Hyperbole de Kiepert d'un triangle scalène : Etude d'un exemple

1 *L'hyperbole de Kiepert d'un triangle scalène est l'hyperbole équilatère qui passe par ses sommets et par son centre de gravité.*

Dans ce sujet, on s'intéresse à un triangle ABC choisi de telle sorte que son « hyperbole de Kiepert » est une hyperbole très simple. Cette hyperbole constituera un lieu géométrique de points.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$. On considère dans ce repère l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$.

1. Un triangle particulier.

On considère sur l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ son point *A* d'abscisse -1, son point *B* d'abscisse 6 et son point *C* d'abscisse $\frac{2}{5}$.

1. Expliciter les coordonnées de ces trois points. Déterminer le centre de gravité *G* du triangle *ABC* et vérifier que ce point appartient à repère l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$.

2. Déterminer l'orthocentre *I* du triangle *ABC* et vérifier que ce point appartient lui aussi à l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$.

II. Des similitudes

Dans cette partie, le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ est assimilé au plan complexe.

3. Soit *M* et *N* deux points distincts du plan d'affixes respectives *m* et *n*.

Pour tout réel *k* soit *U* le point d'affixe *u* tel que : $\frac{u-\frac{m+n}{2}}{n-m} = k.\boldsymbol{i}$

3.1. Vérifier que : $u = m \times \left(\frac{1}{2} - k\boldsymbol{i}\right) + n \times \left(\frac{1}{2} + k\boldsymbol{i}\right)$

3.2. Montrer que le triangle *MNU* est isocèle de sommet *U* et exprimer en fonction de *k* la tangente de son angle de base.

III. Des triangles semblables et un lieu géométrique

On reconsidère l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ son point A d'abscisse -1, son point B d'abscisse 6 et son point C d'abscisse $\frac{2}{5}$. Sur les côtés du triangle ABC on construit des triangles isocèles BCU, CAV, ABW directement semblables. On se proposera de montrer que les droites (AU), (BN) et (CP) sont parallèles ou concourantes et d'étudier le lieu du point de concours.

4. On note *a, b, c* les affixes des points *A, B, C*. On définit pour tout réel *k* :

- Le point U d'affixe u telle que : $\frac{u-\frac{b+c}{2}}{c-b} = k.\boldsymbol{i}$
- Le point V d'affixe v telle que : $\frac{v-\frac{c+a}{2}}{a-c} = k.\boldsymbol{i}$
- Le point W d'affixe w telle que : $\frac{w-\frac{a+b}{2}}{b-a} = k.\boldsymbol{i}$

4.1. Expliciter les affixes *u, v* et *w*.

4.2. Ecrire une équation cartésienne de chacune des droites (AU), (BV) et (CW).

5. Montrer qu'il existe deux valeurs de *k* pour lesquelles les droites (AU), (BV) et (CW) sont parallèles.

6. Montrer que, lorsque *k* est distinct de ces deux valeurs, les droites (AU), (BV) et (CW) sont concourantes et calculer alors les coordonnées de ce point de concours *M*.

7. Déterminer le lieu géométrique de ce point de concours *M*.

Correction

1. Les points *A, B* et *C* ont pour coordonnées respectives : $A\,(-1\,;\,-1)$; $B\,\left(6\,;\,\frac{1}{6}\right)$; $C\,\left(\frac{2}{5}\,;\,\frac{5}{2}\right)$.

Le centre de gravité *G* du triangle *ABC* a pour abscisse : $x_G = \frac{1}{3}\times\left(-1+6+\frac{2}{5}\right) = \frac{9}{5}$ et pour

3 ordonnée : $y_G = \frac{1}{3}\times\left(-1+\frac{1}{6}+\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{3}\times\frac{-6+1+15}{6} = \frac{5}{9}$

Les coordonnées de ce point sont inverses l'une de l'autre, le point *G* est situé sur l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$.

2. Etudions le point d'intersection de deux des hauteurs du triangle *ABC*.

La hauteur issue de *C* est la droite passant par *C* et de vecteur normal le vecteur $\frac{6}{7}\overrightarrow{AB}\,(6\,;1)$ par exemple. Une équation en est :$6\left(x-\frac{2}{5}\right)+\left(y-\frac{5}{2}\right)=0$ soit aussi bien $y=-6x+\frac{49}{10}$.

