Ecrit 1-2024. Problème 1 : Vrai / Faux

I. Proportionnalité.

1. Faux. Le tableau proposé est un tableau de proportionnalité si et seulement si $m^2 = 25$. Il s'agit d'un tableau de proportionnalité lorsque $m = 5$ **et aussi lorsque $\boldsymbol{m = -5}$.**

(Donc oui « il suffit » que $m = 5$, mais il « ne faut pas », il n'y a pas équivalence)

2. Faux. Le coût de ce produit a été multiplié par 1,55 puis par 0,72. Il a donc été multiplié par 1,116. **Il a augmenté de 11,6 %**.

3. Faux. Le rayon a été multiplié par 1,22 et l'aire par 1,4884, le carré de 1,22. **L'aire a augmenté de 48,84 %.**

.

II. Analyse.

4. Faux. Pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;1]$: $-t^2 \geq -t$ et par conséquent $\mathbf{e}^{-t^2} \geq \mathbf{e}^{-t}$ l'égalité n'ayant lieu qu'en 0 et 1, sinon inégalité stricte. En intégrant sur l'intervalle $[0\,;1]$ on obtient l'inégalité stricte $F(1) = \int_0^1 \mathbf{e}^{-t^2} dt > \int_0^1 \mathbf{e}^{-t} dt = [-\mathbf{e}^{-t}]_0^1 = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

5. Vrai. Une intégration à l'aide d'une calculatrice formelle montre que : $$\frac{A(t)}{t^2} = t \times \left(\frac{\ln t}{3} - \frac{1}{9}\right) - \frac{1}{9t^2}$$ La limite en plus l'infini est, sans aucune indétermination, plus l'infini.	$\int_1^t \left(x^2 \cdot \ln(x)\right) dx$ $\quad \frac{t^3 \cdot \ln(t)}{3} - \frac{t^3}{9} + \frac{1}{9}$ $\text{expand}\left(\frac{\int_1^t \left(x^2 \cdot \ln(x)\right) dx}{t^2}\right)$ $\quad \frac{t \cdot \ln(t)}{3} - \frac{t}{9} + \frac{1}{9 \cdot t^2}$ ©gilbertjulia

Vu que la fonction à intégrer est positive sur l'intervalle d'intégration et qu'en outre $\ln x \geq 1$ lorsque $x \geq \mathbf{e}$, on peut aussi considérer l'inégalité (lorsque $t \geq \mathbf{e}$) : $A(t) \geq \int_{\mathbf{e}}^{t} x^2 dx = \frac{t^3 - \mathbf{e}^3}{3}$ qui permet la minoration par une fonction de limite plus l'infini en plus l'infini : $\frac{A(t)}{t^2} \geq \frac{t}{3} - \frac{\mathbf{e}^3}{3t^2}$

2

6. Vrai. « L'assertion suivante » proposée par l'énoncé est aberrante. Elle signifie que à partir d'un certain rang tous les termes de la suite sont plus grands que n'importe quel réel, ce qui n'a aucun sens. Elle est donc fausse et n'est vérifiée par aucune suite. D'après les règles de la logique cette assertion fausse implique donc ce qu'on veut (il est vrai aussi qu'une telle suite est lectrice des BD du Chat et roule en trottinette électrique).

III. Arithmétique.

7. Faux. Un nombre rationnel non décimal tel que $\frac{3}{11}$ a un développement décimal illimité (et périodique à partir d'une certaine décimale). L'énoncé nous fournit un nombre décimal qui est une valeur approchée de ce nombre mais non sa valeur exacte.

8. Faux. Contre-exemple : $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

9. Faux. C'est l'énoncé réciproque qui nous est proposé.

La contraposée est : $n\ impair \quad \Longrightarrow n^2\ impair$.

10. Faux. Il suffit de considérer le cas du nombre 3 qui est un contre-exemple.

(*NB. Il aurait été plus subtil de la part du jury de proposer « si la somme des chiffres d'un nombre est divisible par 9, alors ce nombre est divisible par 3 »)*

11. Faux. Si l'on choisit un entier *n* pair, l'implication proposée n'est pas toujours vraie. Contre-exemple : $2 \times 5 \equiv 2 \times 2 \quad (6)$ alors que $5 \not\equiv 2 \quad (6)$.

12. Faux. Contre-exemple, la somme des 2 premiers nombres impairs : $1+3=4\neq(2\times 2+1)^2$

La somme des *n* premiers nombres impairs est la somme des termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0=1$ et de raison $r=2$. Le n-ième nombre impair est $u_{n-1}=2n-1$ et la somme est : $n\times\frac{1+(2n-1)}{2}=n^2$. C'est le carré de *n*.

