CORRECTION OLYMPIADES

EXERCICES ACADÉMIQUES

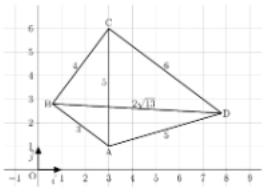
CRETEIL 2023

Un aperçu du sujet

Exercice académique 1

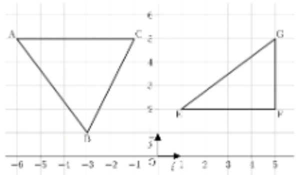
PARTIES INTEGRALES DU PLAN

Dans cet exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide de points du plan.
On dit que $\mathcal{E}$ est une partie intégrale du plan si la distance entre deux points quelconques de $\mathcal{E}$ est un nombre entier.
Ainsi, sur la figure suivante, si on considère les points A, B, C et D du plan tels que
$AB = 3$; $AC = 5$; $BC = 4$; $CD = 6$; $AD = 5$; $BD = 2\sqrt{13}$
On peut dire par exemple que :
- les ensembles {A}, {A ; B}, {B ; C} et {A ; B ; C} sont des parties intégrales du plan.
- Les ensembles {B ; D}, {A ; B ; D} et {A ; B ; C ; D} ne sont pas des parties intégrales du plan.



Partie A

1. On considère les points A, B, C, D, E, F et G du plan, tous à coordonnées entières.



a. L'ensemble {A ; B ; C} est-il une partie intégrale du plan ?
b. Même question avec l'ensemble {E ; F ; G}.
2. L'ensemble constitué par les sommets d'un rectangle peut-il être une partie intégrale du plan ?
3. Même question avec l'ensemble constitué par les sommets d'un carré.

Soient a, b, c et d des réels tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 + d^2 = 1$.
En développant l'expression $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$, montrer que :

$$1 - a^2c^2 - b^2d^2 = a^2d^2 + b^2c^2.$$

b. Déduire des questions précédentes que, si M et N sont deux points de $\mathcal{P}$, alors la distance MN est un nombre rationnel.
4. Déduire des questions précédentes que quel que soit l'entier $n \geq 3$ choisi, il est possible de trouver un ensemble $\mathcal{G}$ de n points du plan vérifiant les deux conditions suivantes :
- L'ensemble $\mathcal{G}$ est une partie intégrale du plan.
- Aucun triplet de $\mathcal{G}$ n'est constitué de 3 points alignés.

4. Représenter 5 points qui forment une partie intégrale du plan.
5. On considère un entier naturel $n \geq 2$.
a. Montrer que quel que soit l'entier n choisi, il est possible de trouver un ensemble de n points du plan qui soit une partie intégrale du plan.
b. Montrer que quel que soit l'entier n choisi, il est possible de trouver un ensemble $\mathcal{F}$ de n points vérifiant les 3 conditions suivantes :
- Les n points sont alignés.
- L'ensemble $\mathcal{F}$ n'est pas une partie intégrale du plan.
- Aucun sous-ensemble de $\mathcal{F}$ n'est une partie intégrale du plan.

Partie B
On considère maintenant un entier naturel $n \geq 3$.
Le but de la partie B est de montrer que quel que soit l'entier $n \geq 3$ choisi, il est possible de trouver un ensemble $\mathcal{G}$ de n points du plan vérifiant les deux conditions suivantes :
- L'ensemble $\mathcal{G}$ est une partie intégrale du plan.
- Aucun triplet de $\mathcal{G}$ n'est constitué de 3 points alignés.

