Renards et campagnols : autour de l'exercice 4 du sujet de bac terminale S spécialité Amérique du Nord 2018

L'histoire de 120 renards et de 2 millions de campagnols…
Il paraîtrait qu'un seul renard nord-américain peut détruire jusqu'à 10000 campagnols par an. Les goupils auxquels nous avons affaire ici sont plus sobres, ils se « contentent » chacun de 2000 campagnols environ. Les données de cet exercice sont tout à fait pertinentes.

La partie A de ce problème propose une modélisation « simple ». La partie B est beaucoup plus intéressante, bien que le travail réellement proposé aux candidats y soit d'un niveau mathématique oscillant entre le Cycle 2 et le Cycle 4.

Compte tenu de l'intérêt de la modélisation faisant l'objet de cette partie B, il serait dommage de passer à côté d'une étude mathématique plus poussée. Le niveau requis pour cela est celui d'un élève de l'ancienne terminale C, filière dont il reste quelques nostalgiques (j'en fais partie,) avant son lâche assassinat perpétré jadis de sang froid par les hommes de main du Ministère de l'Education Nationale de l'époque.

1. Le sujet résumé

Dans une région, on s'intéresse à la cohabitation de deux espèces animales : les campagnols et les renards, les renards étant les prédateurs des campagnols. Au 1er juillet 2012, on estime qu'il y a dans cette région approximativement deux millions de campagnols et cent vingt renards.
On note u_n le nombre de campagnols et v_n le nombre de renards au 1er juillet de l'année $2012+n$

Partie A

On suppose dans cette partie que $\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}1u_n - 2000v_n \\ v_{n+1} = 2\times 10^{-7}u_n + 0{,}6v_n \end{cases}$. *C'est-à-dire que le nombre de campagnols mangés par les renards est proportionnel au nombre de renards, tandis que le nombre de naissances de renards est proportionnel au nombre de campagnols. On conclut à une stabilisation à long terme des deux populations, 1870000 campagnols environ et 90 renards à quelques unités près. Je ne corrige pas cette partie, d'ailleurs l'énoncé tient lieu de corrigé tant il y a de résultats admis ou donnés.*

Partie B

Dans la réalité, on observe que si le nombre de renards a suffisamment baissé, alors le nombre de campagnols augmente à nouveau, ce qui n'est pas le cas avec le modèle précédent. On construit donc un autre modèle, plus précis, qui tient compte de ce type d'observations à l'aide des relations suivantes :

$\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}1u_n - 0{,}001\times u_n\times v_n \\ v_{n+1} = 2\times 10^{-7}u_n + 2\times 10^{-7}\times u_n\times v_n \end{cases}$ pour tout entier $n\geq 0$ et $u_0 = 2000000$; $v_0 = 120$

Suivent une copie de 25 lignes de tableur (les ACCA nord-américaines arrivent à prévoir combien il y aura de campagnols à un près ; par exemple, en 2024, il y en aura 2 259 109, le dernier, heureusement pour lui, ayant été « arrondi à l'unité ». Sinon, il serait peut-être cul-de-jatte). Cette copie d'écran est suivie de questions anodines.

Les relations de récurrence s'écrivent, de façon équivalente pour des populations non nulles :

$$\begin{cases} \dfrac{u_{n+1}-u_n}{u_n} = 0{,}1 - 0{,}001 v_n & (1) \\ \dfrac{v_{n+1}-v_n}{v_n} = -0{,}4 + 2\times 10^{-7} u_n & (2) \end{cases}.$$

La relation (1) exprime le taux de variation de la population des campagnols.

- Le coefficient 0,1 est le taux d'accroissement naturel de cette population dû à la natalité en l'absence de prédateurs (augmentation au rythme de 10 % par an).
- Le terme $-0{,}001 v_n$ exprime que le *taux de mortalité* (et non le nombre de tués) est proportionnel à la population des renards, un renard exterminant 0,1 % de la population de campagnols.

La relation (2) exprime le taux de variation de la population des renards.

