Hyperbole de Kiepert d'un triangle scalène : Etude d'un exemple

L'hyperbole de Kiepert d'un triangle scalène est l'hyperbole équilatère qui passe par ses sommets et par son centre de gravité.

Dans ce sujet, on s'intéresse à un triangle ABC dont l'hyperbole de Kiepert a une équation qui devra être « réduite ». L'usage d'un logiciel de calcul formel est vivement conseillé pour mener à bien les calculs numériques.

Cette hyperbole constituera ensuite le support d'un lieu géométrique de points.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. On considère dans ce repère les points $A\,(-25, 0)$, $B\,(25, 0)$ et $C\,(-7, 26)$ ainsi que le triangle *ABC*.

I. Coniques passant par les sommets et le centre de gravité de *ABC*.

On se donne une courbe $\mathcal{C}$ dont l'équation est de la forme :

$f(x, y) = a.x^2 + 2b.xy + c.y^2 + 2d.x + 2e.y + g = 0$

Où *a, b, c, d, e, g* sont des coefficients réels et où l'un au moins des coefficients *a* ou *b* n'est pas nul.

1. Exprimer *c, d, e, g* en fonction de *a* et de *b* de façon que la courbe $\mathcal{C}$ passe par les sommets du triangle *ABC* et aussi par le centre de gravité *G* de ce triangle.

2. On admet qu'une condition nécessaire pour qu'une courbe d'équation $f(x, y) = a.x^2 + 2b.xy + c.y^2 + 2d.x + 2e.y + g = 0$ soit une hyperbole équilatère est la condition $c = -a$.

Exprimer dans ce cas *b* en fonction de *a*.

En déduire qu'une équation de la courbe $\mathcal{C}$ est :

$$x^2 + \frac{48}{7}xy - y^2 + \frac{1250}{13}y - 625 = 0$$

3. Vérifier que la courbe $\mathcal{C}$ passe aussi par l'orthocentre du triangle *ABC*.

II. Caractéristiques géométriques de la courbe $\mathcal{C}$.

4. Pour tout réel *k* appartenant à l'intervalle $[0\,;1]$, on considère la rotation vectorielle *r* dont la matrice dans la base $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ est : $R=\begin{bmatrix} k & -\sqrt{1-k^2} \\ \sqrt{1-k^2} & k \end{bmatrix}$.

Soit un point *M* du plan de coordonnées (*x, y*) dans le repère $(O,\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$. On désigne par (u,v) les
2 coordonnées de ce même point *M* dans le repère $\left(O,r(\overrightarrow{e_1}),\ r(\overrightarrow{e_2})\right)$.

- Exprimer *x* et *y* en fonction de *u* et de *v*.
- Ecrire une équation de la courbe C dans le repère $\left(O,r(\overrightarrow{e_1}),\ r(\overrightarrow{e_2})\right)$.
- Déterminer *k* de façon que le terme en $u\times v$ de l'équation obtenue soit nul.

5. Montrer qu'alors une équation de $\mathcal{C}$ dans le repère $\left(O,r(\overrightarrow{e_1}),\ r(\overrightarrow{e_2})\right)$ est :

$$\frac{-25u^2}{7}+\frac{25v^2}{7}-\frac{1000u}{13}+\frac{750v}{13}-625=0$$

Déterminer la nature et les caractéristiques de la courbe $\mathcal{C}$.

III. La courbe $\mathcal{C}$ comme support d'un lieu géométrique

Dans cette partie, le plan rapporté au repère orthonormé $(O,\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ est assimilé au plan complexe.

Sur les côtés du triangle *ABC* on construit des triangles isocèles *BCM*, *CAN*, *ABP* directement semblables. On se propose de montrer que les droites (*AM*), (*BN*) et (*CP*) sont concourantes et d'étudier le lieu du point de concours.

6. Question préliminaire. Soit *A* et *B* deux points (pour le moment quelconques) d'affixes respectives *a* et *b* et soit *E* le milieu de [*AB*]. Pour tout réel *s* soit *U* le point d'affixe *u* tel que : $\frac{u-\frac{a+b}{2}}{b-a}=s.\boldsymbol{i}$

- Vérifier que : $u=a\times\left(\frac{1}{2}-s\boldsymbol{i}\right)+b\times\left(\frac{1}{2}+s\boldsymbol{i}\right)$
- Montrer que le triangle *ABU* est isocèle de sommet *U* et exprimer en fonction de *s* la tangente de son angle de base.

