Suites de Beatty[1]. Théorème de Beatty. Jeu de Wythoff

NB. Dans ce sujet, on note : $x \mapsto [x]$ la fonction qui à tout réel x associe sa partie entière.

Ce problème visite les thèmes suivants :

- ***La notion de suite de Beatty associée à un nombre réel strictement positif :***

*Soit x un nombre réel strictement positif. On associe à ce nombre la suite des parties entières des multiples de ce nombre : $B(x)=([n\,x])_{n\in N^*}=\{[x];[2x];[3x];[4x];...\}$. Cette suite s'appelle la **suite de Beatty** associée à ce nombre réel.*

Par exemple, si $x=\sqrt{7}$, ses premiers multiples sont : $\sqrt{7}$; $2\sqrt{7}$; $3\sqrt{7}$; $4\sqrt{7}$;... et la suite de Beatty $B(\sqrt{7})$ qui lui est associée a pour premiers termes les parties entières de ces multiples : $b_1=2=[\sqrt{7}]$; $b_2=5=[2\sqrt{7}]_{gjulia\,2015}$; $b_3=7=[3\sqrt{7}]$; $b_4=10=[4\sqrt{7}]$;....

- ***Le théorème de Beatty :***

*On considère deux nombres irrationnels strictement positifs x et y tels que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$. Alors les deux ensembles : $B(x)=\{[n\,x]\,,n\in\mathbf{N}^*\}$ et $B(y)=\{[m\,y]\,,m\in\mathbf{N}^*\}$ **forment une partition de N***.*

- ***Le jeu de Wythoff[2] :***

Le « jeu de Wythoff » oppose deux joueurs placés devant deux piles de jetons.
À tour de rôle, chaque joueur retire un nombre (non nul) quelconque de jetons. Il peut choisir de retirer ces jetons d'une seule des deux piles, ou bien de chacune des deux piles, mais alors il doit retirer le même nombre de jetons de chaque pile.
Autrement dit, si le couple $(u,\,v)$ désigne les nombres respectifs de jetons des deux piles à un instant du jeu, ce couple devient à l'instant suivant soit $(u-k,\,v)$, soit $(u,\,v-k)$, soit $(u-k,\,v-k)$ où k est un entier supérieur ou égal à 1.
Le gagnant du jeu est celui qui prend le dernier jeton.

1. Le sujet

A. Etude d'une application.

0. *Quelques propriétés utiles de la fonction partie entière.*
0.1. Montrer que la fonction partie entière est une fonction croissante sur **R**.
0.2. Montrer que quels que soient les réels x et y : $[x]+[y]\leq[x+y]\leq[x]+[y]+1$
0.3. Montrer que $[x+y]=x+[y]$ si et seulement si x est un entier.

x étant un nombre réel strictement positif fixé, on va étudier dans cette partie quelques propriétés de la suite de Beatty associée à ce nombre. En particulier, on étudiera l'application b qui associe à chaque entier n de **N*** le terme d'indice n de la suite $B(x)$: $n\in N^* \xrightarrow{b} b(n)=[n\,x]=b_n$.

1. Montrer que la suite $B(x)$ est une suite croissante et que : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=+\infty$

[1] Samuel BEATTY (1881 – 1970), mathématicien canadien, nommé en 1934 doyen de la Faculté de Mathématiques de l'université de Toronto-Mississauga.
[2] Willem Abraham Wythoff (1865 – 1939), mathématicien hollandais, proposa et décrivit ce jeu en 1907.

2. On suppose dans cette question que $x<1$. Dans ce cas, $b(1)=[x]=0$.

2.1. Soit m un entier tel que : $m>\dfrac{1}{1-x}$. Montrer que : $b(m)\leq m-2$. En déduire que l'application b n'est pas injective.

2.2. Montrer que l'application b de **N*** vers **N** : $n\in N^* \xrightarrow{b} b(n)=[n\,x]$ est surjective.

3. On suppose dans cette question que $x>1$. Dans ce cas, $b(1)=[x]\geq 1$.

Montrer que l'application b de **N*** vers **N*** : $n\in \mathbf{N^*} \xrightarrow{b} b(n)=[n\,x]$ est injective mais n'est pas surjective.