- Le coefficient $-0{,}4$ est le taux de mortalité naturel de cette population (40 % des renards meurent dans l'année).
- Le terme $2\times 10^{-7} v_n$ exprime que le *taux de natalité* (et non le nombre de naissances) est proportionnel à la population des campagnols, 50000 campagnols permettant un taux de natalité équivalent à 1 % de la population des renards.

Il existe un état stable non nul : $(u = 2000000\ ;\ v = 100)$. Dans ces conditions, la natalité naturelle des campagnols aurait tendance à augmenter la population de campagnols de 200000 unités, mais chacun des 100 renards présents sur ce territoire extermine 2000 campagnols par an : les comptes s'équilibrent.

Il s'agit là d'un exemple de modèle « proies / prédateurs » dit « modèle de Lotka-Volterra », modèle cité explicitement comme exemple dans les documents d'accompagnement des programmes, qui me paraît du plus haut intérêt pour un candidat au CAPES.

2. Une étude mathématique de ce modèle

En premier lieu, changeons d'unités. On dénombrera désormais les campagnols en millions et les renards en centaines d'unités.

- Les conditions initiales sont ainsi : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1{,}2 \end{cases}$
- Les relations de récurrence deviennent : $\begin{cases} u_{n+1} = 1{,}1 u_n - 0{,}1\, u_n \times v_n \\ v_{n+1} = 0{,}6 v_n + 0{,}2\, u_n \times v_n \end{cases}$.

Il existe un état stable non nul, l'état $(u = 2\ ;\ v = 1)$.

Pour étudier l'évolution de ces deux populations, on va poser pour tout entier n : $x_n = u_n - 2\ ;\ y_n = v_n - 1$.

Ces suites auxiliaires représentent l'écart des populations de campagnols et de renards avec celles de l'état stable. Les conditions initiales sont : $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0{,}2 \end{cases}$. Dans la situation initiale, la population des campagnols est à l'équilibre, mais il y a une surpopulation de renards.

1. Pour tout entier naturel *n*, exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.

On va se proposer d'étudier une approximation de ce qu'il se passe pour des situations proches de l'équilibre.

Pour cela, on ne tient pas compte des termes produit $x_n \times y_n$ dans les relations de récurrence que l'on vient d'établir, en les considérant comme négligeables relativement aux termes linéaires.

On convient de retenir comme relations de récurrence d'approximation les relations : $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0{,}2\, y_n \\ y_{n+1} = 0{,}2\, x_n + y_n \end{cases}$

c'est-à-dire matriciellement : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

On note *A* la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$.

Par une récurrence évidente, il apparaît que pour tout entier naturel *n* : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$.

Un enjeu majeur est de parvenir à calculer A^n.

On pose : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Avec ces notations : $A = I + 0{,}2\, R$

2. Calcul de la puissance *n*-ième de la matrice *A*, un premier résultat.

2.1. Calculer les matrices R^2 ; R^3 ; R^4 .

2.2. Vérifier que la suite de matrices $\left(R^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite périodique que l'on précisera.

2.3. Montrer que pour tout entier naturel *n* :

$$A^n = \left(\sum_{0\le 4k\le n} \binom{n}{4k} (0{,}2)^{4k} - \sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+2} (0{,}2)^{4k+2} \right) I + \left(\sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+1} (0{,}2)^{4k+1} - \sum_{3\le 4k+3\le n} \binom{n}{4k+3} (0{,}2)^{4k+3} \right) R$$

Il reste à condenser ces expressions en sigma …

3. Des expressions condensées des sommes sigma dans un cas plus général.

Soit *x* un nombre réel strictement positif. On considère le nombre complexe : $z = 1 + \mathbf{i}\, x$

3.1. En utilisant la formule du binôme, développer : $z^n = (1+\mathbf{i}\, x)^n$

3.2. On pose :
$$\begin{cases} a_n(x) = \displaystyle\sum_{0\le 4k\le n} \binom{n}{4k} x^{4k} - \sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+2} x^{4k+2} \\ b_n(x) = \displaystyle\sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+1} x^{4k+1} - \sum_{3\le 4k+3\le n} \binom{n}{4k+3} x^{4k+3} \end{cases}$$
. Vérifier que : $z^n = a_n(x) + \mathbf{i}\, b_n(x)$

3.3. Mettre *z* sous forme trigonométrique. On note $\rho(x)$ son module et $\theta(x)$ l'un de ses arguments. Exprimer $a_n(x)$ et $b_n(x)$ en fonction de $\rho(x)$ et de $\theta(x)$.