7. On reprend désormais les notations de la partie I avec les points $A\ (-25, 0)$, $B\ (25, 0)$ et $C\ (-7, 26)$ donc d'affixes respectives : $a = -25$; $b = 25$; $c = -7 + 26\boldsymbol{i}$.

Sur les côtés du triangle *ABC* on construit des triangles isocèles *BCM*, *CAN*, *ABP* directement semblables. On se propose de montrer que les droites (*AM*), (*BN*) et (*CP*) sont parallèles ou
3 concourantes et d'étudier, lorsqu'il existe, le lieu du point de concours.

Pour tout réel *s*, on considère ainsi les points *M, N* et *P* dont les affixes sont définies par les relations :

$$\frac{m - \dfrac{b+c}{2}}{c-b} = s.\boldsymbol{i} \ ; \ \frac{n - \dfrac{c+a}{2}}{a-c} = s.\boldsymbol{i} \ ; \ \frac{p - \dfrac{a+b}{2}}{b-a} = s.\boldsymbol{i}$$

Expliciter les coordonnées des points *M, N, P*.

Montrer que les droites (*AM*), (*BN*), (*CP*) sont parallèles ou concourantes.

Montrer que, lorsque les droites sont concourantes, leur point de concours appartient à la courbe $\mathcal{C}$.

Correction

<table>
<tr>
<td>

1. Le centre de gravité du triangle *ABC* a pour coordonnées $\left(\frac{-7}{3}\ ;\ \frac{26}{3}\right)$.

La copie d'écran ci-contre montre que :

$$\begin{cases} c = \dfrac{-37a-7b}{13} \\ d = 0 \\ e = \dfrac{625a}{13} \\ g = -625a \end{cases}$$

</td>
<td>

©Gilbert Julia

$\text{Define } f(x,y)=a\cdot x^2+2\cdot b\cdot x\cdot y+c\cdot y^2+2\cdot d\cdot x+2\cdot e\cdot y+g$ *Terminé*

$\{f(-25,0),f(25,0)\}$ $\{625\cdot a-50\cdot d+g,625\cdot a+50\cdot d+g\}$

$\left\{f(-7,26),f\left(\frac{-7}{3},\frac{26}{3}\right)\right\}$

$\left\{49\cdot a-364\cdot b+676\cdot c-14\cdot d+52\cdot e+g,\frac{49\cdot a}{9}-\frac{364\cdot b}{9}+\frac{676\cdot c}{9}-\frac{14\cdot d}{3}+\frac{52\cdot e}{3}+g\right\}$

$\text{linSolve}\left(\begin{cases}f(25,0)=0\\f(-25,0)=0\\f(-7,26)=0\\f\left(\frac{-7}{3},\frac{26}{3}\right)=0\end{cases},\{c,d,e,g\}\right)$ $\left\{\frac{-(37\cdot a-7\cdot b)}{13},0,\frac{625\cdot a}{13},-625\cdot a\right\}$

$\text{solve}\left(\frac{-(37\cdot a-7\cdot b)}{13}=-a,b\right)$ $b=\frac{24\cdot a}{7}$

</td>
</tr>
</table>

2. Cette même copie d'écran montre que l'équation $c=-a$, d'inconnue b, a pour solution :

$$b=\frac{24a}{7}$$

En choisissant $a=1$, on obtient qu'une équation de la courbe $\mathcal{C}$ est :

$$x^2+\frac{48xy}{7}-y^2+\frac{1250}{13}y-625=0$$

<table>
<tr>
<td>

3. La hauteur issue de *A* a pour équation : $x=-7$ tandis que la hauteur issue de *B* a pour équation : $18x+26y-450=0$.

L'orthocentre du triangle a pour coordonnées$\left(-7\ ;\ \frac{288}{13}\right)$. On vérifie que les coordonnées de ce point satisfont l'équation de la courbe $\mathcal{C}$.