3

13. Vrai. Le carré d'un nombre entier non multiple de 5 est congru à 1 ou à 4 modulo 5. La somme de deux carrés d'entiers *b* et *c* non multiples de 5 est congrue à 2, ou à 3, ou à 0 modulo 5 (mais jamais ni à 1 ni à 4). Cette somme de deux carrés d'entiers non multiples de 5 n'est donc jamais égale au carré d'un nombre non multiple de 5.

Donc, si *a, b, c* sont trois entiers non multiples de 5, alors nécessairement $a^2\neq b^2+c^2$. Par contraposition, si $a^2=b^2+c^2$, alors un des trois nombres est un multiple de 5.

IV. Géométrie.

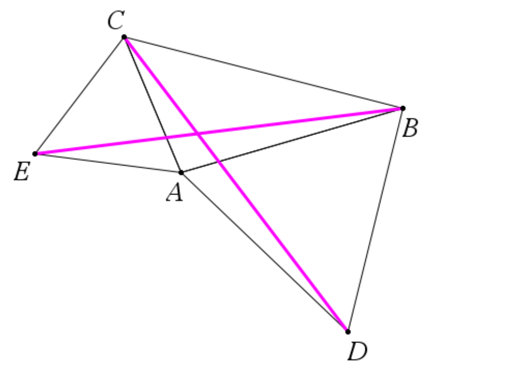
14. Vrai. On peut choisir comme unité le degré (le ratio ne dépend pas de ce choix). Les angles du triangle ont pour mesure en degrés $x, 2x, 3x$ avec *x* tel que : $x+2x+3x=180$

C'est donc que $x=30$ et $3x=90$ qui est bien la mesure d'un angle droit. Le triangle en question est rectangle.

15. Vrai. Sans restreindre la généralité, on peut supposer *ABC* de sens direct. La rotation (qui est une isométrie) de centre *A* et d'angle $\frac{\pi}{3}$ transforme *D* en *B* et *C* en *E*, donc [*DC*] et [*BE*].

En conséquence, par conservation des longueurs :

$$BE=DC$$



16. Vrai. Ces deux droites sont sécantes en leur point de paramètre -2, le point de coordonnées $(-1\,;\ 5\,;9)$. Elles sont donc coplanaires.

17. Vrai. Dans le repère considéré, *A* a pour coordonnées $(1\,;0\,;0)$, *B* a pour coordonnées $(1\,;1\,;0)$, et *G* a pour coordonnées $(0\,;1\,;1)$.

Le plan *ABG* a pour équation $x+z-1=0$ et les cordonnées de *K* vérifient cette équation.

V. Probabilités.

18. Vrai. Car l'application qui à chaque partie de *E* associe sa partie complémentaire est une bijection de l'ensemble des parties de *E* sur lui-même.

19. Vrai. Car ce nombre est $\binom{10}{3}=120$. En effet, les marches possibles sont les marches de 10 pas, « 7 vers l'Est et 3 vers le Nord ».

20. Vrai. La loi de Poisson de paramètre 8 est telle que la probabilité que le nombre d'occurrences soit égale à un entier donné *k* est : $P(X=k)=\frac{8^k}{k!}\times \boldsymbol{e^{-8}}$.

On vérifie avec une calculatrice que la somme des probabilités d'avoir 0, 1, 2 ou 3 occurrences est strictement plus petite que 0,05.	Define $p(n)=\frac{8^n\cdot e^{-8}}{n!}$ *Terminé* $p(0)+p(1)+p(2)+p(3)$ 0.04238 ©gilbertjulia

21. Vrai. Résultat classique. L'indépendance de deux évènements est équivalente à l'indépendance de leurs contraires (c'est un théorème).

22. Vrai. Soit X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la k-ième boule est dans l'urne numéro k et qui vaut 0 sinon. Alors $E(X_k) = P[X_k = 1] = \frac{1}{n}$.

Le nombre de coïncidences est égal à la somme S des variables X_k pour k allant de 1 jusqu'à n. Par la propriété d'additivité de l'espérance, l'espérance de S est la somme des espérances des X_k. Cette espérance est bien égale à $n \times \frac{1}{n} = 1$.