B. Théorème de Beatty

On considère deux nombres *irrationnels* strictement positifs x et y tels que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$. Vérifiant cette relation, ils sont tous deux strictement plus grands que 1 et les applications $n\in \mathbf{N^*} \longrightarrow [n\,x]$ et $n\in \mathbf{N^*} \longrightarrow [n\,y]$ sont toutes deux injectives.

On se propose de montrer que sous ces hypothèses les deux ensembles : $B(x)=\{[n\,x]\,,n\in \mathbf{N^*}\}$ et $B(y)=\{[m\,y]\,,m\in \mathbf{N^*}\}$ forment une partition de **N***.

1. On suppose que $B(x)\cap B(y)\neq\varnothing$, c'est-à-dire qu'il existe au moins un entier strictement positif i et deux entiers m et n tels que : $i=[n\,x]=[m\,y]$. Montrer qu'alors : $m+n-1<i<m+n$. En déduire que : $B(x)\cap B(y)=\varnothing$.

2. On se propose de montrer que $B(x)=\{[n\,x]\,,n\in \mathbf{N^*}\}$ et $B(y)=\{[m\,y]\,,m\in \mathbf{N^*}\}$ recouvrent **N***.

Soit i un entier strictement positif. Cet entier est situé entre deux multiples consécutifs de x : il existe un entier k tel que : $k\,x\leq i<(k+1)x$. De même, il est situé entre deux multiples consécutifs de y : il existe un entier j tel que : $j\,y\leq i<(j+1)y$

2.1. On suppose que $i\notin B(x)$. Montrer qu'alors : $k\,x<i<k\,x+x-1$.

2.2. On suppose que $i\notin B(x)$ et que $i\notin B(y)$ non plus. Montrer qu'alors : $(k+j)<i<(k+j)+1$. Conclure.

C. Suite de Beatty associée à un nombre rationnel

Dans cette partie, on suppose que $x=\dfrac{p}{q}$ avec p et q entiers strictement positifs premiers entre eux.

1. Montrer que pour tout entier n strictement positif : $b_{n+q}=b_n+p$.

2. Montrer que l'ensemble des valeurs prises par les termes de la suite $B(x)$ est l'ensemble :

$$\left\{\left[\frac{p}{q}\right];\left[\frac{2p}{q}\right];...;\left[\frac{(q-1)p}{q}\right];p\right\}+p\mathbf{N}$$

3. Application numérique : Déterminer b_n en fonction de n lorsque : $x=\dfrac{5}{2}$ puis lorsque $x=\dfrac{5}{3}$.

4. Soient x et y deux nombres rationnels strictement positifs et tels que : $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$. Les deux ensembles : $B(x)=\{[n\,x]\,,n\in \mathbf{N^*}\}$ et $B(y)=\{[m\,y]\,,m\in \mathbf{N^*}\}$ forment-ils toujours une partition de N* ?

D. Nombre d'or et son carré, suites de Beatty et jeu de Wythoff.

1. On désigne par φ le nombre irrationnel : $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or). On rappelle que φ est l'unique réel strictement positif solution de l'équation $x^2 = x+1$. Vérifier que : $\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1$.

2.1. Déterminer à l'aide d'une calculatrice les dix premiers termes de chacune des suites de Beatty $B(\varphi)$ et $B(\varphi^2)$.

2.2. On note respectivement : $b_n = [n\varphi]$ et $c_n = [n\varphi^2]$ les termes de rang n ($n \in \mathbf{N}^*$) des suites de Beatty $B(\varphi)$ et $B(\varphi^2)$. Montrer que quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$: $c_n = b_n + n$

On s'intéresse désormais au « jeu de Wythoff ». Deux joueurs sont donc placés devant deux piles de jetons.

On note u_n le nombre de jetons de la pile la plus haute et v_n celui de la pile la moins haute au bout de n coups joués. Le couple (u_n, v_n) détermine l'état des piles à cet instant du jeu.
On note (u_0, v_0) l'état initial des deux piles (on suppose $u_0 > v_0 > 0$).