</td>
<td>

$\text{Define } a=\begin{bmatrix}-25\\0\end{bmatrix}$ *Terminé*

$\text{Define } b=\begin{bmatrix}25\\0\end{bmatrix}$ *Terminé*

$\text{Define } c=\begin{bmatrix}-7\\26\end{bmatrix}$ *Terminé*

$\text{dotP}\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}-b,c-a\right)$ $18\cdot x+26\cdot y-450$

$\text{solve}(18\cdot -7+26\cdot y-450=0,y)$ $y=\frac{288}{13}$

$\text{Define } f(x,y)=x^2+\frac{48\cdot x\cdot y}{7}-y^2+\frac{1250\cdot y}{13}-625$ *Terminé*

$f\left(-7,\frac{288}{13}\right)$ 0

©Gilbert Julia

</td>
</tr>
</table>

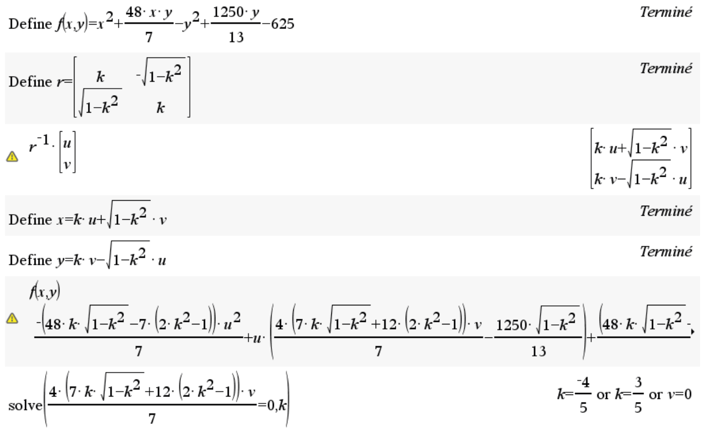
4. Les deux repères en question ont une origine commune *O*. Puisque la base$\left(r(\overrightarrow{e_1}),\ \ r(\overrightarrow{e_2})\right)$ est image de $(\overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2})$ par la rotation *r* : $\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=R\times\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ soit : $\begin{cases}u=kx-\sqrt{1-k^2}.y\\v=\sqrt{1-k^2}.x+ky\end{cases}$

Inversement : $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=R^{-1}\times\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$ soit : $\begin{cases}x=ku+\sqrt{1-k^2}.v\\y=-\sqrt{1-k^2}.u+kv\end{cases}$

5

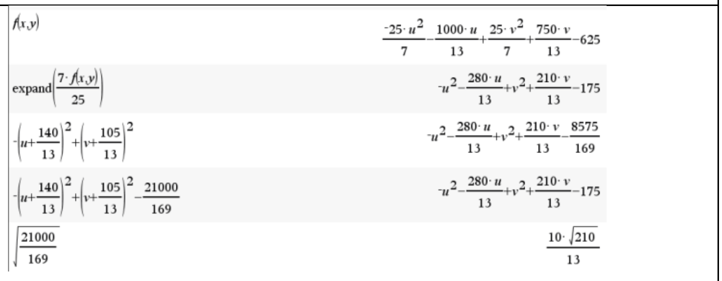
La copie d'écran ci-contre montre une équation de la courbe dans le nouveau repère. On a isolé le coefficient du terme « en xy », lequel terme s'annule pour deux valeurs de k, dont une seule est comprise entre 0 et 1, à savoir :

$$k=\frac{3}{5}$$



On obtient qu'une équation de la courbe dans le nouveau repère est :

$$\frac{25(v^2-u^2)}{7}-\frac{1000u}{13}+\frac{750v}{13}-625=0$$



5. Cette équation peut s'écrire :

$$-\left(u+\frac{140}{13}\right)^2+\left(v+\frac{105}{13}\right)^2=\frac{21000}{169}$$

Equation qui se réduit ainsi :

$$-\frac{\left(u+\frac{140}{13}\right)^2}{\left(\frac{10\sqrt{210}}{13}\right)^2}+\frac{\left(v+\frac{105}{13}\right)^2}{\left(\frac{10\sqrt{210}}{13}\right)^2}=1$$

Nous obtenons bien l'équation réduite d'une hyperbole équilatère.

