Ecrit 2-2022. La fin du sujet

Ce document porte sur les dernières questions du sujet 2022. Il ne s'agit en aucun cas d'une « correction » de cette partie du sujet. Juste ce qui m'a intéressé.

Exercice 3.

Cet exercice amène d'abord à réfléchir sur la traduction d'inégalités larges ou strictes en langage courant :

« Moins de 20 » signifie : < 20 alors que « Au moins 50 » signifie : ≥ 50

« Plus de 50 » signifierait : > 50 alors que « au plus 20 » signifierait : ≤ 20. Ainsi, selon la façon sont on modifie la formulation, il faut être conscient qu'on peut changer la nature de l'inégalité.

Si on veut garder scrupuleusement cette nature on peut proposer : « 2/5 du groupe a 50 ans ou plus ».

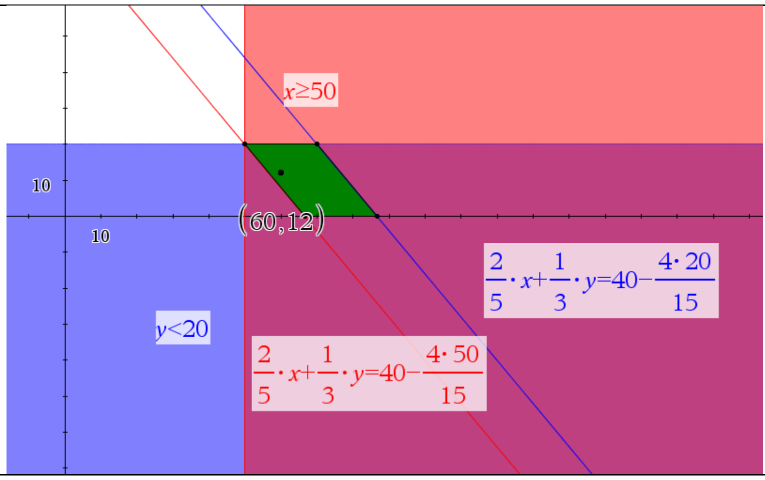
Le groupe est composé de 2/5 de personnes de plus de 50 ans (désignons par *x* l'âge moyen de ces personnes), de 1/3 de personnes de moins de 20 ans (désignons par *y* l'âge moyen de ces personnes) et par 4/15 de personnes dont l'âge est compris entre 20 et 50 ans (désignons par *z* l'âge moyen de ces personnes)

Nous avons les inégalités : $x \geq 50$; $0 \leq y < 20$; $20 \leq z < 50$

La moyenne d'âge du groupe est : $m = \frac{2x}{5} + \frac{y}{3} + \frac{4z}{15} = \frac{6x+5y+4z}{15}$

On peut minorer m : $m > \frac{6\times 50+4\times 20}{15} = \frac{76}{3}$ ce qui laisse une marge confortable pour obtenir une moyenne générale égale à 40.

Une méthode graphique : on détermine une « zone verte » dans laquelle on peut choisir des paramètres *x* et *y* permettant une moyenne générale égale à 40.
Cette zone n'étant pas vide, la réponse à la question posée est « oui ». On a indiqué ci-contre dans la zone verte un exemple de choix convenable de paramètres.



Une méthode empirique :

Cet intéressant exercice à l'énoncé ouvert pose une question tactique : penche-t-on du côté « Oui c'est possible » ou du côté « Non c'est impossible » . Dans le premier cas, il suffira d'exhiber un exemple de groupe de personnes dont la moyenne d'âge est 40 ans. Dans le deuxième cas, le travail est beaucoup plus ardu : il faudra démontrer que quels que soient les âges des éléments du groupe, la moyenne n'est jamais 40 ans.

Il vaut mieux miser sur « Oui c'est possible » et tenter de construire empiriquement un groupe qui réponde à la question. Vu qu'on utilise des fractions de dénominateurs 3 et 5, un groupe de 15 personnes paraît adéquat. Essayons avec 6 personnes de 60 ans et 5 enfants de 12 ans. Quel âge x devrait-on choisir des 4 personnes restantes pour que la moyenne d'âge soit 40 ?

La moyenne d'âge est : $\frac{1}{15} \times (6 \times 60 + 5 \times 12 + 4 \times x) = \frac{420+4x}{15}$

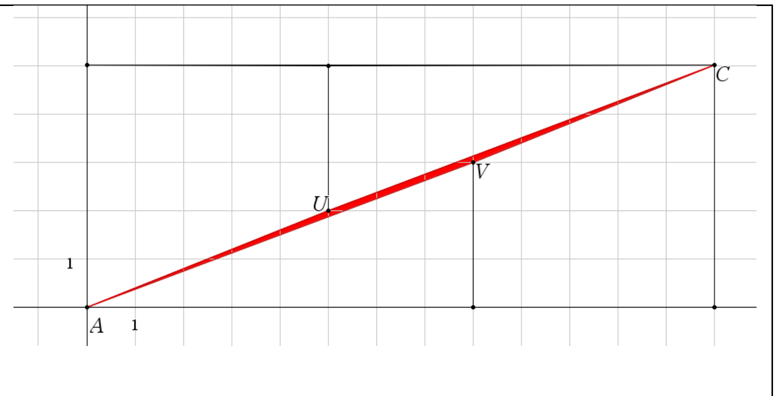
Et on obtient : $\frac{420+4x}{15} = 40$ lorsque $x = 45$. Bingo !