4. Une expression condensée de la puissance *n*-ième de la matrice *A* et ce qu'il s'ensuit.

On note : $\theta = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1{,}04}}\right)$. En exploitant les résultats de la question précédente :

4.1. Vérifier que : $A^n = \dfrac{1}{\sqrt{1{,}04}^{\,n}} \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}$

4.2. Expliciter, de façon condensée, x_n et y_n .

5. Conclusions

5.1. Déterminer, selon ce modèle, le plus petit entier *n* strictement positif tel que $y_n < 0$.

5.2. Déterminer, selon ce modèle, le plus petit entier *n* strictement positif tel que $x_n > 0$.

5.3. Ce modèle peut-il fonctionner sur un long terme ?

3. Eléments de correction

1. Les suites auxiliaires dont il est question sont définies par les conditions initiales $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0{,}2 \end{cases}$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} x_{n+1} + 2 = 1{,}1(x_n + 2) -_{gj} 0{,}1 \times (x_n + 2) \times (y_n + 1) = x_n - 0{,}2\, y_n - 0{,}1\, x_n \times y_n \\ y_{n+1} + 1 = 0{,}6(y_n + 1) +_{gj} 0{,}2(x_n + 2) \times (y_n + 1) = 0{,}2\, x_n + y_n - 0{,}2\, x_n \times y_n \end{cases}$$

c'est-à-dire les relations : $_{gilbertjulia2018} \begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0{,}2\, y_n - 0{,}1\, x_n \times y_n \\ y_{n+1} = 0{,}2\, x_n + y_n - 0{,}2\, x_n \times y_n \end{cases}$

Je ne connais pas de méthode permettant d'expliciter les expressions de x_n et y_n sous ses hypothèses.

Généralement, on étudie une approximation de ce qu'il se passe pour des situations proches de l'équilibre.

Pour cela, on ne tient pas compte des termes produit $x_n \times y_n$ dans les relations de récurrence, en les considérant comme négligeables relativement aux termes linéaires.

On retient ici comme relations de récurrence d'approximation les relations : $\begin{cases} x_{n+1} = x_n - 0{,}2\, y_n \\ y_{n+1} = 0{,}2\, x_n + y_n \end{cases}$ c'est-à-dire, matriciellement : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} =_{gj} \begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$

On pose $A =_{gj} \begin{pmatrix} 1 & -0{,}2 \\ 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$; $I =_{gj} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $R =_{gj} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Avec ces notations : $A = I + 0{,}2\, R$

Pour tout entier naturel n : $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} =_{gj} A^n \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et la question majeure est maintenant d'expliciter $A^n = (I + 0{,}2\, R)^n$.

2. On note que R est la matrice de la rotation vectorielle d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$ et que cette matrice vérifie la relation $R^2 = -I$ puis la relation $R^4 = I$.
Ainsi, pour tout entier naturel k : $R^{4k} = I$; $R^{4k+1} = R$; $R^{4k+2} = -I$; $R^{4k+3} = -R$. La suite des puissances de R est une suite périodique de période 4.

