# Une numérotation du réseau Z²

*Suite à l'un des problèmes du CAPES 2017, j'ai effectué quelques recherches dans mes archives à propos du réseau* $\mathbf{Z}^2$.

*J'ai dégotté page 30 du Magnard Audirac 1983, un de mes manuels de référence, ce qui suit, affecté de deux redoutables points rouges.*

*L'objectif est de montrer que* $\mathbf{Z}^2$ *est dénombrable en proposant un mode de numérotation de ses éléments :*

•• **63.** On se propose de montrer que $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable en donnant un procédé de numérotation de ses éléments. A cet effet, on fait correspondre à ceux-ci les points à coordonnées entières d'un plan rapporté à un repère orthonormal et on trace la ligne brisée à allure de spirale passant par $A_0(0,0)$ ; $A_1(1,0)$ ; $A_2(1,1)$ ; $A_3(0,1)$ ; $A_4(-1,1)$ etc...

1) Les sommets se répartissent sur quatre demi-droites qu'on caractérisera, la première correspondant à $y=x$ et $x \leqslant 0$.

2) Chaque « spire » est affectée d'un numéro ;
la spire $(A_0, A_1 \dots A_5)$ reçoit le numéro 0
la spire $(A_6, A_7 \dots A_{19})$ reçoit le numéro 1 etc...
Montrer que les $A_n$ appartenant à la spire d'ordre $p$ sont tels que $2p(2p+1) \leqslant n < (2p+2)(2p+3)$.

3) En déduire que, $n$ étant donné, $p = E\left(\dfrac{\sqrt{4n+1}-1}{4}\right)$.

4) Donner, en fonction de $n$ et $p$, les coordonnées de $A_n$. On commencera par distinguer la région du plan à laquelle appartient ce point et on aura donc quatre cas à examiner.

5) Réciproquement, un point $A(x, y)$ à coordonnées entières étant donné, trouver son numéro sur la spirale.

6) Réaliser un dessin soigné en marquant par leur numéro les points jusqu'à $A_{100}$ (au moins) ; observer la répartition des points de numéro premier.

*Il me semble cependant que dans cet énoncé certaines choses ne fonctionnent pas correctement, ou même pas du tout. Ou alors m'échappent complètement. Pour ma part, je ne trouve pas du tout les mêmes « spires » que celles du sujet original.*

*Aussi je vais en proposer une nouvelle mouture. L'énoncé que je propose est beaucoup plus fermé. La raison en est qu'il y a une distinction en quatre cas à faire, et il y a diverses façons de distinguer ces quatre cas. J'en ai choisi arbitrairement une ce qui peut expliquer, sinon justifier, cette directivité.*

*La mode étant à l'utilisation du « numérique », voici une situation dans laquelle il sera possible d'automatiser la numérotation. C'est ce qui est demandé en fin de sujet, et qui bien entendu ne l'était pas en 1983.Cette automatisation est incontestablement une avancée dans ce contexte. Ici, elle fait suite à une étude mathématique assez longue et complexe, dont elle permet de tester et de valider les conclusions. Il n'est pas certain que, de nos jours, un recours à l'automatisation soit toujours aussi opportun.*

*Ayons une pensée émue et recueillie pour ceux et celles des élèves de terminale C 1983 qui ont peut-être un jour abordé ce problème à mains nues.*

## 1. Le sujet

On se propose de montrer que $\mathbf{Z}^2$ est dénombrable en donnant un procédé de numérotation de ses éléments.

À cet effet, on fait correspondre à ceux-ci les points à coordonnées entières d'un plan rapporté à un repère cartésien et on trace la ligne brisée à allure de spirale passant par les points $M_0\,(0,\ 0)$ ; $M_1\,(1,\ 0)$ ; $M_2\,(1,\ 1)$ ; $M_3\,(0,\ 1)$ ; $M_4\,(-1,\ 1)$ ; $M_5\,(-1,\ 0)$ ; $M_6\,(-1,\ -1)$ ; $M_7\,(0,\ -1)$ ; $M_8\,(1,\ -1)$ puis $M_9\,(2,\ -1)$ ; $M_{10}\,(2,\ 0)$ etc… en numérotant dans le sens trigonométrique les points à coordonnées entières du pourtour du carré dont les sommets sont les points $A_2\,(2,-2)$ ; $B_2\,(2,\ 2)$ ; $C_2\,(-2,\ 2)$ ; $D_2\,(-2,\ -2)$. Et ainsi de suite.