Pour parvenir à ce résultat, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
(On rappelle qu'un point M de coordonnées $(x ; y)$ appartient à $\mathcal{C}$ si et seulement si $x^2 + y^2 = 1$)

1. Soit t un nombre entier et A le point de coordonnées $(-1 ; 0)$.
On note $\mathcal{D}_t$ la droite passant par A et de coefficient directeur t.
a. Déterminer l'équation réduite de la droite $\mathcal{D}_t$.
b. Soit M le point de coordonnées $(x ; y)$
Montrer que le point M appartient à la fois à la droite $\mathcal{D}_t$ et au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si ses coordonnées $(x ; y)$ vérifient :

$$\begin{cases} (x+1)[(t^2+1)x + t^2 - 1] = 0 \\ y = tx + t \end{cases}$$

c. Montrer que la droite $\mathcal{D}_t$ coupe le cercle $\mathcal{C}$ en deux points, le point A et un autre point dont on déterminera les coordonnées en fonction de t.
d. En déduire qu'il existe une infinité de couples $(a ; b)$ où a et b sont des nombres rationnels et $a^2 + b^2 = 1$.
2. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des points M de coordonnées $(a^2 - b^2 ; 2ab)$ où a et b sont deux rationnels tels que $a^2 + b^2 = 1$.
a. Montrer que si $M \in \mathcal{P}$ alors $M \in \mathcal{C}$.
b. Soient a, b, c et d des réels tels que $a^2 + b^2 = 1$ et $c^2 + d^2 = 1$.
On considère les points M et N du plan respectivement de coordonnées $(a^2 - b^2 ; 2ab)$ et $N(c^2 - d^2 ; 2cd)$.
Montrer que si $M = N$ alors $|a| = |c|$ et $|b| = |d|$.
c. Conclure que $\mathcal{P}$ est une partie du cercle $\mathcal{C}$ contenant un nombre infini de points.
3.
a. Soit $M(x_M ; y_M)$ et $N(x_N ; y_N)$ deux points du cercle $\mathcal{C}$.
Montrer que

$$MN^2 = 2\big(1 - (x_M x_N + y_M y_N)\big)$$

Exercice académique 2

LES TRIPLETS HERONIENS

On considère trois points A, B et C du plan P.
On note :
$a = \mathrm{BC}$, $b = \mathrm{AC}$ et $c = \mathrm{AB}$ les longueurs des côtés du triangle ABC.
s le demi-périmètre du triangle ABC et
$\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

On dira que **le triangle ABC est « héronien »** si les longueurs a, b, c de ses côtés et son aire $\mathcal{A}$ sont des nombres entiers.
On dira aussi, dans ce cas, que **le triplet (a, b, c) est héronien.**

Le but de ce problème est d'étudier des exemples de triplets héroniens bien particuliers.

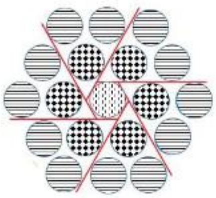
Partie A - Un exemple de triplets héroniens
Dans cette partie on s'intéresse au triangle ABC tel que $a = 3$, $b = 4$ et $c = 5$.
1. Construire un tel triangle.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. Montrer que le triplet $(3{,}4{,}5)$ est héronien.

Partie B - Un triplet héronien ?
Dans cette partie, on s'intéresse au triangle ABC tel que $a = 5$, $b = 6$ et $c = 7$.
On note H le pied de la hauteur issue de B, x la longueur AH et y la longueur HC.
1. Montrer, en utilisant deux fois le théorème de Pythagore, que $x^2 - y^2 = 24$.
2. En déduire que $x - y = 4$.
3. Calculer BH.
4. Le triplet $(5{,}6{,}7)$ est-il héronien ?

Partie C - Un triangle héronien dont l'aire est un nombre sphénique
Les nombres sphéniques :
Ce sont les entiers naturels qui sont le produit de trois nombres premiers distincts.
On rappelle que pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité : $1 + 2 + 3 + \cdots \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
1. Les nombres sphéniques :
a. Déterminer les quatre plus petits multiples de dix qui soient des nombres sphéniques.
b. Déterminer le plus petit nombre sphénique supérieur à 111.