5

23. Faux.

Il s'agit d'un algorithme de dichotomie avec un test d'arrêt lorsque l'écart entre les deux bornes d'encadrement est suffisamment petit. Cet algorithme convient pour des fonctions strictement croissantes et traversant la valeur zéro ce qui est le cas de la fonction considérée. Cependant, l'instruction $m = \frac{a+b}{2}$ a été mal placée, elle doit être dans la boucle « while ». Ci-contre, l'algorithme corrigé. Faute de quoi, l'algorithme ne s'arrête pas.

```
>>> from math import *
>>> def f(x):
        return exp(0.5*x)+x**2-3

>>> def encadr(a,b,e):
        while b-a>e:
                m=(a+b)/2
                if f(a)*f(m)<0:
                        b=m
                else:
                        a=m
        return a,b

>>> encadr(0,2,0.001)
(1.1181640625, 1.119140625)
```

NB. Le problème 2 étudie quelques modèles d'évolution.

L'un d'entre eux faisait l'objet d'un problème proposé sur mon site, dans la page https://gjmaths.fr/index.php/ecrit-1/

Il s'agit du modèle de Lotka-Volterra, modèle décrivant une interaction proies-prédateurs.

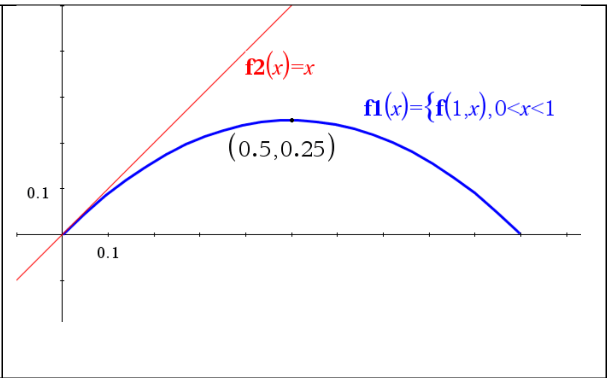
Le modèle de Verhulst, étudié dans cette même page de mon site avait lui aussi un certain rapport avec le sujet du problème 2.

Ecrit 1-2024. Problème 2 : Modèles de dynamique d’une population

6 I. Le modèle logistique discret

A. Le cas $0 < a \leq 1$

On note bien que la relation de récurrence étudiée est : $v_{n+1} = f_a(v_n)$, l’étude porte sur la notion de suite définie par son premier terme et une relation de récurrence de ce tonneau.

1. Une étude sommaire de la fonction f_1 établit que cette fonction croit sur $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ de 0 à $\frac{1}{4}$ puis décroît sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ de $\frac{1}{4}$ à 0. On en déduit que, pour toute valeur de *a* strictement positive, la fonction f_a croit sur $\left[0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$ de 0 à $\frac{a}{4}$ puis décroît sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$ de $\frac{a}{4}$ à 0	

2. La fonction f_a étant continue sur l’intervalle $[0\ ;\ 1]$, l’étude des variations précédente montre que l’image par f_a de l’intervalle $[0\ ;\ 1]$ est l’intervalle $\left[0\ ;\ \frac{a}{4}\right]$.

Lorsque $0 < a \leq 1$, nous avons $0 < \frac{a}{4} \leq \frac{1}{4}$. L’intervalle $\left[0\ ;\ \frac{a}{4}\right]$ image de l’intervalle $[0\ ;\ 1]$ par f_a est inclus dans $\left[0\ ;\ \frac{1}{4}\right]$ lui-même inclus dans l’intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Il en résulte que **l’intervalle $[0\ ;\ 1]$ est un intervalle stable par f_a.**

Cette propriété de stabilité assure que, si le premier terme v_0 appartient à l’intervalle $[0\ ;\ 1]$, alors la suite (v_n) est bien définie et tous ses termes appartiennent à ce même intervalle $[0\ ;\ 1]$.

Remarquons plus généralement que la situation étudiée a un sens lorsque $a \leq 4$. Lorsque $a > 4$, l’intervalle $[0\ ; 1]$ n’est plus un intervalle stable.

3. Supposons la suite convergente vers un réel ℓ, réel qui appartient nécessairement à $[0\ ;\ 1]$. Passons à la limite dans la relation $v_{n+1} = f_a(v_n)$ en tenant compte du fait que le passage à la limite ne dépend pas d'un décalage d'indexation :

$$\lim_{n\to+\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f_a(v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

La fonction f_a étant continue sur $[0\ ;\ 1]$, elle est en particulier continue en ℓ, et par conséquent :

$$\lim_{n\to+\infty} f_a(v_n) = f_a\left(\lim_{n\to+\infty}(v_n)\right) = f_a(\ell)$$

En fin de compte : $f_a(\ell) = \ell$

Si la suite converge, **elle ne peut converger que vers un point fixe de f_a.**

4 et 5 ensemble. Il est clair que 0 est un point fixe de f_a. Voyons s'il peut y en avoir d'autres sur l'intervalle $]0\,;1]$.