On dit que l'état (u_n, v_n) est Beatty-compatible (en abrégé « BC ») si u_n et v_n sont des termes d'un même rang des suites $B(\varphi^2)$et $B(\varphi)$ respectivement (c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que, simultanément, $u_n = c_k$ et $v_n = b_k$
Par convention, l'état $(0,0)$ qui est l'état gagnant est lui aussi considéré comme un état BC.

3. *(Exemples numériques)*

3.1. Montrer que si l'état initial est $(4,3)$, le premier joueur peut gagner la partie quel que soit le jeu de son adversaire.

3.2. Montrer que si l'état initial est $(5,3)$, le deuxième joueur peut gagner la partie quel que soit le jeu de son adversaire.

4.1. Montrer que si l'état (u_n, v_n) est BC alors l'état suivant ne l'est pas.
4.2. Montrer que si l'état (u_n, v_n) n'est pas BC alors on peut jouer de sorte que l'état suivant le soit.
4.3. En déduire une stratégie gagnante soit pour le premier joueur, soit pour le deuxième joueur (suivant l'état initial).

5. Quel coup joueriez vous pour être sûr de gagner la partie si lorsque c'est à votre tour de jouer l'état est :

5.1. $(2015,\ 1515)$

5.2. $(2015,\ 752)$

5.3. $(2015,\ 753)$

2. Eléments de correction

Partie A.

0. Par définition de la fonction partie entière, pour tout réel x : $x-1<[x]\leq x$ d'où il découle que : $[x]\leq x<[x]+1$. Supposons que x et y soient deux réels tels que : $x<y$. Alors $[x]\leq x<y$, et puisque la partie entière de y est le plus grand entier inférieur ou égal à y : $[x]\leq[y]$. Ce qui justifie la croissance de la fonction partie entière.

Soient x et y deux réels. Alors : $[x]\leq x<[x]+1$ et $[y]\leq y<[y]+1$. Donc : $[x]+[y]\leq x+y<[x]+[y]+2$.

- Puisque $[x+y]$ est un entier et qu'il est strictement inférieur à l'entier $[x]+[y]+2$, il est inférieur ou égal à $[x]+[y]+1$.
- Puisque $[x]+[y]\leq x+y$, cet entier est inférieur ou égal au plus grand entier inférieur ou égal à $x+y$, c'est-à-dire à $[x+y]$.

D'où la double inégalité $[x]+[y]\leq[x+y]\leq[x]+[y]+1$.

Si $[x+y]=x+[y]$ alors x est un entier puisque $x+[y]$ et $[y]$ sont deux entiers.
Réciproquement, si x est un entier, alors $x+y$ est encadré par les deux entiers : $x+[y]\leq x+y<x+[y]+1$ ce qui montre que $x+[y]=[x+y]$.
Cette égalité a lieu si et seulement si x est entier.

1. La croissance de la fonction partie entière implique la croissance de l'application b :
Pour tout entier strictement positif n : $(n+1)x>n\,x\Rightarrow b_{n+1}=[(n+1)x]\geq[n\,x]=b_n$

D'autre part, du fait pour tout entier strictement positif n : $b_n>n\,x-1$: $\lim\limits_{n\to+\infty}(n\,x-1)=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=+\infty$

2.1. Si $x<1$, alors : $\dfrac{1}{1-x}>0$.

Soit m un entier tel que : $m>\dfrac{1}{1-x}$. Alors $1-\dfrac{1}{m}>x$ et par conséquent : $m-1>m\,x\geq[m\,x]=b_m$. Il s'ensuit que $m-2\geq b_m$. L'ensemble des valeurs prises par les m premiers termes $\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ de la suite $B(x)$ est inclus dans l'ensemble $\{0,1,\ldots,m-2\}$ des $m-1$ premiers entiers naturels. Il y a donc au moins deux termes parmi $\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ qui sont égaux. L'application b n'est pas injective.