2. Les nombres hexagonaux centrés :

On considère la figure ci-dessous, constituée de trois couches de points successives : la couche 1 est constitué du point central représenté par des tirets verticaux, la couche 2 est constitué des points aux hachures damiers et la couche 3 est constituée des points aux hachures horizontales.



Le nombre hexagonal h_1 est le nombre de points de la couche 1, ainsi $h_1 = 1$.
Le nombre hexagonal h_2 est le nombre de points contenus dans la figure constituée des deux premières couches, c'est-à-dire la somme du nombre des points constituant la couche 1 (tirets verticaux) et la couche 2 (hachures damiers).
Ainsi $h_2 = 7$
Soit n un entier naturel, on note h_n le nombre de points contenus dans la figure constituée de tous les points disposés en n couches successives.
La figure ci-dessus représente la configuration du nombre h_3.
a. Déterminer h_3 et h_4.
b. Expliquer pourquoi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $h_n = 1 + 6 \times \frac{n(n-1)}{2}$

3. Un triplet héronien dont l'aire est un nombre sphénique :

On pose maintenant $x = h_3$ et $z = h_4$ et on cherche un nombre entier y compris entre x et z tel que le triplet $(x; y; z)$ soit héronien et d'aire 114.
On admettra la formule de Héron :
Soit un triangle ABC de côtés a, b et c.
On note $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC et s le demi-périmètre du triangle
$\mathcal{A}$ est donnée par la formule :

$$\mathcal{A} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

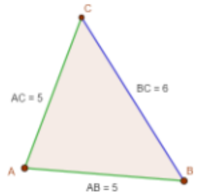
a. Montrer que le nombre y vérifie l'égalité

$$(56^2 - y^2)(y^2 - 18^2) = 16 \times 12\,996.$$

b. Montrer alors que y vérifie l'égalité $(y^2 - 400)(y^2 - 3060) = 0$.
c. Conclure.

Partie D – Recherche de triangles isocèles formant des triplets héroniens

1. Montrer que le triangle isocèle dont les côtés sont de longueurs 5, 5 et 6 représenté ci-dessous est héronien.



2. Êtes-vous en mesure de trouver un autre triangle à la fois isocèle et héronien ?
(Les triangles semblables dont les longueurs des côtés seraient proportionnelles au précédent comme (10 ; 10 ; 12) par exemple ne seront pas pris en compte).

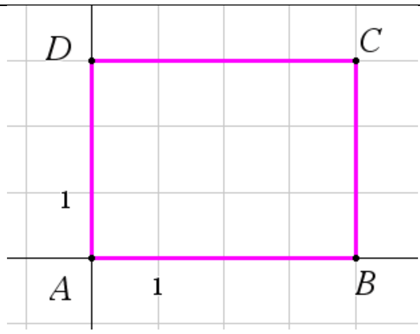
Exercice 1 : Parties intégrales du plan

Partie A

1.a. L'ensemble {*A* ; *B* ; *C*} n'est pas une partie intégrale du plan car $BC = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ (non entier).

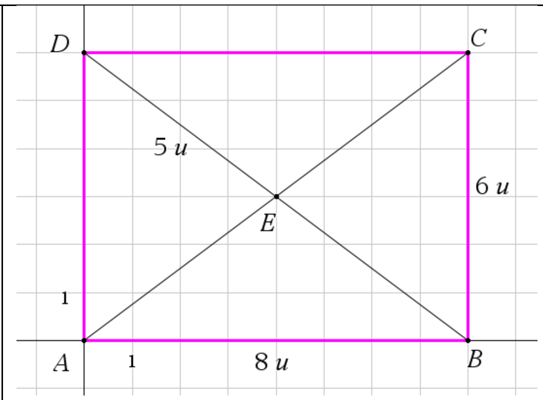
1.b. L'ensemble {*E* ; *F* ; *G*} est une partie intégrale du plan, on reconnaît le célèbre triangle rectangle « 3/4/5 ».