Si on considère le cas de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = x - x^2$, nous pouvons dire que :

$g_1(x) = f_1(x) - x = (x - x^2) - x = -x^2$, ce qui est toujours strictement négatif sur l'intervalle $]0\,;1]$.

Ainsi : $g_1(x) < 0$ sur l'intervalle $]0\,;1]$. Nous obtenons une inégalité stricte. Et, vu l'inégalité stricte, ceci démontre au passage qu'il n'y a pas d'autre point fixe que 0 pour la fonction f_1.

D'autre part, pour tout réel a tel que $0 < a \leq 1$ et tout réel x tel que $0 < x \leq 1$: $f_a(x) \leq f_1(x)$.

Ainsi *a fortiori* , pour $0 < a \leq 1$ et pour $0 < x \leq 1$:

$g_a(x) = f_a(x) - x \leq g_1(x) = f_1(x) - x = -x^2 < 0.$

Ainsi lorsque $0 < a \leq 1$: $g_a(x) < 0$ sur l'intervalle $]0\,;1]$. Nous obtenons une inégalité stricte.

Et, vu l'inégalité stricte, ceci démontre au passage que lorsque $0 < a \leq 1$, **il n'y a pas d'autre point fixe que 0 pour la fonction f_a.**

6. Soit a tel que $0 < a \leq 1$. Nous avons vu que tous les termes de la suite (v_n) étaient dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} - v_n = f_a(v_n) - v_n = g_a(v_n) \leq 0$

La différence de deux termes consécutifs de la suite (v_n) est toujours inférieure ou égale à 0, la suite **(v_n) est une suite décroissante**.

7. La suite (v_n) est une suite **décroissante et minorée** (par 0), **elle est convergente** et sa limite appartient à l'intervalle $[0\ ;\ 1]$. De ce fait, elle converge vers l'unique point fixe de f_a qui appartient à cet intervalle. **La suite (v_n) converge vers 0.**

8. Cette population va vers l'extinction.

B. Le cas $a = \frac{5}{2}$

La copie d'écran ci-contre regroupe les principaux résultats utiles. En particulier, on obtient que : **9.** Il y a dans l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ deux points fixes qui sont 0 et $\frac{3}{5}$. **13.** Les calculs sont délégués sans état d'âme à la calculatrice formelle qui se charge aimablement du calcul demandé.	Define $f(a,x)=a\cdot x\cdot(1-x)$ — *Terminé* $f\left(\frac{5}{2},x\right)$ — $\frac{-5\cdot x\cdot(x-1)}{2}$ $\text{solve}\left(f\left(\frac{5}{2},x\right)=x,x\right)$ — $x=0 \text{ or } x=\frac{3}{5}$ Define $h(x)=f\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2},x\right)\right)-x$ — *Terminé* ©gilbertjulia $h(x)$ — $\frac{-x\cdot(125\cdot x^3-250\cdot x^2+175\cdot x-42)}{8}$ $\text{factor}(h(x))$ — $\frac{-x\cdot(5\cdot x-3)\cdot(25\cdot x^2-35\cdot x+14)}{8}$
9 et 13. La copie d'écran ci-contre traite pareillement ces deux questions. *Il est peu productif de s'échiner à faire le calcul « à la main » pour des clopinettes. L'usage d'une calculatrice formelle est clairement un avantage.*	Define $f(x)=\frac{5\cdot x\cdot(1-x)}{2}$ — *Terminé* Define $g(x)=f(x)-x$ — *Terminé* $g(x)$ — $\frac{-x\cdot(5\cdot x-3)}{2}$ $\text{solve}(f(x)=x,x)$ — $x=0 \text{ or } x=\frac{3}{5}$ Define $h(x)=f(f(x))-x$ — *Terminé* $\text{expand}(h(x))$ — $\frac{-125\cdot x^4}{8}+\frac{125\cdot x^3}{4}-\frac{175\cdot x^2}{8}+\frac{21\cdot x}{4}$ $\text{factor}(h(x))$ — $\frac{-x\cdot(5\cdot x-3)\cdot(25\cdot x^2-35\cdot x+14)}{8}$

10. La copie d'écran ci-dessous nous indique quant à elle les quatre premiers termes de la suite suivant le terme initial en mode exact puis en valeurs approchées. Les arrondis à 10^{-3} prés de ces termes sont, dans l'ordre, **0,625 (valeur exacte) ; 0,586 ; 0,607 ; 0,597.**

NB. On arrondit par excès lorsque la quatrième décimale est 5, 6, 7, 8 ou 9 et par défaut lorsque la quatrième décimale est 0, 1, 2, 3 ou 4.