**1.** Soit $s$ un nombre entier strictement positif. On appelle « spire d'ordre $s$ » l'ensemble des points à coordonnées entières appartenant au pourtour du carré dont les sommets sont les points $A_s\,(s,\ -s)$ ; $B_s\,(s,\ s)$ ; $C_s\,(-s,\ s)$ ; $D_s\,(-s,\ -s)$. On pourra remarquer que ce pourtour du carré $A_sB_sC_sD_s$ est la réunion des quatre segments semi-fermés $]A_sB_s]$ ; $]B_sC_s]$ ; $]C_sD_s]$ ; $]D_sA_s]$.

**1.1.** Montrer qu'il y a $8s$ points à coordonnées entières sur la spire d'ordre $s$.

**1.2.** Combien de points à coordonnées entières sont-ils situés à l'intérieur de la spire d'ordre $s$ (origine y compris) ?

**2.** Soit $s$ un nombre entier strictement positif. Quels sont les numéros affectés aux points suivants :

$M\ (s,\ -s+1)$ ; $B_s\,(s,\ s)$ ; $C_s\,(-s,\ s)$ ; $D_s\,(-s,\ -s)$ ; $A_s\,(s,\ -s)$ ?

**3.1.** Soit $s$ un nombre entier strictement positif. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $n$ pour que le point $A_n$ appartienne à la spire d'ordre $s$.

**3.2.** En déduire que pour tout entier $n$ strictement positif, $A_n$ appartient à la spire dont l'ordre est : $s = E\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{2}\right)$, où $E$ désigne la fonction partie entière.

**4.** Soit $n$ un entier strictement positif. On pose : $s = E\left(\frac{\sqrt{n}+1}{2}\right)$ et on se propose de donner, en fonction de $n$ et de $s$, les coordonnées du point de numéro $n$.

**4.1.** Vérifier que : $4s^2 - 4s < n \leq 4s^2 + 4s$

**4.2.** Justifier le tableau de correspondance suivant :

| Si | alors les coordonnées de $A_n$ sont : |
|---|---|
| $4s^2 - 4s < n \leq 4s^2 - 2s$ | $(s \; ; \; n - 4s^2 + 3s)$ |
| $4s^2 - 2s < n \leq 4s^2$ | $(4s^2 - s - n \; ; \; s)$ |
| $4s^2 < n \leq 4s^2 + 2s$ | $(-s \; ; \; 4s^2 + s - n)$ |
| $4s^2 + 2s < n \leq 4s^2 + 4s$ | $(n - 4s^2 - 3s \; ; \; -s)$ |

**5.** Réciproquement, soit $M\ (x,\ y)$ un point du plan. On pose : $s = \max(|x|,\ |y|)$ et on se propose de déterminer, suivant les valeurs de $x$ et de $y$, le numéro affecté au point $M$.

Justifier le tableau de correspondance ci-dessous :

| Si | alors le numéro de $M$ est : |
|---|---|
| $s = x$ **et** $-x < y \leq x$ | $4x^2 - 3x + y$ |
| $s = y$ **et** $-y \leq x < y$ | $4y^2 - x - y$ |
| $s = -x$ **et** $x < y \leq -x$ | $4x^2 - x - y$ |
| $s = -y$ **et** $y < x \leq -y$ | $4y^2 - 3y + x$ |

(On aura quatre cas à distinguer, suivant que $M$ se trouve sur un côté ou un autre de sa spire).

**6.1.** Ecrire un programme ou une fonction affectant son numéro à un point $M\ (x,\ y)$ de coordonnées entières donné.

**6.2.** Ecrire un programme ou une fonction affectant ses coordonnées à un point de numéro donné.

**7.** Applications numériques :

- Numéros des points $M_1(66,\ 49)$ ; $M_2(-66,\ 49)$ ; $M_3(49,\ 66)$ ; $M_4(-49,\ -66)$
- Coordonnées de $A_{2018}$.

**8.** Pour $p$ entier, on note $D_p$ la droite d'équation $y = x - 2p$ et $D'_p$ la droite d'équation $y = -x + 2p$ . Montrer que, si on excepte le cas de $A_2\ (1,\ 1)$ qui est sur $D_0$, il n'y a pas sur ces droites de point dont le numéro est un nombre premier.