2. La réponse est oui, comme l'atteste la figure ci-contre représentant un rectangle de côtés 3 et 4.



3. La réponse est non. Si *a* est le côté du carré, sa diagonale mesure $a\sqrt{2}$. Les nombres *a* et $a\sqrt{2}$ sont incommensurables (c'est-à-dire que leur quotient n'est pas un nombre rationnel, car il s'agit du nombre irrationnel $\sqrt{2}$), ils ne peuvent pas être tous les deux à la fois des entiers.

4. Un rectangle *ABCD* de côtés 6 et 8 avec son centre *E* fait l'affaire, comme l'indique la figure ci-contre, car ses diagonales ont pour longueur le nombre pair 10 et ses demi-diagonales ont pour longueur 5 (voir aussi question suivante avec $n = 5$).



5. L'entier *n* est un entier au moins égal à 2.

5.a. Considérons les *n* points $A_k(k, 0)$ pour $1 \leq k \leq n$. Pour tous entiers *p* et *q* tels que $1 \leq p < q \leq n$, la distance entre les points d'indices *p* et *q* de l'ensemble $\{A_1 \,; \dots ;\, A_n\}$ est égale à l'entier $q - p$. Cet ensemble $\{A_1 \,; \dots ;\, A_n\}$ est un exemple de partie intégrale du plan formée de *n* points.

5.b. Considérons les *n* points $B\left(\frac{1}{k}, 0\right)$ pour $1 \leq k \leq n$. Pour tous entiers *p* et *q* tels que $1 \leq p < q \leq n$, la distance entre les points d'indices *p* et *q* de l'ensemble $\{B_1 \,; \dots ;\, B_n\}$ est égale au nombre $\frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{q-p}{pq}$.

Or : $\frac{q-p}{pq} < \frac{q}{pq} = \frac{1}{p} \leq 1$. La distance entre deux points quelconques de l'ensemble $\{B_1 \,; \dots ;\, B_n\}$ est toujours strictement plus petite que 1 donc cette distance n'est pas un entier.

Cet ensemble $\{B_1 \,; \dots ;\, B_n\}$ est un exemple de partie du plan formée de *n* points telle qu'aucun sous-ensemble n'est une partie intégrale du plan.

Partie B

1.a. La droite $\mathcal{D}_t$ passant par *A* et de coefficient directeur *t* a pour équation $y = t \times (x + 1)$ et pour équation réduite l'équation : $y = tx + t$.

1.b. Un point $M(x, y)$ est point d'intersection de la droite $\mathcal{D}_t$ et du cercle si et seulement si ses coordonnées vérifient le système d'équations : $\begin{cases} y = t \times (x + 1) \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

Ce système est équivalent au système : $\begin{cases} y = t \times (x + 1) \\ x^2 + [t \times (x + 1)]^2 = 1 \end{cases}$, ou encore au système : $\begin{cases} y = t \times (x + 1) \\ [t \times (x + 1)]^2 = 1 - x^2 = (1 - x) \times (1 + x) \end{cases}$, lui-même équivalent au système : $\begin{cases} y = t \times (x + 1) \\ (x + 1)[t^2 \times (x + 1) - (1 - x)] = 0 \end{cases}$ ou encore à : $\begin{cases} y = t \times (x + 1) \\ (x + 1)[(t^2 + 1)x + (t^2 - 1)] = 0 \end{cases}$

1.c. L'abscisse du point *M* vérifie l'équation : $(x+1)[(t^2+1)x+(t^2-1)]=0$.

- Ou bien $x=-1$, et alors $y=0$, nous obtenons les coordonnées du point *A*.
- Ou bien $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, et alors $y=t\times\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}+1\right)=\frac{2t}{1+t^2}$, nous obtenons les coordonnées d'un deuxième point qui est distinct du point *A* puisque son ordonnée n'est pas nulle, le point $B_t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)$.

