur 2 il persiste le nombre 2
L'entier 288 admet une persistance de longueur 3 il persiste le nombre 6
L'entier 289 admet une persistance de longueur 3 il persiste le nombre 6
```

**3.** Le nombre 79 formé par les deux premiers chiffres de 79?? a une persistance de longueur 3, car le produit de ses chiffres est égal à 63, dont le produit des chiffres est égal à 18, dont le produit des chiffres est égal à 8. Pour obtenir un entier 79?? dont la longueur de persistance est égal à 2, il s'agit de trouver un multiple de 63 dont la longueur de persistance est égale à 1 (c'est-à-dire dont le produit des chiffres est un nombre à un seul chiffre). Nous pouvons choisir 7918 ou 7924 dont le produit des chiffres est égal à 504, ou bien aussi 7925 ou 7945 dont le produit des chiffres est un multiple de 10.

Un petit algorithme Python nous donne divers exemples :

```
>>> def persist(n):
        ps=0
        m=n
        while m>10:
                m=prodchif(m)
                ps=ps+1
        return ps

>>> def question3(r):
        u=0
        k=0
        while u<r:
                k=k+1
                if persist(7900+k)==2:
                        u=u+1
                        print("L'entier",7900+k,"a une persistance
de longueur 2")
```

```
>>> question3(2)
L'entier 7918 a une persistance de longueur 2
L'entier 7924 a une persistance de longueur 2
>>> question3(5)
L'entier 7918 a une persistance de longueur 2
L'entier 7924 a une persistance de longueur 2
L'entier 7925 a une persistance de longueur 2
L'entier 7928 a une persistance de longueur 2
L'entier 7938 a une persistance de longueur 2
>>> question3(10)
L'entier 7918 a une persistance de longueur 2
L'entier 7924 a une persistance de longueur 2
L'entier 7925 a une persistance de longueur 2
L'entier 7928 a une persistance de longueur 2
L'entier 7938 a une persistance de longueur 2
L'entier 7939 a une persistance de longueur 2
L'entier 7942 a une persistance de longueur 2
L'entier 7944 a une persistance de longueur 2
L'entier 7945 a une persistance de longueur 2
L'entier 7946 a une persistance de longueur 2
```

**4.a.** $\begin{cases} 1 \times 5 \times 4 = 20 \\ 2 \times 0 = 0 \end{cases}$. La persistance multiplicative de 154 a pour longueur 2.

**4.b.** On peut rechercher des entiers dont le produit des chiffres a pour persistance 1. Divers exemples ci-contre.

```
>>> def question4b(r):
        u=0
        k=100
        while u<r:
                k=k+1
                if persist(k)==2:
                        print("L'entier",k,"a pour persistance 2")
                        u=u+1