11. On constate qu'il est illusoire de vouloir proposer le calcul des termes suivants en mode exact, on a changé le réglage pour calculer ensuite à l'aide d'un algorithme écrit en langage TI-Nspire les dix premiers termes en mode approché.

Define $f(a,x)=a\cdot x\cdot(1-x)$	*Terminé*
$f\left(\frac{5}{2},x\right)$	$\frac{-5\cdot x\cdot(x-1)}{2}$
©gilbertjulia	
calcultermes(4)	
	$\left\{\frac{5}{8},\frac{75}{128},\frac{19875}{32768},\frac{1281241875}{2147483648}\right\}$
	Terminé
$\left\{\frac{5}{8},\frac{75}{128},\frac{19875}{32768},\frac{1281241875}{2147483648}\right\}$	$\{0.625,0.5859,0.6065,0.5966\}$
calcultermes(10)	
	$\{0.625,0.5859,0.6065,0.5966,0.6017,0.5992,0.6004,0.5998,0.6001,0.5999\}$
	Terminé

```
"calcultermes" enregistr. effectué
Define calcultermes(n)=
Prgm
newList(n)→v
f(5/2,1/2)→v[1]
For i,2,n
  f(5/2,v[i−1])→v[i]
  EndFor
  Disp v
EndPrgm
```

On peut conjecturer une convergence vers 0,6 avec alternativement un terme plus grand puis un terme plus petit.

12. Au lecteur de dessiner.

14. Lire la copie d'écran de la **question 13** et l'expression factorisée de $h(x)$. L'expression du second degré n'est pas factorisable (elle est toujours strictement positive), la fonction *h* admet deux zéros qui sont ceux des binômes du premier degré, soit 0 et $\frac{3}{5}$. Or, les points fixes de $f\circ f$ sont exactement les zéros de *h*. **Il s'agit des mêmes points fixes que ceux de *f*.**

15. La fonction *h* est du même signe que $-x\left(x-\frac{3}{5}\right)$, elle est donc positive ou nulle sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \frac{3}{5}\right]$, la nullité ne se produisant qu'aux extrémités.

16. La fonction $f\circ f$ intervient dans cette histoire car pour tout entier naturel *n* :

$$v_{2(n+1)}=v_{2n+2}=f(v_{2n+1})=f\big(f(v_{2n})\big)=f\circ f(v_{2n}).$$

C'est $f\circ f$ qui régit la relation de récurrence liant un terme à celui qui est deux rangs avant lui. En particulier, c'est elle qui régit les liens entre termes de rang pair de la suite entre eux si l'on fait abstraction des termes impairs.

Admettons que l'intervalle $\left[\frac{2}{5}\ ;\ \frac{3}{5}\right]$ soit un intervalle stable par $f\circ f$. Cette stabilité assure que, dès lors que le terme initial $v_0=\frac{1}{2}$ appartient à cet intervalle, tous les termes de la suite (v_n) qui sont de rangs pairs appartiennent à ce même intervalle.

Pour tout entier naturel n : $v_{2(n+1)} - v_{2n} = f \circ f(v_{2n}) - v_{2n} = h(v_{2n}) \geq 0$.

La différence de deux termes consécutifs de la suite (v_{2n}) est toujours supérieure ou égale à 0, la **suite $(\boldsymbol{v_{2n}})$ est une suite croissante**.

17. La suite (v_{2n}) est une suite **croissante et majorée** (par $\frac{3}{5}$), **elle est convergente** et sa limite appartient à l'intervalle $\left[\frac{2}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right]$. De ce fait, elle converge vers l'unique point fixe de $f \circ f$ qui appartient à cet intervalle, en l'occurrence : **la suite $(\boldsymbol{v_{2n}})$ converge vers $\boldsymbol{\frac{3}{5}}$**

18. Pour tout entier naturel n : $v_{2n+1} = f(v_{2n})$. La fonction f étant continue sur l'intervalle $[0\,;1]$ (c'est une fonction polynôme), elle est en particulier continue en $\frac{3}{5}$. En conséquence :

$$\lim_{n \to +\infty} v_{2n+1} = \lim_{n \to +\infty} \left(f(v_{2n})\right) = f\left(\lim_{n \to +\infty} v_{2n}\right) = f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

Ce qui prouve que l**a suite des termes de rangs impairs converge elle aussi vers $\boldsymbol{\frac{3}{5}}$.**

Puisque la suite des termes de rangs pairs et la suite des termes de rangs impairs convergent toutes les deux vers la même limite, la suite (v_n) est elle-même convergente et converge vers la limite commune : **la suite $(\boldsymbol{v_n})$ converge vers $\boldsymbol{\frac{3}{5}}$.**

19. On peut prévoir à long terme une stabilisation de la population autour de 60 % de sa taille théoriquement maximale. (C'est-à-dire autour de 120 % de sa valeur initiale puisque celle-ci est censée être égale à la moitié du maximum théorique).