## 2. Eléments de correction

**1.1.** Le pourtour du carré $A_sB_sC_sD_s$ est la réunion des quatre segments $]A_sB_s]$ ; $]B_sC_s]$ ; $]C_sD_s]$ ; $]D_sA_s]$
Un point $M(x,\ y)$ appartient au segment $]A_sB_s]$ si et seulement si : $x = s$ ; $-s < y \leq s$. De plus $y$ est un entier si et seulement si il appartient à l'ensemble de $2s$ éléments : $\{-s+1,\ -s-2, ...,\ s-1,\ \ s=-s+2s\}$. Il y a $2s$ points à coordonnées entières sur ce segment.
Un point $M(x,\ y)$ appartient au segment $]B_sC_s]$ si et seulement si : $y = s$ ; $-s \leq x < s$. De plus $x$ est un entier si et seulement si il appartient à l'ensemble de $2s$ éléments : $\{-s,\ -s+1, ...,\ s-1=-s+(2s-1)\}$. Il y a $2s$ points à coordonnées entières sur ce segment.
Un point $M(x,\ y)$ appartient au segment $]C_sD_s]$ si et seulement si : $x = -s$ ; $-s \leq y < s$. De plus $y$ est un entier si et seulement si il appartient à l'ensemble $\{-s,\ -s+1, ...,\ s-1=-s+(2s-1)\}$. Il y a $2s$ points à coordonnées entières sur ce segment.
Un point $M(x,\ y)$ appartient au segment $]D_sA_s]$ si et seulement si : $y = s$ ; $-s < x \leq s$. De plus $x$ est un entier si et seulement si il appartient à l'ensemble $\{-s+1,\ -s-2, ...,\ s-1,\ \ s=-s+2s\}$. Il y a $2s$ points à coordonnées entières sur ce segment.

Il y a $8s$ points à coordonnées entières sur la spire d'ordre $s$.

**1.2.** Il y a $1+\sum_{t=1}^{t=s-1} 8t = 1+8\times\dfrac{s(s-1)}{2} = 1+4s(s-1) = (2s-1)^2$ points à coordonnées entières qui sont strictement à l'intérieur de la spire d'ordre $s$ et $1+\sum_{t=1}^{t=s} 8t = 1+8\times\dfrac{s(s+1)}{2} = 1+4s(s+1) = (2s+1)^2$ points à coordonnées entières qui sont au sens large à l'intérieur de la spire d'ordre $s$ (cette frontière comprise).

**2.** Par construction, $M\ (s,\ -s+1)$ est le premier point numéroté de la spire d'ordre $s$. Puisqu'il y a $(2s-1)^2$ points strictement intérieurs à cette spire, numérotés de 0 à $(2s-1)^2-1 = 4s^2-4s$, ce point porte le numéro suivant c'est-à-dire le numéro $(2s-1)^2 = 4s^2-4s+1$

Le point $B_s$ est le $(2s)^{ème}$ point numéroté de cette spire et porte le numéro $(2s-1)^2+(2s-1) = 4s^2-2s$

Le point $C_s$ est le $(4s)^{ème}$ point numéroté de cette spire et porte le numéro $(2s-1)^2+(4s-1) = 4s^2$

Le point $D_s$ est le $(6s)^{ème}$ point numéroté de cette spire et porte le numéro $(2s-1)^2+(6s-1) = 4s^2+2s$

Le point $A_s$ est le $(8s)^{ème}$ point numéroté de cette spire et porte le numéro $(2s-1)^2+(8s-1) = 4s^2+4s$

**3.** D'après la question précédente, un point $A_n$ appartient à la spire d'ordre $s$ si et seulement si $(2s-1)^2 \leq n < (2s+1)^2$, c'est-à-dire si et seulement si $s \leq \dfrac{\sqrt{n}+1}{2} < s+1$.

Cette double inégalité caractérise la partie entière de $\dfrac{\sqrt{n}+1}{2}$.

Le point de numéro $n$ appartient à la spire d'ordre : $E\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{2}\right)$.

**4.1.** Si on détaille ce qu'on vient de dire : $s = E\left(\dfrac{\sqrt{n}+1}{2}\right) \Leftrightarrow_{gjulia2017} s \le \dfrac{\sqrt{n}+1}{2} < s+1$

$s \le \dfrac{\sqrt{n}+1}{2} < s+1 \Leftrightarrow 2s-1 \le \sqrt{n} < 2s+1$. Puisque $n \ge 1$, $2s-1$ est positif, la double inégalité ne concerne que des nombres positifs : $2s-1 \le \sqrt{n} < 2s+1 \Leftrightarrow 4s^2-4s+1 \le n < 4s^2+4s+1$.