1.d. Le point $B_t\left(\frac{1-t^2}{1+t^2},\ \frac{2t}{1+t^2}\right)$ est, d'après la question précédente, un point du cercle $\mathcal{C}$. Si nous choisissons un coefficient *t* rationnel, disons $t=\frac{p}{q}$ avec *p* et *q* entiers premiers entre eux, les coordonnées de B_t sont aussi des nombres rationnels, nous obtenons $B_t\left(a=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},\ b=\frac{2pq}{p^2+q^2}\right)$.

Vu qu'il y a une infinité de nombres rationnels, il y a une infinité de points situés sur le cercle $\mathcal{C}$ qui ont des coordonnées rationnelles, à savoir les nombres rationnels $a=\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2},\ b=\frac{2pq}{p^2+q^2}$ et ces nombres satisfont la relation $a^2+b^2=1$.

2.a. Pour tout couple (*a, b*) de rationnels tel que $a^2+b^2=1$, posons $A=a^2-b^2\,;B=2ab$.

Il s'agit de deux rationnels en tant que cocktails (sommes et produits) de rationnels. De plus :

$$A^2+B^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^4+b^4-2a^2b^2)+4a^2b^2=a^4+b^4+2a^2b^2=(a^2+b^2)^2=1$$

Par conséquent, si *M*(*a, b*) est un point coordonnées rationnelles du cercle $\mathcal{C}$, il en est de même du point dont les coordonnées sont (*A, B*).

2.b. Supposons que $M(a^2-b^2\,;2ab)=N(c^2-d^2\,;2cd)$ avec $a^2+b^2=c^2+d^2=1$

Alors : $\begin{cases}a^2-b^2=c^2-d^2\\ 2ab=2cd\end{cases}$ ce qui implique : $\begin{cases}a^2-(1-a^2)=c^2-(1-c^2)\\ 2ab=2cd\end{cases}$ ou aussi bien : $\begin{cases}2a^2=2c^2\\ 2ab=2cd\end{cases}$

De la première équation, on déduit que les carrés de *a* et de *c* sont égaux, donc $|a|=|c|$

La deuxième équation implique que $|ab|=|cd|$ et on en déduit, en règle générale, que $|b|=|d|$, sauf peut-être si $a=0$ ou . Mais $a=0\Leftrightarrow c=0$ et il nous reste $b^2=d^2=1$ donc dans ce cas aussi $|b|=|d|$.

2.c. Nous disposons d'un ensemble infini de points du cercle $\mathcal{C}$ dont les coordonnées sont des couples de rationnels Nous pouvons organiser cet ensemble infini par groupes d'au plus quatre éléments (donc un nombre fini) donnant un même point du plan. Ce groupement aboutit à une infinité de points distincts, à coordonnées rationnelles, tous situés sur le cercle $\mathcal{C}$.

Le cercle $\mathcal{C}$ contient une infinité de points à coordonnées rationnelles.

3. Soit $M(x_M, y_M)$ et $N(x_N, y_N)$ deux points quelconques du plan.

Alors : $MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 = {x_M}^2 + {y_M}^2 + {x_N}^2 + {y_N}^2 - 2x_N x_M - 2y_N y_M$.

Si en outre *M* et *N* sont deux points du cercle $\mathcal{C}$, alors ${x_M}^2 + {y_M}^2 = {x_N}^2 + {y_N}^2 = 1$ et nous obtenons :

$$MN^2 = 2 - 2x_N x_M - 2y_N y_M = 2\big(1 - (x_N x_M + y_N y_M)\big)$$

2.a. Sous les hypothèses de cette question :