Le modèle logistique continu

20.a. Pour tout réel z tel que $0 < z < M$:

$$\frac{1}{z(M-z)} = \frac{1}{Mz} + \frac{1}{M(M-z)}$$

Pour toute fonction y conforme aux hypothèses, c'est-à-dire de classe C^1 sur l'ensemble des réels positifs et prenant ses valeurs dans l'intervalle ouvert $]0\,; M[$:

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad y'(t) = a.y(t).\big(M - y(t)\big) \iff \forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \frac{y'(t)}{y(t).\big(M-y(t)\big)} = a$$

Soit aussi bien, en vertu de la relation précédente :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad y'(t) = a.y(t).\big(M - y(t)\big) \iff \forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \frac{y'(t)}{M.y(t)} + \frac{y'(t)}{M.\big(M-y(t)\big)} = a$$

La fonction y est bien solution de l'équation différentielle suggérée par l'énoncé avec $\alpha = \beta = \frac{1}{M}$.

20.b. Une primitive de la fonction $\psi(t) = \frac{y'(t)}{M.y(t)} + \frac{y'(t)}{M.(M-y(t))} - a$ définie sur l'ensemble des réels positifs est la fonction :

$$\Psi(t) = \frac{1}{M}\ln(y(t)) - \frac{1}{M}\ln\big(M - y(t)\big) - at$$

Laquelle peut s'écrire également :

$$\Psi(t) = \frac{1}{M}\ln\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\right) - at$$

La fonction y est solution de l'équation différentielle qui nous occupe si et seulement si la fonction grand psi ci-dessus a une dérivée nulle, c'est-à-dire si et seulement s'il s'agit d'une fonction constante, ou encore si et seulement si il existe un réel K tel que :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \frac{1}{M}\ln\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\right) - at = K$$

Cette relation équivaut à :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \ln\left(\frac{y(t)}{M-y(t)}\right) = Mat + MK$$

Autrement dit :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad \frac{y(t)}{M-y(t)} = \exp(Mat + MK)$$

Ou encore :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad y(t) = \frac{M.\exp(Mat + MK)}{1 + \exp(Mat + MK)}$$

En posant $c = \exp(MK)$, ce qui fait de *c* une constante réelle strictement positive, nous obtenons :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \qquad y(t) = \frac{Mc.\mathrm{e}^{Mat}}{1 + c.\mathrm{e}^{Mat}}$$

22. Il faut lire « quand *t* tend vers plus l'infini » et non *n*, moyennant quoi le limite est clairement *M*.

23. L'évolution à long terme est que la population est croissante mais plafonnée par son maximum théorique. Elle admet une limite finie.

Un modèle proies-prédateurs discret

24 a et b. Sans bavure : $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \times \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ et par récurrence évidente ou par un effet d'élimination télescopique, comme on le voudra, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \times \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

<table>
<tr>
<td>La matrice A de l'énoncé a été baptisée m pour éviter une collision de notations. La copie d'écran ci-contre nous livre quelques informations intéressantes.
Dans tout ce qui suit, la notation « alpha » a été changée en « a » par commodité sténographique.</td>
<td>Define $m=\begin{bmatrix} 1 & {}^-a \\ a & 1 \end{bmatrix}$ — Terminé
charPoly(m,x) — $x^2-2\cdot x+a^2+1$
©gilbertjulia
cSolve$(x^2-2\cdot x+a^2+1=0,x)$ — $x={}^-(a\cdot \boldsymbol{i}-1)$ or $x=a\cdot \boldsymbol{i}+1$
$(a\cdot \boldsymbol{i}+1)$▸Polar — $\mathbf{e}^{\boldsymbol{i}\cdot \tan^{-1}(a)}\cdot \sqrt{a^2+1}$
$\{|a\cdot \boldsymbol{i}+1|,\mathrm{angle}(a\cdot \boldsymbol{i}+1)\}$ — $\{\sqrt{a^2+1},\tan^{-1}(a)\}$
Define $d=\begin{bmatrix} a\cdot \boldsymbol{i}+1 & 0 \\ 0 & {}^-(a\cdot \boldsymbol{i}-1) \end{bmatrix}$ — Terminé</td>
</tr>
</table>