La hauteur issue de *B* est la droite passant par *B* et de vecteur normal le vecteur $\frac{10}{7}\overrightarrow{AC}\,(2\,;5)$ par exemple. Une équation en est :$2(x-6)+5\left(y-\frac{1}{6}\right)=0$ soit aussi bien $y=-\frac{2}{5}x+\frac{77}{30}$.

Le point d'intersection *I* des deux hauteurs a pour coordonnées $\left(\frac{5}{12}\,;\,\frac{12}{5}\right)$.

Les coordonnées de ce point sont inverses l'une de l'autre, le point *I* est situé sur l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$.

3. $u-\frac{m+n}{2}=k.\boldsymbol{i}(n-m)$ soit : $u=m\times\left(\frac{1}{2}-k\boldsymbol{i}\right)+n\times\left(\frac{1}{2}+k\boldsymbol{i}\right)$

Ainsi : $u-m=m\left(-\frac{1}{2}-k\boldsymbol{i}\right)+n\times\left(\frac{1}{2}+k\boldsymbol{i}\right)=\left(\frac{1}{2}+k\boldsymbol{i}\right)\times(n-m)$ et :

$$u-n=m\left(\frac{1}{2}-k\boldsymbol{i}\right)+n\times\left(-\frac{1}{2}+k\boldsymbol{i}\right)=-\left(\frac{1}{2}-k\boldsymbol{i}\right)\times(n-m)$$

Donc : $|u-n|=|u-m|=\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}\times|n-m|$

Ce qui montre que :

$$UM=UN=\sqrt{\frac{1}{4}+k^2}\times MN$$

Le triangle *MNU* est bien isocèle de sommet *U*.

Si *t* désigne l'angle géométrique de base de ce triangle isocèle et si *P* désigne le milieu du segment [*MN*] : $\tan t=\frac{PU}{PM}=\frac{2.PU}{MN}=2|k|$

4

4. Les affixes des points *U, V* et *W* sont indiquées sur la copie d'écran ci-contre.	Define $s(m,n,k)=m\cdot\left(\frac{1}{2}-k\cdot i\right)+n\cdot\left(\frac{1}{2}+k\cdot i\right)$ *Terminé* Define $a=^-1-i$ *Terminé* Define $b=6+\frac{i}{6}$ *Terminé* Define $c=\frac{2}{5}+\frac{5\cdot i}{2}$ *Terminé* $s(b,c,k)$ $\frac{16}{5}-\frac{7\cdot k}{3}+\left(\frac{4}{3}-\frac{28\cdot k}{5}\right)\cdot i$ $s(c,a,k)$ $\frac{7\cdot k}{2}-\frac{3}{10}+\left(\frac{3}{4}-\frac{7\cdot k}{5}\right)\cdot i$ $s(a,b,k)$ $\frac{5}{2}-\frac{7\cdot k}{6}+\left(7\cdot k-\frac{5}{12}\right)\cdot i$ ©Gilbert Julia
5. Le calcul des déterminants des vecteurs $\overrightarrow{AU}$, $\overrightarrow{BV}$ et $\overrightarrow{CW}$ pris deux à deux montre que ces déterminants sont nuls, et le sont simultanément, lorsque : $(5k-9)\times(12k-5)=0$ Les vecteurs $\overrightarrow{AU}$, $\overrightarrow{BV}$ et $\overrightarrow{CW}$ sont alors colinéaires. Il existe deux valeurs de *k* pour lesquelles les droites (*AU*), (*BV*) et (*CW*) sont parallèles : $k=\frac{9}{5}$; $k=\frac{5}{12}$	©Gilbert Julia Define $u=s(b,c,k)$ *Terminé* Define $v=s(c,a,k)$ *Terminé* Define $w=s(a,b,k)$ *Terminé* $\det\left(\begin{bmatrix}\text{real}(u-a) & \text{real}(v-b)\\ \text{imag}(u-a) & \text{imag}(v-b)\end{bmatrix}\right)$ $\frac{343\cdot(5\cdot k-9)\cdot(12\cdot k-5)}{900}$ $\det\left(\begin{bmatrix}\text{real}(u-a) & \text{real}(w-c)\\ \text{imag}(u-a) & \text{imag}(w-c)\end{bmatrix}\right)$ $\frac{^-343\cdot(5\cdot k-9)\cdot(12\cdot k-5)}{900}$ $\det\left(\begin{bmatrix}\text{real}(v-b) & \text{real}(w-c)\\ \text{imag}(v-b) & \text{imag}(w-c)\end{bmatrix}\right)$ $\frac{343\cdot(5\cdot k-9)\cdot(12\cdot k-5)}{900}$