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1 = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2$, relation qui peut s'écrire :

$$1 - a^2c^2 - b^2d^2 = a^2d^2 + b^2c^2$$

2.b. Examinons l'expression de MN^2 lorsque $M(x_M = a^2 - b^2, y_M = 2ab)$ et $N(x_N = c^2 - d^2, y_N = 2cd)$ et lorsqu'en outre $(a^2 + b^2) = (c^2 + d^2) = 1$ (les nombres *a, b, c, d* sont des rationnels).

$$MN^2 = 2\big(1 - (x_N x_M + y_N y_M)\big) = 2(1 - ((a^2 - b^2)(c^2 - d^2) + 4abcd)$$

Ce qui nous donne :

$$MN^2 = 2(1 - a^2c^2 - b^2d^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + 4abcd) = 4(a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd) = 4(ad + bc)^2$$

L'expression obtenue est un carré. En conséquence :

$$MN = 2|ad + bc|$$

Cette distance est un nombre rationnel en tant que cocktail de nombres rationnels.

4. Pour tout entier $n \geq 3$, choisissons *n* points appartenant à l'ensemble infini $\mathcal{P}$, c'est-à-dire *n* points distincts ayant des coordonnées de la forme $M(x_M = a^2 - b^2, y_M = 2ab)$ avec $(a^2 + b^2) = 1$ et *a* et *b* rationnels.

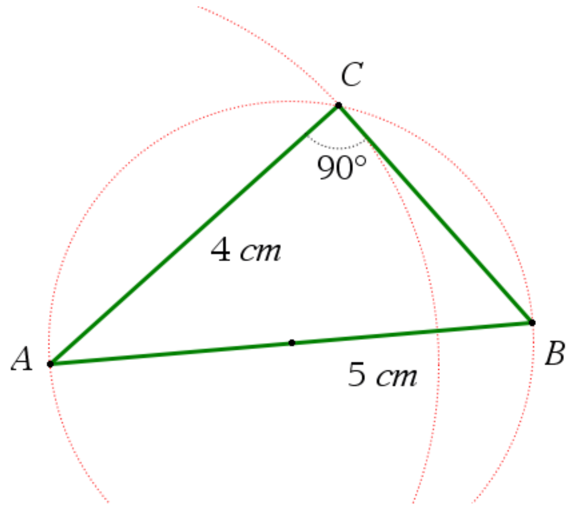
Ces points appartiennent tous au cercle $\mathcal{C}$, donc trois quelconques d'entre eux ne sont jamais alignés. De plus, la question précédente montre que la distance entre deux quelconques d'entre eux est toujours un nombre rationnel.

L'ensemble *G* des *n* points ainsi choisis satisfait les deux conditions imposées.

Exercice 2 : Les triplets héroniens

Partie A : Un exemple de triplet héronien

1, 2 et 3. On reconnaît le célèbre triangle rectangle « 3/4/5 » dont l'aire est égale à 6.



Partie B : Un triplet héronien ?

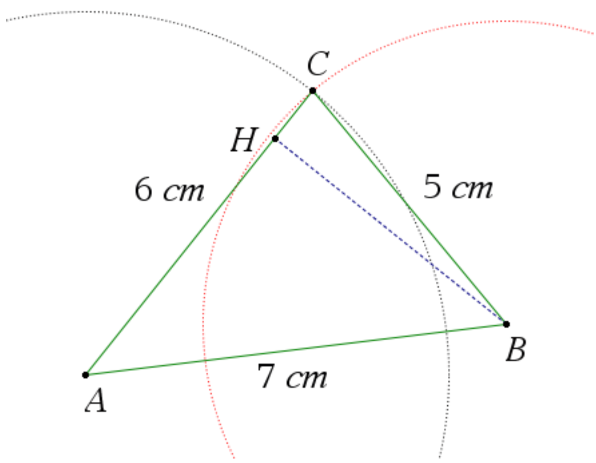
1. Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle *ABH* : $AH^2 + BH^2 = AB^2$ soit : $x^2 + BH^2 = 7^2 = 49$.

Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle *CBH* : $CH^2 + BH^2 = BC^2$ soit : $y^2 + BH^2 = 5^2 = 25$.

En effectuant la différence membre membre des deux équations obtenues, nous obtenons :

$(x^2 + BH^2) - (y^2 + BH^2) = 49 - 25$ soit :

$$x^2 - y^2 = 24$$



2. On peut vérifier que le triangle *ABC* a ses trois angles aigus (en effet, le cosinus de l'angle le plus grand est d'après le théorème d'Al-Kashi du même signe que $AC^2 + BC^2 - AB^2 = 36 + 25 - 49 = 12$ donc positif, c'est un angle aigu. Le point *H* est donc situé sur le segment [*AC*]. Ce point étant entre *A* et *C*, nous pouvons écrire la relation : $CH + AH = BC$ soit $x + y = 6$. Nous en déduisons : $x^2 - y^2 = (x + y) \times (x - y) = 6 \times (x - y) = 24$ puis : $x - y = \frac{24}{6} = 4$.

3. Des relations $\begin{cases} x + y = 6 \\ x - y = 4 \end{cases}$ on déduit : $x = 5$; $y = 1$

L'une ou l'autre des deux relations de Pythagore obtenues précédemment permet de déterminer *BH* :
$x^2 + BH^2 = 25 + BH^2 = 49$ donc $BH^2 = 49 - 25 = 24$ et $BH = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

4. L'aire du triangle *ABC* est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times AC \times BH = \frac{1}{2} \times 6 \times \left(2\sqrt{6}\right) = 6\sqrt{6}$.
Cette aire n'est pas un nombre entier, le triplet (5, 6, 7) n'est pas héronien.

Partie C : Un triangle héronien dont l'aire est un nombre sphénique

1.a. Les quatre plus petits multiples de 10 qui sont des nombres sphéniques :

Les multiples de dix sphéniques sont le produit de 2, de 5, et d'un nombre premier distinct de 2 et de 5.

Les quatre plus petits : $2 \times 5 \times 3 = 30$; $2 \times 5 \times 7 = 70$; $2 \times 5 \times 11 = 110$; $2 \times 5 \times 13 = 130$

1.a. Le plus petit nombre sphénique supérieur à 111 :

Nous repérons $114 = 2 \times 3 \times 19$ qui est l'heureux lauréat de la question.

2. Les nombres hexagonaux :

2.a. Par simple comptage sur la figure : $h_3 = 19$.

La couche suivante est composée de 18 points. En conséquence : $h_4 = h_3 + 18 = 37$

2.b. D'après la construction décrite, pour tout entier *n* au moins égal à 2, la couche de niveau *n* est composée de $6 \times (n - 1)$ points.

Le nombre h_n de points obtenus lorsqu'il y a *n* couches s'exprime donc ainsi :

$$h_n = 1 + 6 \times (1 + 2 + \cdots + (n - 1)) = 1 + 6 \times \frac{n(n-1)}{2} = 3n^2 - 3n + 1$$

Cette expression est utilisable également lorsque $n = 1$.

3. Un triplet héronien dont l'aire est sphénique

D'après les résultats de la question précédente, nous cherchons un nombre entier *y* compris entre 19 et 37 tel que le triangle (19, *y*, 37) soit héronien d'aire 114.

Le demi-périmètre de ce triangle est : $s = \frac{19+y+37}{2} = 38 + \frac{y}{2}$

Compte tenu de la formule de Héron que nous admettons :

$$\mathcal{A} = \sqrt{\left(28 + \frac{y}{2}\right) \times \left(28 + \frac{y}{2} - 19\right) \times \left(28 + \frac{y}{2} - y\right) \times \left(28 + \frac{y}{2} - 37\right)} = 114$$

Soit :

$$\sqrt{\left(28 + \frac{y}{2}\right) \times \left(28 - \frac{y}{2}\right) \times \left(9 + \frac{y}{2}\right) \times \left(-9 + \frac{y}{2}\right)} = 114$$