25. Cette copie d'écran nous livre le polynôme caractéristique de la matrice *A* qui est le polynôme défini par $U(x) = x^2 + 2x + a^2 + 1$ et les deux racines complexes conjuguées de ce polynôme qui sont les valeurs propres (distinctes) recherchées, à savoir :

$$\lambda = 1 + a\mathbf{i} \quad \text{et : } \mu = 1 - a\mathbf{i}$$

Nous y lisons aussi le module commun à ces deux nombres complexes : $r = |\lambda| = |\mu| = \sqrt{1 + a^2}$

Quant à un argument, la copie d'écran nous donne : $\theta = \arg(\lambda) = \tan^{-1}(\mathrm{a})=\arctan(a)$ c'est-à-dire, compte tenu de la définition de la fonction arctangente et de l'hypothèse « *a* strictement positif », un nombre réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$.

Et par conjugaison : $-\theta = \arg(\mu) = -\tan^{-1}(\mathrm{a})= -\arctan(a)$, argument opposé qui est situé dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,0\right[$.

Nous retiendrons ceux-ci. Le choix d'arguments dans $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ semble meilleur que dans $[0\,;2\pi[$, n'en déplaise à l'énoncé.

En effet, un argument de λ est un réel qui a pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ et pour sinus $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$ et un argument de μ est un réel qui a pour cosinus $\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$ et pour sinus $-\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$. Les cosinus sont strictement positifs et les sinus sont opposés et non nuls.

26. Vu que le polynôme caractéristique de *A* a deux racines simples distinctes, la matrice *A* est diagonalisable et une matrice diagonale *D* qui lui est semblable est : $D = \begin{pmatrix} 1+a\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 1-a\mathbf{i}\end{pmatrix}$.

Sa diagonale est formée des deux valeurs propres que nous avons identifiées.

Pour expliciter la similitude des matrices *A* et *D* il faut déterminer une matrice de passage *P* de la base usuelle vers une nouvelle base de vecteurs propres. Moyennant quoi, cette matrice de passage *P* vérifie la relation de similitude $A = P \times D \times P^{-1}$

27. Puisque la matrice *P* nous est généreusement fournie par l'énoncé, il n'est pas utile de « démontrer », il est suffisant de « vérifier » que les vecteurs colonnes figurant dans cette matrice *P* sont bien des vecteurs propres associés aux deux valeurs propres λ et μ.

C'est bien le cas : $A \times \begin{pmatrix}1\\-\mathbf{i}\end{pmatrix} = (1+a\mathbf{i})\times\begin{pmatrix}1\\-\mathbf{i}\end{pmatrix}$ ce qui justifie que $\begin{pmatrix}1\\-\mathbf{i}\end{pmatrix}$ est bien un vecteur propre associé à la valeur propre $1+a\mathbf{i}$ $A \times \begin{pmatrix}1\\\mathbf{i}\end{pmatrix} = (1-a\mathbf{i})\times\begin{pmatrix}1\\\mathbf{i}\end{pmatrix}$ ce qui justifie que $\begin{pmatrix}1\\\mathbf{i}\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre $1-a\mathbf{i}$	m $\quad \begin{bmatrix}1 & -a\\ a & 1\end{bmatrix}$ $m\cdot\begin{bmatrix}1\\-i\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}1+a\cdot i\\ a-i\end{bmatrix}$ $(1+a\cdot i)\cdot -i$ $\quad a-i$ ©gilbertjulia $m\cdot\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ $\quad \begin{bmatrix}1-a\cdot i\\ a+i\end{bmatrix}$ $(1-a\cdot i)\cdot i$ $\quad a+i$

La matrice *P* donnée par l'énoncé est bien la matrice de passage de la base usuelle à une base de vecteurs propres.

Sur cette copie d'écran, nous avons calculé la matrice inverse de *P* et nous avons vérifié la relation $$A = P \times D \times P^{-1}$$	Define $d=\begin{bmatrix} a\cdot i+1 & 0 \\ 0 & -(a\cdot i-1)\end{bmatrix}$ *Terminé* Define $p=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i\end{bmatrix}$ *Terminé* ©gilbertjulia p^{-1} $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\cdot i \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\cdot i\end{bmatrix}$ $p\cdot d\cdot p^{-1}$ $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ a & 1\end{bmatrix}$

28. Sans bavure : $A^n = P \times \begin{pmatrix} (1+a\mathbf{i})^n & 0 \\ 0 & (1-a\mathbf{i})^n \end{pmatrix} \times P^{-1}$ par récurrence évidente ou par un effet de produit télescopique, comme on le voudra.