2.2. Pour tout entier strictement positif n : $b_{n+1}=[(n+1)x]\leq[nx]+[x]+1=b_n+1$.
Ou bien $b_{n+1}=b_n$, ou bien $b_{n+1}=b_n+1$.
Supposons maintenant qu'il existe un entier m qui ne soit l'image par b d'aucun entier. Nécessairement, $m>1$ puisque $b_1=[x]=0$. Nécessairement aussi, puisque la limite de la suite $B(x)$ est $+\infty$, il y a des termes de la suite qui sont plus grands que m. Soit parmi eux b_N le terme de plus petit indice. Alors, $b_{N-1}<m<b_N$ ce qui impliquerait que : $b_N\geq b_{N-1}+2$, l'écart entre ces deux termes serait au moins de 2 unités. Ce qui contredit le fait que ou bien $b_N=b_{N-1}$, ou bien $b_N=b_{N-1}+1$. Il n'y a donc pas d'entier naturel qui ne soit l'image par b d'aucun entier. L'application b est surjective.

3. Si $x>1$, alors pour tout entier strictement positif n : $b_{n+1}=[(n+1)x]\geq[n\,x]+[x]\geq[n\,x]+1=b_n+1$.
La suite $B(x)$ est strictement croissante et l'application b est injective.

Soit m un entier tel que : $m\geq\dfrac{1}{x-1}$. Alors $x\geq1+\dfrac{1}{m}$ et par conséquent : $m\,x\geq m+1$. Il s'ensuit que $b_m\geq m+1$. L'ensemble $\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$des m premiers termes de la suite $B(x)$ n'est pas inclus dans l'ensemble $\{1,\ 2,\ ...,\ m\}$ des m premiers entiers strictement positifs. Ces deux ensembles de même cardinal étant distincts, il y a au moins un entier de $\{1,\ 2,\ ...,\ m\}$ qui ne figure pas dans l'ensemble $\{b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m\}$. L'application b n'est pas surjective.

Partie B.

1. L'entier i vérifie : $n\,x-1<i\le n\,x$ et $m\,y-1<i\le m\,y$ et puisque x et y sont des irrationnels, il ne peut pas y avoir d'égalité : $n\,x-1<i<n\,x$ et $m\,y-1<i<m\,y$. On obtient en multipliant ces doubles inégalités l'une par x et l'autre par y : $n\,x\,y-y<i\,y<n\,x\,y$ et $m\,y\,x-x<i\,x<m\,y\,x$. En additionnant membre à membre : $(m+n)x\,y-(x+y)<i(x+y)<(m+n)x\,y$.

Mais dire que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$ revient à dire que : $x+y=x\,y$. On obtient : $(m+n)(x+y)-(x+y)<i(x+y)<(m+n)(x+y)$ et en divisant par l'entier strictement positif $x+y$: $(m+n)-1<i<(m+n)$. Or, il est impossible que l'entier i soit intercalé (strictement) entre deux entiers consécutifs. Il n'existe aucun entier commun aux deux ensembles $B(x)=\{[n\,x]\,,n\in\mathbf{N}^*\}$ et $B(y)=\{[m\,y]\,,m\in\mathbf{N}^*\}$, leur intersection est vide.

2.1. Soit i un entier strictement positif. Cet entier est encadré (strictement puisque x est irrationnel) par deux multiples consécutifs de x : il existe un entier k tel que : $k\,x<i<(k+1)x$.
Si on suppose $i\notin\{[n\,x]\,,n\in\mathbf{N}^*\}$, cela signifie que i n'est pas la partie entière de $(k+1)x$ donc que cette partie entière est au moins $i+1$: $i+1<(k+1)x$. Ainsi : $k\,x<i<k\,x+x-1$.