Un groupe de 6 personnes de 60 ans, 5 enfants de 12 ans et 4 personnes de 45 ans répond à la question.

Cet exercice est très représentatif du type « exercice avec prise d'initiative » car il n'y a ni stratégie déterminée ni solution unique. La « solution graphique » est passablemengt coûteuse et n'est pas forcément la meilleure.

Exercice 8.

La ficelle utilisée par Caroll est « visible à l'œil nu » pour peu que l'on reconstitue la figure de droite avec un quadrillage semblable à celle de gauche.



Voici une démonstration qui *ne mobilise pas* l'outil vectoriel (on y utilise l'outil analytique) :

On rapporte la figure au repère suggéré ci-dessus.

Dans ce repère, la droite (AC) a pour équation : $y - \frac{5x}{13} = 0$

D'une part : $y_U - \frac{5x_U}{13} = 2 - \frac{5\times5}{13} = \frac{1}{13}$ donc U est situé strictement au-dessus de (AC).

D'autre part : $y_V - \frac{5x_V}{13} = 3 - \frac{5\times8}{13} = -\frac{1}{13}$ donc V est situé strictement au-dessous de (AC).

Les points A, U, V, C ne sont pas des points alignés, il existe un parallélogramme « qu'on ne voit pas sur la figure, surtout si on la trafique ».

Cet exercice montre que l'on ne peut pas se fier à « ce qu'on voit sur le dessin ».

Exercice 9.

Coup de pouce : Rapporter l'espace à un repère d'origine *A* dont les axes sont les droites (*AB*), (*AD*) et (*AE*) et considérer les coordonnées des points utiles dans ce repère.

- Le point *I* a pour coordonnées : (1, 1, 8) et le point *J* a pour coordonnées : (4, 4, 8).
- Le point *I'* a pour coordonnées : (8, 4, 1) et le point *J'* a pour coordonnées : (4, 0, 1).

Deux démarches se distinguent :

D1. Déterminer une équation du plan déterminé par trois des quatre points et vérifier si, oui ou non, les coordonnées du quatrième point vérifie cette équation. Ainsi par exemple, si $ax + by + cz + d = 0$ est l'équation d'un plan, ce plan est le plan *IJJ'* si :

$$\begin{cases} a + b + 8c + d = 0 \\ 4a + 4b + 8c + d = 0 \\ 4a + c + d = 0 \end{cases}$$

Ce qui amène à l'équation : $\left(\frac{-7x}{32} + \frac{7y}{32} - \frac{z}{8} + 1\right) \times d = 0.$

Une équation du plan (*IJJ'*) est : $-7x + 7y - 4z + 32 = 0$

Or : $-7 \times 8 + 7 \times 4 - 4 + 32 = 0$, ce qui prouve que *I'* est dans ce plan : les droites sont coplanaires et non parallèles, elles sont bien sécantes.

D2. Déterminer des équations paramétriques de (*II'*) et de *(JJ'*) et voir si ces deux droites ont, ou non, un point commun. Ainsi

Le vecteur $\overrightarrow{II'}$ a pour coordonnées (7, 3, - 7)

Le vecteur $\overrightarrow{JJ'}$ a pour coordonnées (0, - 4, - 7)

La droite (*II'*) a pour équations paramétriques : $\begin{cases} x = 1 + 7\alpha \\ y = 1 + 3\alpha \\ z = 8 - 7\alpha \end{cases}$

La droite (*JJ'*) a pour équations paramétriques : $\begin{cases} x = 4 \\ y = 4 - 4\beta \\ z = 8 - 7\beta \end{cases}$

On cherche s'il existe ou non des valeurs de α et β telles que : $\begin{cases} 4 + 3\beta = 1 + 7\alpha \\ 4 - \beta = 1 + 3\alpha \\ 8 - 7\beta = 8 - 7\alpha \end{cases}$. Il y a trois équations pour seulement deux inconnues, mais en l'occurrence ces trois équations compatibles, le système considéré a pour solution $\alpha = \beta = \frac{3}{7}$, les deux droites ont un point commun, le point de coordonnées $\left(4,\ \frac{16}{7}, 5\right)$. L'avantage de cette démarche est qu'elle fournit les coordonnées du point d'intersection quand il existe.