$A^n = (I + 0{,}2\, R)^n = \sum_{j=0}^{j=n} \binom{n}{j} (0{,}2)^j R^j$ ce qui donne, en ordonnant suivant les valeurs des puissances de R :

$$A^n = \sum_{0 \le 4k \le n} \binom{n}{4k} (0{,}2)^{4k} I +_{gj} \sum_{1 \le 4k+1 \le n} \binom{n}{4k+1} (0{,}2)^{4k+1} R - \sum_{2 \le 4k+2 \le n} \binom{n}{4k+2} (0{,}2)^{4k+2} I - \sum_{3 \le 4k+3 \le n} \binom{n}{4k+3} (0{,}2)^{4k+3} R$$

c'est-à-dire :

$$A^n = \left(\sum_{0\le 4k\le n} \binom{n}{4k} (0{,}2)^{4k} - \sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+2} (0{,}2)^{4k+2} \right) I +_{gj} \left(\sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+1} (0{,}2)^{4k+1} - \sum_{3\le 4k+3\le n} \binom{n}{4k+3} (0{,}2)^{4k+3} \right) R$$

En posant : $\begin{cases} a_n(0{,}2) = \displaystyle\sum_{0\le 4k\le n} \binom{n}{4k} (0{,}2)^{4k} - \sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+2} (0{,}2)^{4k+2} \\ b_n(0{,}2) = \displaystyle\sum_{2\le 4k+2\le n} \binom{n}{4k+1} (0{,}2)^{4k+1} - \sum_{3\le 4k+3\le n} \binom{n}{4k+3} (0{,}2)^{4k+3} \end{cases}$ (ce qui sera conforme aux notations de la question suivante), on obtient :

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n(0{,}2) & -b_n(0{,}2) \\ b_n(0{,}2) & a_n(0{,}2) \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} =_{gj} A^n \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = 0{,}2 \begin{pmatrix} -b_n(0{,}2) \\ a_n(0{,}2) \end{pmatrix}.$$

3. Soit x un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n : $(1+\mathbf{i}\,x)^n = \displaystyle\sum_{j=0}^{j=n} \binom{n}{j} \mathbf{i}^j x^j$. Or, les puissances successives de $\mathbf{i}$ forment une suite périodique de période 4 : pour tout k entier naturel, $\mathbf{i}^{4k} = 1$; $\mathbf{i}^{4k+1} = \mathbf{i}$; $\mathbf{i}^{4k+2} = -1$; $\mathbf{i}^{4k+3} = -\mathbf{i}$

$$(1+\mathbf{i}\,x)^n = \sum_{4k\le n} \binom{n}{4k} x^{4k} + \mathbf{i} \sum_{4k+1\le n} \binom{n}{4k+1} x^{4k+1} - \sum_{4k+2\le n} \binom{n}{4k+2} x^{4k+2} -_{gj} \mathbf{i} \sum_{4k+3\le n} \binom{n}{4k+3} x^{4k+3}$$

On obtient : $(1+\mathbf{i}\,x)^n = a_n(x) + b_n(x)\mathbf{i}$ avec les notations introduites dans l'énoncé.

Ainsi : $a_n(x) = \mathrm{Re}(z^n) = \dfrac{(1+\mathbf{i}\,x)^n + (1-\mathbf{i}\,x)^n}{2}$ et : $b_n(x) = \mathrm{Im}(z^n) = \dfrac{(1+\mathbf{i}\,x)^n - (1-\mathbf{i}\,x)^n}{2\mathbf{i}}$

En mettant z sous forme trigonométrique : $1+\mathbf{i}\,x = \sqrt{1+x^2}(\cos\theta(x) + 1 + \mathbf{i}\sin\theta(x))$ où $\rho(x) =_{gj} \sqrt{1+x^2}$ est le module de z et où un argument est défini par ses lignes trigonométriques : $\begin{cases} \cos\theta(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \sin\theta(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{cases}$.

Celui des arguments qui est entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$ est $\theta(x) = \arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

Respectivement : $a_n(x) = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^n \cos n\theta(x)$ et $b_n(x) = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^n \sin n\theta(x)$

4. On applique les résultats de la question précédente avec $x = 0{,}2$.

Lorsque $x = 0{,}2$: $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1{,}04}$. Le module de z est $\dfrac{1}{\sqrt{1{,}04}}$ et une calculatrice affiche pour argument $\theta = \arg\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1{,}04}}\right) \approx 0{,}197396$ à 10^{-6} près. On retiendra que $0{,}197 < \theta < 0{,}198$.