Elevons au carré et aménageons le premier membre :

$$\left(28^2 - \frac{y^2}{4}\right) \times \left(9^2 - \frac{y^2}{4}\right) = 114^2 = 12996$$

Soit, aussi bien :

$$(56^2 - y^2) \times (y^2 - 18^2) = 16 \times 12996$$

3.b. Notre logiciel de calcul formel favori nous assure qu cette équation en *y* est équivalente à l'équation

$$(y^2 - 400) \times (y^2 - 3060) = 0$$

On lit en effet :

$\text{expand}\left(\left(y^2-400\right)\cdot\left(y^2-3060\right)\right)$	$y^4-3460\cdot y^2+1224000$
$\text{expand}\left(\left(y^2-18^2\right)\cdot\left(56^2-y^2\right)-16\cdot 12996\right)$	$-y^4+3460\cdot y^2-1224000$

3.c. D'après l'équation précédente :

- Ou bien $y^2 - 3060 = 0$, mais 3060 n'est pas le carré d'un nombre entier, cette éventualité est à exclure.
- Ou bien $y^2 - 400 = 0$, équation qui a bien une solution entière comprise entre 19 et 37, en l'occurrence la solution $y = 20$.

Il existe bien un triangle répondant à la question, le triangle (19 ; 20 ; 37).

Partie D : Triangles isocèles héroniens.

En préalable à cette partie, soit *ABC* un triangle isocèle de sommet *A*. Notons $b = AC = AB$ la longueur des deux côtés égaux de ce triangle et notons $a = BC$ la longueur de sa base.

En raison de l'inégalité triangulaire dans un triangle, nous pouvons affirmer que $0 < a < 2b$.

La longueur de la hauteur issue de *A* est : $h = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

L'aire de ce triangle est : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times a \times \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$

1. Lorsque $a = 5$; $b = 6$, nous obtenons : $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times \sqrt{25 - \frac{36}{4}} = 10$. Il s'agit d'un nombre entier, ce qui montre que le triangle en question est héronien.

2. Nous proposons deux algorithmes, l'un avec TI-Nspire, l'autre avec Python. Les deux algorithmes affichent une liste de triangles héroniens répondant à la question (la même, c'est rassurant …).

isoheron(2,10)

5 6 10

Terminé

isoheron(10,50)

13 10 78
17 30 68
25 14 300
29 42 290
37 70 222
41 18 820

Terminé

"isoheron" enregistr. effectué

Define **isoheron**(b,c)=
Prgm
Local x,a
For x,b,c
  For $a,1,2\cdot x-1$
    If gcd(a,x)=1 Then

$$\frac{x\cdot\sqrt{x^2-\frac{a^2}{4}}}{2}\rightarrow u$$

      If fPart (u)=0 Then
        Disp x,a,u
      EndIf
    EndIf
  EndFor
EndFor
EndPrgm

```
>>> def isoheron(b,c):
        for x in range(b,c+1):
                for a in range(1,2*x):
                        if gcd(x,a)==1:
                                aire=x*sqrt(x**2-(a**2)/4)/2
                                if aire-floor(aire)==0:
                                        print("le triangle de côté",x,"et de base",a,"est héronien d'aire",aire)


>>> isoheron(2,10)
le triangle de côté 5 et de base 6 est héronien d'aire 10.0
>>> isoheron(10,50)
le triangle de côté 13 et de base 10 est héronien d'aire 78.0
le triangle de côté 17 et de base 30 est héronien d'aire 68.0
le triangle de côté 25 et de base 14 est héronien d'aire 300.0
le triangle de côté 29 et de base 42 est héronien d'aire 290.0
le triangle de côté 37 et de base 70 est héronien d'aire 222.0
le triangle de côté 41 et de base 18 est héronien d'aire 820.0
>>>
```