2.2. De même, i est entre deux multiples consécutifs de y : il existe un entier j tel que : $j\,y<i<(j+1)y$
Si on suppose $i\notin\{[m\,y]\,,m\in\mathbf{N}^*\}$, $j\,y<i<j\,y+y-1$ de la même façon.
En multipliant ces doubles inégalités l'une par x l'autre par y :
$k\,x\,y<i\,y<k\,x\,y+x\,y-y$ et $j\,y\,x<i\,x<j\,y\,x+y\,x-x$. Et en les ajoutant membre à membre :
$(k+j)x\,y<i\,(x+y)<(k+j)x\,y+2x\,y-(x+y)$
Compte tenu de la relation $x\,y=x+y$: $(k+j)(x+y)<i\,(x+y)<(k+j)(x+y)+2(x+y)-(x+y)$.
En divisant par l'entier strictement positif $x+y$ on obtient finalement : $(k+j)<i<(k+j)+1$. Or, il est impossible que l'entier i soit encadré par deux autres entiers consécutifs. Il n'est pas possible que l'entier i n'appartienne ni à $\{[n\,x]\,,n\in\mathbf{N}^*\}$ ni à $\{[m\,y]\,,m\in\mathbf{N}^*\}$. ces deux ensembles recouvrent **N*** et ont une intersection vide, ils forment une partition de **N***.

Partie C.

1. Considérons la division euclidienne de p par q : $p=a\,q+r$, avec $0\le r<q$. Alors : $x=a+\dfrac{r}{q}$.

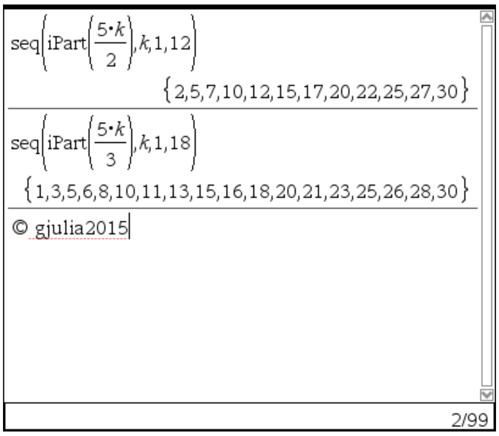
Soit n un entier strictement positif. $b_n=\left[n\left(a+\dfrac{r}{q}\right)\right]=\left[n\,a+\dfrac{n\,r}{q}\right]=n\,a+\left[\dfrac{n\,r}{q}\right]$ tandis que :

$b_{n+q}=\left[(n+q)\left(a+\dfrac{r}{q}\right)\right]=\left[(n+q)a+r+\dfrac{n\,r}{q}\right]=(n+q)a+r+\left[\dfrac{n\,r}{q}\right]$ puisque $(n+q)a+r$ est un entier.

On obtient : $b_{n+q}=n\,a+\left(a\,q+r+\left[\dfrac{n\,r}{q}\right]\right)=aq+r+b_n=p+b_n$

2. Dès lors, par récurrence évidente, pour chaque indice i tel que $i=1,\ 2,...,\ q$ et pour tout entier naturel k :

$b_{k\,q+i} = k\,p + b_i = k\,p + \left[i \times \frac{p}{q} \right]$. L'ensemble des valeurs prises par les termes de la suite $B(x)$ peut être décrit par : $\left\{ \left[\frac{p}{q} \right] ; \left[\frac{2p}{q} \right] ; ...; \left[\frac{(q-1)p}{q} \right] ; p \right\} + p\mathbf{N}$



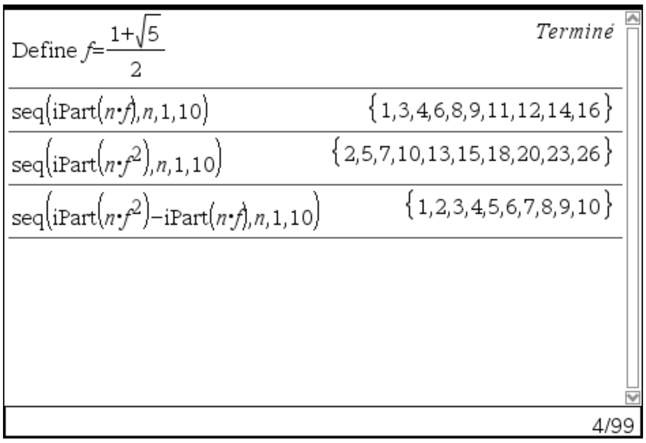
3. Lorsque $x = \frac{5}{2}$, on obtient : $b_1 = 2$; $b_2 = 5$. Dès lors, suivant la forme de l'entier n : $b_{1+2k} = 2 + 5k$; $b_{2k} = 5k$