Au final :

$$\begin{cases} x_n = -0.2\sqrt{1{,}04}^{\,n}\sin(n\theta) \\ y_n = 0.2\sqrt{1{,}04}^{\,n}\cos(n\theta) \end{cases} \quad \text{avec } \theta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1{,}04}}\right)$$

5.1 et **5.2** :

Lorsque $1 \le n \le 7$, $0 < n\theta \le \dfrac{\pi}{2}$. Les lignes trigonométriques de $n\theta$ sont toutes deux strictement positives : $x_n < 0$; $y_n > 0$.

Lorsque $8 \le n \le 15$, $\dfrac{\pi}{2} < n\theta < \pi$. Le cosinus de $n\theta$ est strictement négatif : $x_n < 0$; $y_n < 0$.

Lorsque $16 \le n \le 23$, $\pi < n\theta < \dfrac{3\pi}{2}$. Les lignes trigonométriques de $n\theta$ sont toutes deux strictement négatives : $x_n > 0$; $y_n < 0$.

Define $t=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1.04}}\right)$	*Terminé*
$\mathrm{iPart}\left(\frac{\pi}{2\cdot t}\right)$	7.
$\mathrm{iPart}\left(\frac{\pi}{t}\right)$	15.
©gilbertjulia2018	
$\mathrm{iPart}\left(\frac{3\cdot\pi}{2\cdot t}\right)$	23.
$\frac{2\cdot\pi}{t}$	31.8304
	6/99

Le plus petit entier *n* strictement positif tel que $y_n < 0$ est l'entier 8.
Le plus petit entier *n* strictement positif tel que $x_n > 0$ est l'entier 16 (il y a une différence d'une unité avec ce qu'il se passe dans le modèle non approché).

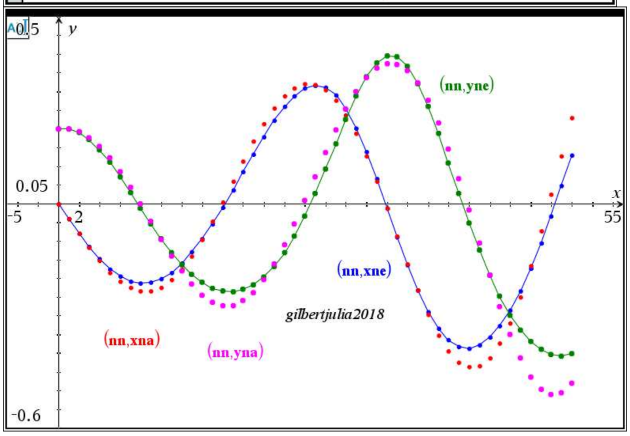
5.3. Selon ce modèle, le comportement des deux suites (x_n) et (y_n) est un comportement pseudo-périodique de pseudo-période voisine de 32. L'amplitude d'une pseudo-période est une puissance de $\sqrt{1{,}04}$, qui est un réel strictement supérieur à 1 ; la suite de ces amplitudes diverge vers plus l'infini. Ce modèle ne peut donc pas fonctionner sur du trop long terme (25 ans oui, l'approximation est bonne ; 50 ans c'est discutable et 100 ans, on va voir que c'est franchement non).

Cette copie de tableur présente les premiers termes des suites (u_n) et (v_n), puis la suite des écarts avec l'état stable. Les colonnes **xne** et **yne** proposent les écarts calculés avec les suites (u_n) et (v_n) elles-mêmes et les colonnes **xna** et **yna** les écarts calculés avec les hypothèses d'approximation.