Le centre de cette hyperbole est le point I dont les coordonnées dans le repère initial sont :

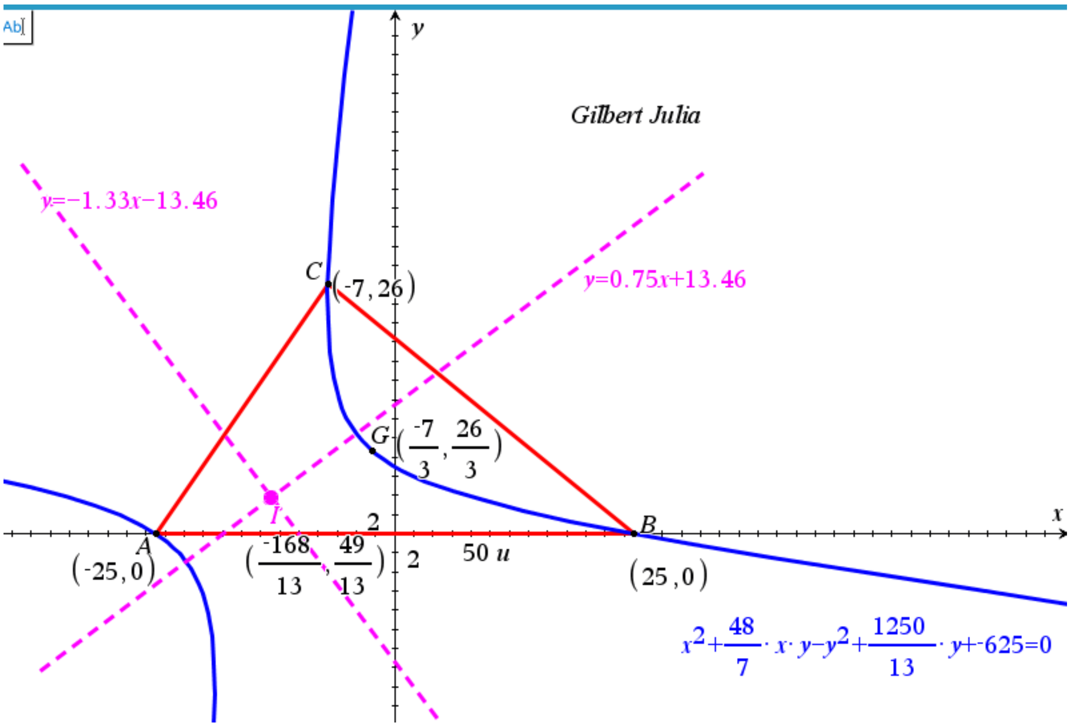
$$I\left(-\frac{168}{13},\frac{49}{13}\right)$$

Les asymptotes ont pour équation :

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{175}{13}$$

$$y=-\frac{4}{3}x-\frac{175}{13}$$

Les résultats obtenus dans cette partie sont illustrés ci-dessous :



6. $u-\frac{a+b}{2}=s.\boldsymbol{i}(b-a)$ soit : $u=a\times\left(\frac{1}{2}-s\boldsymbol{i}\right)+b\times\left(\frac{1}{2}+s\boldsymbol{i}\right)$

Ainsi : $u-a=a\left(-\frac{1}{2}-s\boldsymbol{i}\right)+b\times\left(\frac{1}{2}+s\boldsymbol{i}\right)=\left(\frac{1}{2}+s\boldsymbol{i}\right)\times(b-a)$ et :

$$u-b=a\left(\frac{1}{2}-s\boldsymbol{i}\right)+b\times\left(-\frac{1}{2}+s\boldsymbol{i}\right)=-\left(\frac{1}{2}-s\boldsymbol{i}\right)\times(b-a)$$

Donc :

$$|u-b|=|u-a|=\sqrt{\frac{1}{4}+s^2}\times|b-a|$$

Ce qui montre que

$$UB=UA=\sqrt{\frac{1}{4}+s^2}\times AB$$

Le triangle ABU est bien isocèle de sommet U.