De même, lorsque $x = \frac{5}{3}$, on obtient : $b_1 = 1$; $b_2 = 3$; $b_3 = 5$. Dès lors, suivant la forme de l'entier n :
$b_{1+3k} = 1 + 5k$; $b_{2+3k} = 3 + 5k$; $b_{3k} = 5k$.
L'écran ci-contre liste les premiers termes des deux ensembles $B\left(\frac{5}{2}\right)$ et $B\left(\frac{5}{3}\right)$

4. Les deux rationnels $x = \frac{5}{2}$ et $y = \frac{5}{3}$ sont tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. Pourtant les deux ensembles $B\left(\frac{5}{2}\right)$ et $B\left(\frac{5}{3}\right)$ ne forment pas une partition de **N***. Les multiples de 5 sont communs aux deux ensembles, tandis que les entiers de la forme $4 + 5k,\ k \in \mathbf{N}$ n'appartiennent à aucun des deux. Ce contre-exemple prouve que dans le « théorème de Beatty », l'hypothèse « x et y irrationnels » est essentielle.

Partie D.

1. L'équation $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 1$ est équivalente à l'équation : $x^2 - x - 1 = 0$ et a deux solutions, l'une négative qui est $1 - \varphi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et l'autre positive qui est bien le nombre d'or $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre φ vérifie chacune des relations : $\frac{1}{\varphi} + \frac{1}{\varphi^2} = 1$ et $\varphi^2 = 1 + \varphi$. En particulier, le nombre d'or et son carré vérifient le hypothèses du théorème de Beatty.



2.1. L'écran ci-contre affiche les dix premiers termes des deux suites de Beatty en question.

Cet écran atteste en même temps que, au moins jusqu'au rang 10, $c_n = b_n + n$ $_{gjulia2015}$

2.2. Pour tout entier n de N* : $c_n = [n\varphi^2] = [n(1+\varphi)] = [n + n\varphi] = n + [n\varphi] = n + b_n$. On remarque que la donnée de l'entier strictement positif n caractérise le couple de termes de rang n : $(c_n = [n\varphi^2],\ b_n = [n\varphi])$.

L'unique état BC dont la différence entre les nombres de jetons des deux piles est égal à n est celui où les nombres de jetons sont respectivement c_n et b_n. Il n'y en a aucun autre.

3. Si l'état initial est $(4,3)$, le premier joueur peut passer à l'état $(2,1)$ en retirant deux jetons de chaque pile. Cet état est gagnant (son adversaire obtiendra ensuite l'un des états $(2,0)$; $(1,1)$; $(1,0)$ tous perdants). Donc, le premier joueur peut gagner la partie quel que soit le jeu de son adversaire.

Si l'état initial est $(5,3)$: Le premier joueur obtient selon son choix de jeu l'un ou l'autre des couples :

$(4,3)$; $(3,3)$; $(2,3)$; $(1,3)$; $((0,3)$; $(5,2)$; $(5,1)$; $(5,0)$; $(4,2)$; $(3,1)$; $(2,0)$. Certains sont clairement perdants : $(3,3)$; $(0,3)$; $(5,0)$; $(2,0)$. Dans tous les autres cas, le deuxième joueur peut ensuite obtenir l'état $(2,1)$ qui est gagnant. Donc, il y a une stratégie gagnante pour le deuxième joueur quel que soit le jeu du premier.

Noter que $(5,3)$ est BC et que $(4,3)$ ne l'est pas.

4.1. Soit $(u,v)_{gjulia2015}$ est un état BC ; on note p la différence : $u-v=p$. De ce fait, nécessairement : $u=c_p$; $v=b_p$.