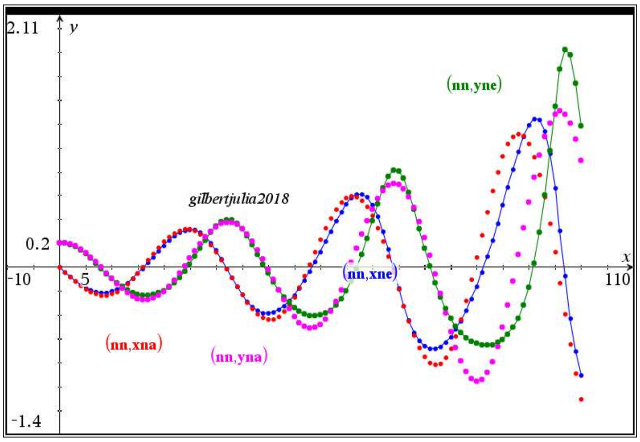
	A nn	B un	C vn	D xne	E yne	F xna	G yna	H
=	=seq(n			=un−2	=vn−1	=seq(-0.2	=||,n,0,50	
1	0	2	1.2	0	0.2	0.	0.2	gilbertjulia2018
2	1	1.96	1.2	-0.04	0.2	-0.04	0.2	
3	2	1.92	1.19	-0.079	0.19	-0.08	0.192	
4	3	1.88	1.17	-0.116	0.172	-0.118	0.176	
5	4	1.85	1.14	-0.148	0.144	-0.154	0.152	
6	5	1.83	1.11	-0.175	0.111	-0.184	0.122	
7	6	1.8	1.07	-0.195	0.072	-0.208	0.085	
8	7	1.79	1.03	-0.208	0.03	-0.225	0.043	
9	8	1.79	0.987	-0.213	-0.013	-0.234	-0.002	
10	9	1.79	0.945	-0.211	-0.055	-0.234	-0.049	

G **yna**$:=\mathrm{seq}\left(0.2\cdot\sqrt{(1.04)^n}\cdot\cos\left(n\cdot\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1.04}}\right)\right),n,0,50\right)$

Représentation graphique des suites des écarts sur une durée de 50 ans (ce qui est déjà une bien longue durée pour un modèle d'évolution …). En points reliés, les écarts calculés avec les suites (u_n) et (v_n) elles-mêmes et en points isolés les écarts calculés avec les hypothèses d'approximation.



Représentation graphique des suites des écarts sur une période de 100 ans. On observe des divergences et des aberrations (l'écart à l'équilibre de la population des renards devient à un certain moment plus petit que -1 , ce qui provoquerait l'extinction totale). Le modèle finit par être dépassé et ne reflète plus la réalité.
Mais serait-ce pertinent de projeter un modèle sur une période aussi longue ?



4. Commentaires

J'invite à regarder de près le texte original de cet exercice 4 du sujet de baccalauréat Amérique du Nord 2018 (renards et campagnols), tel qu'il a été présenté aux futurs bacheliers américains spécialité mathématiques. Il est représentatif de l'hypocrisie qui caractérise de nos jours l'enseignement des mathématiques en France.

En première lecture, la situation présentée par cet exercice est très intéressante : une situation concrète proies/prédateurs, deux modélisations de cette situation dont le modèle de Lotka-Volterra (qui figure dans les thèmes d'étude suggérés en terminale S Spé), bigre !

Regardons de plus près le travail demandé aux candidats.

Dans la partie A, à une exception près, tous les résultats significatifs sont soit admis soit donnés dans l'énoncé.

Dans la partie B, qui s'annonce pourtant très appétissante, il est question de repérer dans une copie de tableur quel est le plus petit nombre d'une collection de nombres puis de résoudre une équation qui se ramène au premier degré : un contenu mathématique façon Peanuts.

Il s'agit là d'un type d'exercice bien connu et de plus en plus répandu : un habillage très technique, voire parfois pédant, et sous cet habillage un contenu qui ne casse pas trois pattes au canard.

Sans l'ombre d'un doute, l'auteur de cet exercice avait au départ plus d'ambitions, mais je conjecture que la commission de contrôle des sujets a vidé d'une grande part de sa substance la proposition initiale, compte tenu de la nécessité absolue de proposer un baccalauréat discounté.