Les affixes des points *M, N* et *P* sont indiquées sur l'écran ci-contre.	Define $u(a,b,s)=a\cdot\left(\frac{1}{2}-s\cdot i\right)+b\cdot\left(\frac{1}{2}+s\cdot i\right)$ *Terminé* Define $a=-25$ *Terminé* Define $b=25$ *Terminé* Define $c=-7+26\cdot i$ *Terminé* Define $m=u(b,c,s)$ *Terminé* Define $n=u(c,a,s)$ *Terminé* Define $p=u(a,b,s)$ *Terminé* m $\quad 9-26\cdot s+(13-32\cdot s)\cdot i$ n $\quad 26\cdot s-16+(13-18\cdot s)\cdot i$ p $\quad 50\cdot s\cdot i$ ©Gilbert Julia
On obtient une équation de chacune des droites (*AM*), (*BN*) et (*CP*) en écrivant la nullité des déterminants ci-contre. On en déduit, sous réserve d'existence, les coordonnées du point d'intersection de deux des droites et on vérifie que ce point est aussi sur la troisième droite.	$\det\left(\begin{bmatrix} x+25 & 34-26\cdot s \\ y & 13-32\cdot s\end{bmatrix}\right)$ $\quad -(2\cdot s\cdot(16\cdot x-13\cdot y+400)-13\cdot x+34\cdot y-325)$ $\det\left(\begin{bmatrix} x-25 & 26\cdot s-41 \\ y & 13-18\cdot s\end{bmatrix}\right)$ $\quad -(2\cdot s\cdot(9\cdot x+13\cdot y-225)-13\cdot x-41\cdot y+325)$ $\det\left(\begin{bmatrix} x+7 & 7 \\ y-26 & 50\cdot s-26\end{bmatrix}\right)$ $\quad 50\cdot s\cdot(x+7)-26\cdot x-7\cdot y$ $\text{linSolve}\left(\begin{cases}-(2\cdot s\cdot(16\cdot x-13\cdot y+400)-13\cdot x+34\cdot y-325)=0\\ -(2\cdot s\cdot(9\cdot x+13\cdot y-225)-13\cdot x-41\cdot y+325)=0\end{cases},\{x,y\}\right)$ $\left\{\frac{-7\cdot(52\cdot s^2-100\cdot s+13)}{13\cdot(4\cdot s^2-8\cdot s+3)},\frac{2\cdot(576\cdot s^2-650\cdot s+169)}{13\cdot(4\cdot s^2-8\cdot s+3)}\right\}$ Define $x=\frac{-7\cdot(52\cdot s^2-100\cdot s+13)}{13\cdot(4\cdot s^2-8\cdot s+3)}$ *Terminé* Define $y=\frac{2\cdot(576\cdot s^2-650\cdot s+169)}{13\cdot(4\cdot s^2-8\cdot s+3)}$ *Terminé* $50\cdot s\cdot(x+7)-26\cdot x-7\cdot y$ $\quad 0$

Les cas d'exception sont : $s=\frac{1}{2}\ ;\ s=\frac{3}{2}$ On vérifie que, pour ces valeurs, les affixes $m-a, n-b, p-c$ sont proportionnelles donc les droites (*AM*), (*BN*), (*CP*) sont parallèles.	$\text{solve}(4\cdot s^2-8\cdot s+3=0,s)$ $\quad s=\frac{1}{2}$ or $s=\frac{3}{2}$ Define $s=\frac{1}{2}$ *Terminé* $\{m-a,n-b,p-c\}$ $\quad \{21-3\cdot i,-28+4\cdot i,7-i\}$ Define $s=\frac{3}{2}$ *Terminé* $\{m-a,n-b,p-c\}$ $\quad \{-5-35\cdot i,-2-14\cdot i,7+49\cdot i\}$

On vérifie que les coordonnées du point de concours satisfont l'équation de la courbe $\mathcal{C}$.	Define $w=\frac{-7\cdot(52\cdot s^2-100\cdot s+13)}{13\cdot(4\cdot s^2-8\cdot s+3)}$ *Terminé* Define $z=\frac{2\cdot(576\cdot s^2-650\cdot s+169)}{13\cdot(4\cdot s^2-8\cdot s+3)}$ *Terminé* Define $f(x,y)=x^2+\frac{48\cdot x\cdot y}{7}-y^2+\frac{1250\cdot y}{13}-625$ *Terminé* $f(w,z)$ $\quad 0$

Le lieu géométrique du point de concours n'en est pas pour autant déterminé. Il faudrait étudier réciproquement quels sont les points de la courbe $\mathcal{C}$ qui sont effectivement des points de concours.