- Si on passe à un état du type $(u-k,v-k)_{gjulia2015}$, la différence $p=(u-k)-(v-k)$ est conservée mais on n'a plus le couple (c_p,b_p) qui est l'unique état BC de différence p donc le nouvel état n'est plus BC.
- Si on passe à un état $(u,v-k)$ ou $(u-k,v)$, la nouvelle différence est $p-k$ ou $p+k$, mais on n'a pas le couple BC correspondant (c_{p-k},b_{p-k}) ou (c_{p+k},b_{p+k}) puisqu'un des deux nombres $u=c_p \neq c_{p-k}$ ou $v=b_p \neq b_{p+k}$ n'a pas changé. Le nouvel état n'est pas non plus BC.

Quelle que soit la modification sur un état BC, le nouvel état n'est pas BC.

4.2. Soit (u,v) un état qui n'est pas BC. S'il s'agit d'un des états (u,u) ou $(u,0)$ alors il est évident qu'on peut passer en un seul coup à l'état $(0,\ 0))$ et gagner la partie. On suppose donc que : $u>v\geq 1$

On note : $p=u-v$. De ce fait : $u\neq c_p$; $v\neq b_p$ (sinon l'état serait BC)

Si $v>b_p$, alors en retirant $(v-b_p)_{gj2015}$ jetons à chacune des deux piles, on obtient l'état (c_p,b_p) qui est BC.

Si $v<b_p$ (et dans ce cas $u<c_p$ par la même occasion) : Alors, v appartient à l'un ou à l'autre des ensembles $B(\varphi)$ ou $B(\varphi^2)$ qui constituent une partition de **N***.

- Si v appartient à $B(\varphi)$, il existe k (nécessairement plus petit que p) tel que : $v = b_k$. L'entier u est tel que : $u > c_p > c_k$. Si on retire $(u - c_k)$ jetons à la pile la plus haute, cette pile contiendra c_k jetons, on obtient un état BC.
- Si v appartient à $B(\varphi^2)_{gjulia2015}$, il existe un entier k (au moins égal à 1) tel que : $v = c_k$.
- L'entier u est tel que : $u > c_p > b_k \geq 1$. Si on retire $(u - b_k)$ jetons à la pile la plus haute, cette pile contiendra b_k jetons (elle devient la pile la moins haute), on obtient un état BC.

4.3. Il ressort de ce qui précède que le joueur qui propose à son adversaire un état BC est en mesure de gagner la partie (l'autre joueur, « héritant » à chaque tour d'un état BC passe à un état non BC que son adversaire s'empressera de rétablir).

Si l'état initial est BC, c'est le deuxième joueur qui dispose d'une stratégie gagnante. S'il n'est pas BC, c'est le premier joueur qui en dispose.

5. Les trois états initiaux sont non BC, il y a donc une stratégie gagnante pour le joueur qui a la main.

5.1. Si l'état initial est $(2015, 1515)$: la différence entre les deux nombres est 500 et $(c_{500}, b_{500}) = (1309, 809)$. Un premier coup à jouer est de retirer 706 jetons à chacune des deux piles. On obtient ainsi l'état $(c_{500}, b_{500}) = (1309, 809)_{gjulia2015}$ qui est BC.

5.2. Si l'état initial est $(2015, 752)$: la différence entre les deux nombres est 1263. Or, $752 < b_{1263} = 2043$.

L'entier 752 appartient à $B(\varphi)$: $752 = b_{465} = [465\varphi]$ et en même temps : $c_{465} = [465\varphi^2] = 1217$.

Un premier coup à jouer est de retirer 798 jetons à la pile la plus haute. On obtient ainsi l'état $(c_{465}, b_{465}) = (1217, 753)$ qui est BC. (La pile la plus haute reste la plus haute).

5.3. Si l'état initial est $(2015, 753)$: la différence entre les deux nombres est 1262. Or, $753 < b_{1262} = 2041$.

L'entier 753 appartient à $B(\varphi^2)$: $753 = c_{288} = [288\varphi^2]$ et en même temps : $b_{288} = [288\varphi] = 465$.

Le premier coup à jouer est de retirer 1550 jetons à la pile la plus haute. On obtient ainsi l'état $(c_{288}, b_{288}) = (753, 465)_{gjulia2015}$ qui est BC. (La pile qui était la plus haute devient la moins haute).