29. Nous avons effectué ci-contre le calcul de $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ en utilisant la question précédente.	$p\cdot\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n\end{bmatrix}\cdot p^{-1}\cdot\begin{bmatrix} x0 \\ y0\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \lambda^n\cdot\left(\frac{x0}{2}+\frac{y0}{2}\cdot i\right)+\mu^n\cdot\left(\frac{x0}{2}-\frac{y0}{2}\cdot i\right) \\ \lambda^n\cdot\left(\frac{y0}{2}-\frac{x0}{2}\cdot i\right)+\mu^n\cdot\left(\frac{y0}{2}+\frac{x0}{2}\cdot i\right)\end{bmatrix}$ factor$\left(\begin{bmatrix} \lambda^n\cdot\left(\frac{x0}{2}+\frac{y0}{2}\cdot i\right)+\mu^n\cdot\left(\frac{x0}{2}-\frac{y0}{2}\cdot i\right) \\ \lambda^n\cdot\left(\frac{y0}{2}-\frac{x0}{2}\cdot i\right)+\mu^n\cdot\left(\frac{y0}{2}+\frac{x0}{2}\cdot i\right)\end{bmatrix},x0\right)$ $\begin{bmatrix} \frac{x0\cdot(\lambda^n+\mu^n)+(\lambda^n-\mu^n)\cdot y0\cdot i}{2} \\ \frac{x0\cdot(\mu^n-\lambda^n)\cdot i+(\lambda^n+\mu^n)\cdot y0}{2}\end{bmatrix}$ ©gilbertjulia

Compte tenu que $\begin{cases} \lambda^n = \left(r(\cos\theta + \mathbf{i}.\sin\theta)\right)^n = r^n(\cos n\theta + \mathbf{i}.\sin n\theta) \\ \mu^n = \left(r(\cos\theta - \mathbf{i}.\sin\theta)\right)^n = r^n(\cos n\theta - \mathbf{i}.\sin n\theta) \end{cases}$, nous obtenons :

$$\begin{cases} \dfrac{\lambda^n + \mu^n}{2} = r^n(\cos n\theta) \\ \dfrac{\lambda^n - \mu^n}{2} = \mathbf{i}.r^n(\sin n\theta) \end{cases}$$

Ce qui fait qu'on aboutit finalement aux expressions explicites attendues par l'énoncé.

30. La spirale géométrique traduit un effet d'oscillations d'amplitude croissante autour de valeurs de référence. L'abondance de proies entraîne la prospérité des prédateurs qui finissent par décimer les proies. Ce qui entraîne le déclin des prédateurs faute de nourriture puis une nouvelle ère d'abondance de proies. Ces déséquilibres ont tendance à s'accentuer. Cette histoire va mal finir !

31. Le calcul montre que : $$x_n^2 + y_n^2 = (x_0^2 + y_0^2) \times r^{2n}$$	Define $xn=r^n\cdot(\cos(nt)\cdot x0-\sin(nt)\cdot y0)$ *Terminé* Define $yn=r^n\cdot(\sin(nt)\cdot x0+\cos(nt)\cdot y0)$ *Terminé* xn^2+yn^2 $(x0^2+y0^2)\cdot r^{2\cdot n}$

Or, $r^{2n} = \left(\sqrt{1+a^2}\right)^{2n} = (1+a^2)^n$.

La suite de terme général $r^{2n} = (1+a^2)^n$ est une suite géométrique dont la raison est un réel strictement plus grand que 1 : cette suite diverge vers plus l'infini.

Si au moins un des x_0, y_0 n'est pas nul, le nombre $(x_0^2 + y_0^2)$ est un réel strictement positif et la suite de terme général $x_n^2 + y_n^2$ diverge vers plus l'infini.

Au moins une des deux suites (x_n) ou (y_n) n'est donc pas bornée. Si c'est le cas, la suite correspondante (u_n) ou (v_n) n'est pas bornée non plus.

Le modèle est instable, il n'est donc éventuellement pertinent que sur un temps limité mais certainement pas à long terme.

En effet, le « rayon » des spires successives de la spirale géométrique vue dans l'énoncé tend vers l'infini. Quelles que soient les valeurs de référence $\bar{u}$; $\bar{v}$, une spire finira par « sortir » du quart de plan défini par les inégalités $x > 0$; $y > 0$.

Ainsi, en raison de cette « sortie » inexorable de ce quart de plan, au bout d'un certain temps, une au moins des deux suites prendrait des valeurs négatives ou nulles ce qui représenterait l'extinction totale de l'une au moins des deux populations, le modèle devient caduc.