Si je ne m'abuse, très curieusement, et contrairement à ce à quoi on s'attendait, les deux droites sont bien sécantes. Un élève pourrait rétorquer « A quoi bon tout ce tralala, on voit bien sur le dessin que les deux droites se coupent ». Se référer au sujet 2016.03 dans la page « Annales ESD » pour des éléments de réponse à l'objection de cet élève.

4

Exercice 10.

Cet exercice est un exercice portant sur un lieu géométrique. Il serait possible de poser la question ainsi : « Déterminer l'ensemble des points *M* tels que (*EH*) et (*FG*) soient parallèles ».

Voir REDCM pages 62 et 64 à propos des « problèmes de lieu géométrique ».

La démarche du groupe 1 illustre une méthode d'analyse et synthèse. L'erreur que commet ce groupe est une erreur de raisonnement, en ne distinguant pas la phase « analyse » de la phase « synthèse ». Ils justifient plus ou moins que si *M* est sur la diagonale [*BD*], alors il y a parallélisme, mais ne démontrent pas la propriété directe (qui n'est dans leur production qu'une conjecture).

Supposons que les deux droites soient parallèles (donc que *M* est un point intérieur au carré placé « un bon endroit »). Nous pouvons écrire : $\frac{ME}{MF} = \frac{MH}{MG}$ d'où nous pouvons déduire : $\frac{ME}{MH} = \frac{MF}{MG}$.

Nous obtenons un rapport égal en ajoutant les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux : $\frac{ME}{MH} = \frac{MF}{MG} = \frac{ME+MF}{MH+MG} = \frac{EF}{HG} = \frac{AB}{AD} = 1$

Il en résulte que : $ME = MH$ et $MH = MG$. Les rectangles *MEDH* et *MFBG* sont donc des carrés.

Nous pouvons en déduire que *D* appartient à la diagonale [*BD*].

L'analyse de la figure montre que si les deux droites (*EH*) et (*FG*) sont parallèles, alors *D* appartient à la diagonale [*BD*] extrémités exclues.

Réciproquement, si *D* appartient à la diagonale [*BD*] extrémités exclues, alors les rectangles *MEDH* et *MFBG* sont deux carrés. Or, dans un carré, les diagonales sont perpendiculaires. Les deux droites (*EH*) et (*FG*) sont parallèles car elles sont toutes deux perpendiculaires à la diagonale commune aux deux carrés.

Les deux droites (*EH*) et (*FG*) sont parallèles si et seulement si *D* appartient à la diagonale [*BD*] extrémités exclues.

La méthode du groupe 2 illustre l'usage de l'outil analytique dans la résolution d'un problème de lieu.

Pour cela, il s'agit de traduire la condition géométrique « parallélisme » en une condition algébrique.

Ce groupe n'arrive pas à communiquer correctement sa démarche. Il faut donc la reprendre :

Indiquer quel est le repère utilisé. (Le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ sera très probablement le plus populaire, adjugé !).

Définir les paramètres, en l'occurrence les coordonnées (*x*, *y*) de *M*, avec leur champ de définition, en l'occurrence $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$.

Les calculs de coordonnées effectués par ce groupe sont corrects.

Le vecteur $\overrightarrow{EH}$ a pour coordonnées $(x\,;1 - y)$.

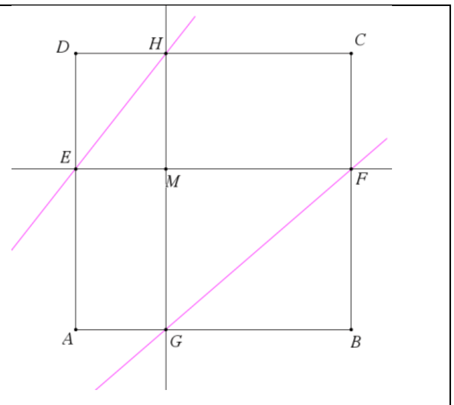
Le vecteur $\overrightarrow{GF}$ a pour coordonnées $(1 - x\,;\ y)$.

On note que si les conditions $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$ sont vérifiées, aucun des deux vecteurs n'est nul, les points *E* et *H* de même que *F* et *G* sont distincts et les droites (*EH*) et (*FG*) sont correctement définies.

Il reste à caractériser algébriquement le parallélisme des deux droites :

$$\det\left(\overrightarrow{EH}\,;\,\overrightarrow{GF}\right) = \begin{vmatrix} x & 1-x \\ 1-y & y \end{vmatrix} = -1 + x + y$$

Ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul, c'est-à-dire si et seulement si :
$-1 + x + y = 0$ ou aussi bien si et seulement si $y = 1 - x$



Puis à identifier géométriquement l'ensemble dont on a obtenu une équation cartésienne : $\begin{cases} y = 1 - x \\ 0 < x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ *M* appartient au segment [*BD*], extrémités exclues.