Pour ces valeurs de *k*, les trois droites sont parallèles à l'un ou à l'autre des axes de coordonnées.

6. On obtient une équation de chacune des droites (*AU*), (*BV*) et (*CW*) en écrivant la nullité de chacun des déterminants calculés ci-contre.	Define $m=x+i\cdot y$ *Terminé* $\det\left(\begin{bmatrix}\text{real}(u-a) & \text{real}(m-a)\\ \text{imag}(u-a) & \text{imag}(m-a)\end{bmatrix}\right)$ $\frac{7\cdot(12\cdot k-5)\cdot x}{15}-\frac{7\cdot((5\cdot k-9)\cdot y-7\cdot k-4)}{15}$ $\det\left(\begin{bmatrix}\text{real}(v-b) & \text{real}(m-b)\\ \text{imag}(v-b) & \text{imag}(m-b)\end{bmatrix}\right)$ $\frac{7\cdot(12\cdot k-5)\cdot x}{60}+\frac{7\cdot(6\cdot(5\cdot k-9)\cdot y-77\cdot k+39)}{60}$ $\det\left(\begin{bmatrix}\text{real}(w-c) & \text{real}(m-c)\\ \text{imag}(w-c) & \text{imag}(m-c)\end{bmatrix}\right)$ $\frac{^-7\cdot(12\cdot k-5)\cdot x}{12}-\frac{7\cdot(2\cdot(5\cdot k-9)\cdot y-49\cdot k+55)}{60}$
Lorsqu'il n'y a pas parallélisme, le point d'intersection de deux des droites, puis de deux autres est le même point. Les trois droites sont concourantes.	$\text{linSolve}\left(\begin{cases}\frac{7\cdot(12\cdot k-5)\cdot x}{15}-\frac{7\cdot((5\cdot k-9)\cdot y-7\cdot k-4)}{15}=0\\ \frac{7\cdot(12\cdot k-5)\cdot x}{60}+\frac{7\cdot(6\cdot(5\cdot k-9)\cdot y-77\cdot k+39)}{60}=0\end{cases},\{x,y\}\right)$ $\left\{\frac{5\cdot k-9}{12\cdot k-5},\frac{12\cdot k-5}{5\cdot k-9}\right\}$ $\text{linSolve}\left(\begin{cases}\frac{7\cdot(12\cdot k-5)\cdot x}{15}-\frac{7\cdot((5\cdot k-9)\cdot y-7\cdot k-4)}{15}=0\\ \frac{^-7\cdot(12\cdot k-5)\cdot x}{12}-\frac{7\cdot(2\cdot(5\cdot k-9)\cdot y-49\cdot k+55)}{60}=0\end{cases},\{x,y\}\right)$ $\left\{\frac{5\cdot k-9}{12\cdot k-5},\frac{12\cdot k-5}{5\cdot k-9}\right\}$

Lorsque : $k\neq\frac{9}{5}$ et $k\neq\frac{5}{12}$, les trois droites concourent au point *M* de coordonnées :

$$x_M=\frac{5k-9}{12k-5}\ ;\ y_M=\frac{12k-5}{5k-9}=\frac{1}{x_M}$$

7. Les coordonnées de ce point sont inverses l'une de l'autre, ce point de concours appartient à l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$.

Une étude de la fonction $k \longmapsto \frac{5k-9}{12k-5}$ qui définit l'abscisse du point *M* montrerait que cette fonction décrit l'ensemble des réels sauf la valeur $\frac{5}{12}$, qui est l'abscisse du point *I* orthocentre du triangle *ABC*. Ainsi, le point de concours décrit toute l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ à l'exception de ce point *I*.