>>> question4b(2)
L'entier 126 a pour persistance 2
L'entier 127 a pour persistance 2
>>> question4b(8)
L'entier 126 a pour persistance 2
L'entier 127 a pour persistance 2
L'entier 128 a pour persistance 2
L'entier 129 a pour persistance 2
L'entier 134 a pour persistance 2
L'entier 135 a pour persistance 2
L'entier 136 a pour persistance 2
L'entier 137 a pour persistance 2
```

**4.c.** Il suffit de choisir un entier dont le produit des chiffres est un multiple de 10. Par exemple $\underbrace{99\ldots.9}_{n\text{ chiffres}}52$

Le produit de ses chiffres étant un multiple de 10, le chiffre de ses unités est 0 et le produit des chiffres de ce nombre est égal à 0.

$\begin{cases} 2 \times 6 \times 4 \times 6 = 288 \\ 2 \times 8 \times 8 = 128 \\ 1 \times 2 \times 8 = 16 \\ 1 \times 6 = 6 \end{cases}$ Le nombre 2646 a une persistance multiplicative de longueur 4.

Sachant que sa décomposition en produit de facteurs premiers est $2 \times 3^2 \times 7^2$, il est le produit des chiffres des nombres 23377 ou 77332 (entre autres exemples). Ces entiers ont une persistance multiplicative de longueur 5.

## Partie B : recherche d'antécédents

| | |
|---|---|
| **1.** La décomposition en produit de facteurs premiers de 1000 est : $1000 = 2^3 \times 5^3$. Le nombre 1000 est le produit des chiffres des nombres 222555 ou 252525 (entre autres exemples). Chose que confirme l'algorithme « prodchif ». | `>>> prodchif(222555)`<br>`1000`<br>`>>> prodchif(252525)`<br>`1000` |

**2.** $154 = 2 \times 7 \times 11$. En raison de la présence dans cette décomposition du facteur premier 11, qui n'est pas un chiffre en numération décimale, le nombre 154 ne peut pas être le produit des chiffres d'un nombre.

154 n'a aucun antécédent par la fonction *p*.

**3.** De façon générale, soit *N* un nombre entier naturel. Si dans sa décomposition en produit de facteurs premiers figure un facteur premier supérieur ou égal à 11, alors *N* ne peut pas être le produit des chiffres d'un nombre, il n'a aucun antécédent par la fonction *p*.

## Partie C : Comparaison des produits successifs

**1.** Soit $N = a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$ un entier, conformément aux notations de l'énoncé. C'est-à-dire que $1 \leq a_m \leq 9$ et $0 \leq a_k \leq 9$ pour tout indice *k* tel que $0 \leq k \leq m - 1$.

Alors le produit de ses chiffres est : $p(N) = a_m \times a_{m-1} \times \ldots \times a_1 \times a_0$

Le produit de ses chiffres $p(N) = a_m \times (a_{m-1} \times \ldots \times a_1 \times a_0)$ est le produit de l'entier $a_m$ et du nombre *N'* tel que $N' = a_{m-1} \times \ldots \times a_1 \times a_0$.

Ce nombre *N'* est le produit des *m* nombres entiers naturels $a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0$ qui sont tous, par hypothèse, inférieurs ou égaux à 9 puisque ce sont des chiffres en numération décimale. Par conséquent : $N' \leq \underbrace{9 \times \ldots \times 9 \times 9}_{m \text{ facteurs}} = 9^m$.

Nous obtenons : $p(N) \leq a_m \times 9^m$

**2.** En ce qui concerne l'entier $N$ : $N = a_m \times 10^m + (a_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots + 10a_1 + a_0) \geq a_m \times 10^m$ car l'entier $a_{m-1} \times 10^{m-1} + \cdots + 10a_1 + a_0$ est un entier naturel.

Or nous avons l'inégalité stricte : $a_m \times 10^m > a_m \times 9^m$ car nous avons affaire à des puissances strictement positives des entiers 10 et 9 : $10^m > 9^m$

Nous en déduisons : $N \geq a_m \times 10^m > a_m \times 9^m \geq p(N)$ .

Finalement si $N$ est un entier $\geq 10$ : $N > p(N)$

**3.** L'itération du « produit des chiffres » tant que ce produit est supérieur ou égal à 10 (tant qu'il s'écrit avec au moins deux chiffres) permet de construire une suite de nombres entiers naturels strictement décroissante.

Or une suite d'entiers naturels strictement décroissante est nécessairement une suite finie. On peut affirmer qu'après un nombre fini d'itérations, on obtient toujours un produit de chiffres strictement inférieur à10.

Tout entier supérieur ou égal à 10 a une persistance multiplicative.