Et puisqu'il s'agit de nombres entiers : $4s^2-4s+1 \le n < 4s^2+4s+1 \Leftrightarrow 4s^2-4s < n \le 4s^2+4s$ (dans l'ensemble des entiers être supérieur ou égal à un entier $m$ équivaut à être strictement supérieur à l'entier $m-1$)

**4.2.** Suivant les valeurs relatives de $n$ et de $s$, le point $A_n$ appartient à l'un ou l'autre des quatre segments $]A_sB_s]$ ; $]B_sC_s]$ ; $]C_sD_s]$ ; $]D_sA_s]$.

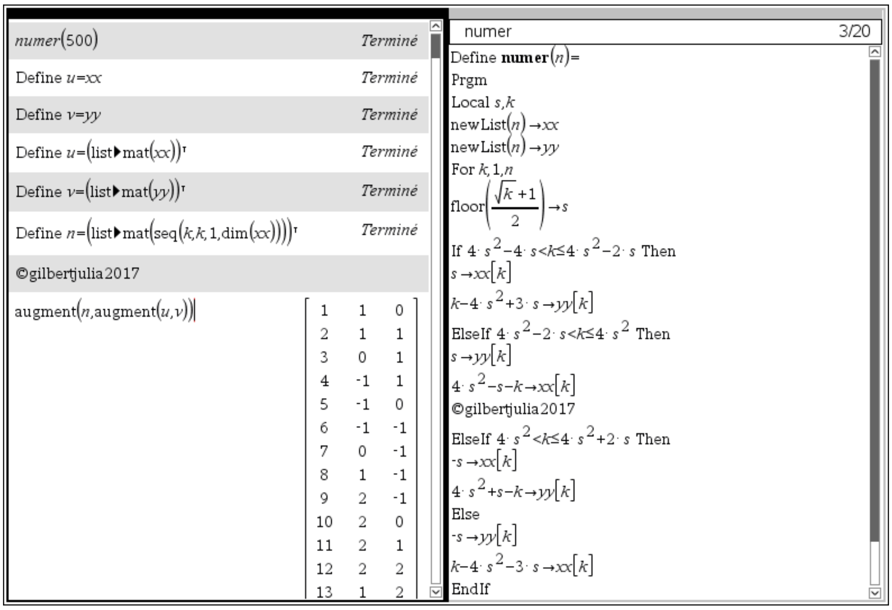
**Premier cas :** $4s^2-4s < n \le 4s^2-2s$ : $A_n$ appartient au segment $]D_sA_s]$ et a pour coordonnées $\left(s,_{gj}\ n-\left(4s^2-4s\right)-s = n-4s^2+3s\right)$

**Deuxième cas :** $4s^2-2s < n \le 4s^2$ : $A_n$ appartient au segment $]A_sB_s]$ et a pour coordonnées $\left(4s^2-s-n,_{gj}\ s\right)$

**Troisième cas :** $4s^2 < n \le 4s^2+2s$ : $A_n$ appartient au segment $]B_sC_s]$ et a pour coordonnées $\left(-s,_{gj}\ \left(4s^2+2s\right)-n-s = 4s^2+s-n\right)$.