## Partie D : Majoration de la longueur de la puissance multiplicative.

**1.** *Question corrigée dans son ensemble (coquille dans l'énoncé de la* ***question 1.a.****)*

- D'une part : $0 \leq p(N) \leq a_m \times 9^m$.
- D'autre part : $N \geq a_m \times 10^m > 0$.

La multiplication membre à membre de deux inégalités entre nombres positifs est légitime et conserve le sens des inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leq p(N) \leq a_m \times 9^m \\ 0 < \dfrac{1}{N} \leq \dfrac{1}{a_m \times 10^m} \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \frac{p(N)}{N} \leq \frac{a_m \times 9^m}{a_m \times 10^m} = \frac{9^m}{10^m} = \left(\frac{9}{10}\right)^m$$

En conclusion : $0 \leq \frac{p(N)}{N} \leq \left(\frac{9}{10}\right)^m$

| | |
|---|---|
| **2.** Un algorithme Python nous permet de répondre à cette question. | `>>> def major(e):`<br>`        q=0`<br>`        while (9/10)**q>e:`<br>`            q=q+1`<br>`        print("La puissance",q-1,"ème de 9/10 est égale à",(9/10)**(q-1))`<br>`        print("La puissance",q,"ème de 9/10 est égale à",(9/10)**q)`<br>`        print("L'entier recherché est l'entier",q)`<br><br>`>>> major(1/10)`<br>`La puissance 21 ème de 9/10 est égale à 0.10941898913151242`<br>`La puissance 22 ème de 9/10 est égale à 0.09847709021836118`<br>`L'entier recherché est l'entier 22` |

**3.** Soit *N* un entier qui s'écrit avec 23 chiffres :

$$N = a_{22} \times 10^{22} + a_{21} \times 10^{21} + \cdots + 10a_1 + a_0$$

Sa persistance multiplicative est égale à celle de $p(N)$ augmentée d'une unité.

Nous pouvons appliquer le résultat de la question 1 de cette partie avec $m = 22$ : $0 \leq \frac{p(N)}{N} \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{22}$

D'après le résultat de la question 2 de cette partie : $\left(\frac{9}{10}\right)^{22} \leq \frac{1}{10}$. Donc : $0 \leq \frac{p(N)}{N} \leq \frac{1}{10}$

Nous en déduisons l'inégalité : $0 \leq p(N) \leq \frac{N}{10}$, inégalité qui prouve que $p(N)$ s'écrit avec au plus un chiffre de moins que *N* lui-même, donc au plus avec 22 chiffres.

D'après le résultat admis, la persistance multiplicative de $p(N)$ est au plus égale à 24 (son nombre de chiffres plus 2).

Si *N* est un entier qui s'écrit avec 23 chiffres, sa persistance multiplicative est au plus égale à 25.

**3.** Démontrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(k)$ : « un majorant de la persistance multiplicative d'un entier qui s'écrit avec *k* chiffres est le nombre $(k+2)$ » est vraie pour tout entier naturel *k*.

**Initialisation** : Cette propriété est admise pour tout entier *k* tel que $k \leq 22$ et nous avons démontré que, si elle était vraie pour l'entier 22, alors elle était vraie aussi pour l'entier 23.

**Hérédité :** Supposons que cette propriété est vraie pour un certain entier $k \geq 22$. Supposons que la persistance multiplicative d'un entier qui s'écrit avec *k* chiffres est inférieure ou égale à $(k+2)$

Soit *N* un entier qui s'écrit avec $(k+1)$ chiffres : $a_0$ ; … ; $a_k$

Sa persistance multiplicative est égale à celle de $p(N)$ augmentée d'une unité.

Nous pouvons appliquer le résultat de la question 1 de cette partie avec $m = k$ : $0 \leq \frac{p(N)}{N} \leq \left(\frac{9}{10}\right)^k$

Or, $k \geq 22 \quad \Longrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^k \leq \left(\frac{9}{10}\right)^{22} \leq \frac{1}{10}$. Donc : $0 \leq \frac{p(N)}{N} \leq \frac{1}{10}$

Nous en déduisons l'inégalité : $0 \leq p(N) \leq \frac{N}{10}$, inégalité qui prouve que $p(N)$ s'écrit avec au plus un chiffre de moins que *N* lui-même, donc au plus avec *k* chiffres. D'après l'hypothèse de récurrence, la persistance multiplicative de $p(N)$ est au plus égale à $(k+2)$. Donc, celle de *N* est au plus égale à $(k+2)+1$, c'est-à-dire à $(k+1)+2$. Ainsi : $\mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$. La propriété est héréditaire à partir du rang 22.

**Conclusion :** La propriété $\mathcal{P}(k)$ est admise jusqu'au rang 22 (rang permettant d'initialiser le processus de récurrence) et héréditaire à partir du rang 22, elle est donc vraie pour tout entier naturel *k* :

Un majorant de la persistance multiplicative d'un entier qui s'écrit avec *k* chiffres est le nombre $(k+2)$