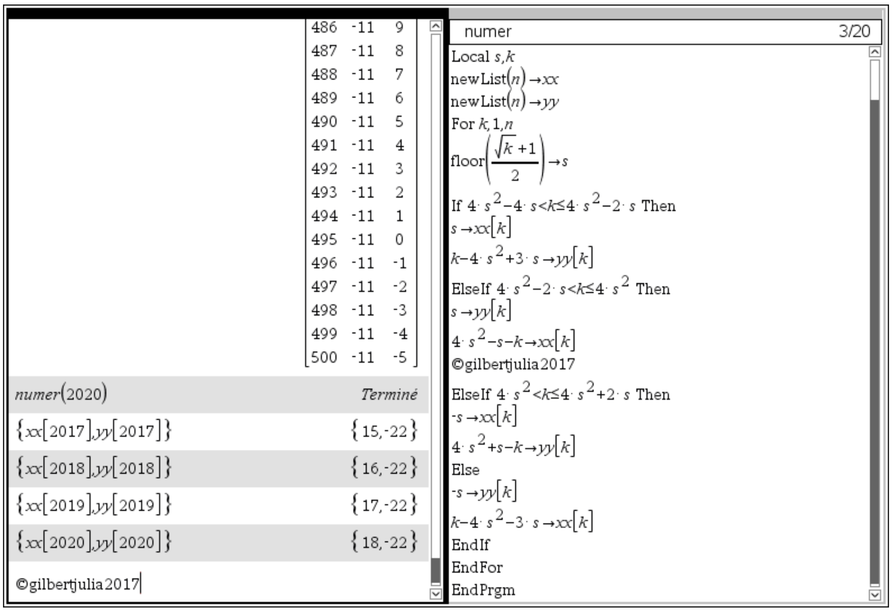
**Quatrième cas :** $4s^2+2s < n \le 4s^2+4s$ : $A_n$ appartient au segment $]C_sD_s]$ et a pour coordonnées $\left(n-\left(4s^2+4s\right)+s = n-4s^2-3s,_{gj}\ -s\right)$.

La numérotation est automatisée par le programme **numer**, pourvu d'un argument $n$, qui renvoie, sous formes de deux listes, l'abscisse et l'ordonnée des points $A_k$ ; $k \in \{1, 2, ..., n\}$.



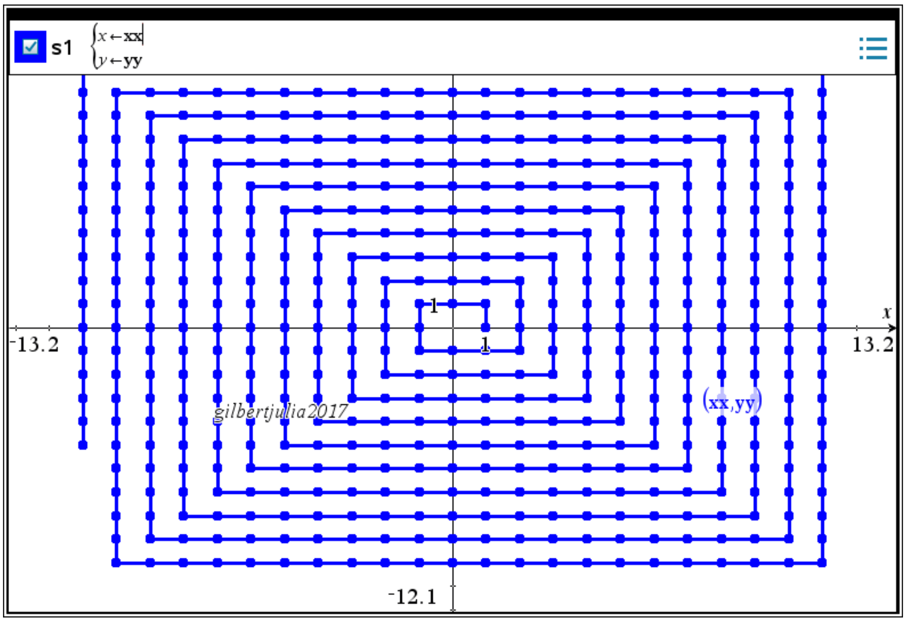
Sur la partie gauche, ces listes sont transformées en matrices et sont affichées avec la numérotation correspondante.

Il est possible aussi de faire afficher les coordonnées d'un point de numéro donné.




Le nuage des points ainsi numérotés peut être représenté sur un graphique (il faudrait rajouter l'origine).

L'inconvénient est que les numéros ne figurent pas à côté des points du réseau. Il est possible que l'on puisse y remédier (?).




**5.** Le nombre $s$ tel qu'il est défini représente le numéro d'ordre de la spire sur laquelle se trouve le point $M$.

**Premier cas :** $s = x$ **et** $-x < y \leq x$ : le point $M$ appartient au segment $]A_x\, B_x]$. Son numéro est celui de $B_x$ diminué de $y(B_x) - y(M)$ soit $4x^2 - 3x + y$

**Deuxième cas :** $s = y$ **et** $-y \leq x < y$ : le point $M$ appartient au segment $]B_x\, C_x]$.

Son numéro est celui de $C_x$ diminué de $x(M) -_{gj} x(C_x)$ soit $4y^2 - (x + y) = 4y^2 - x - y$

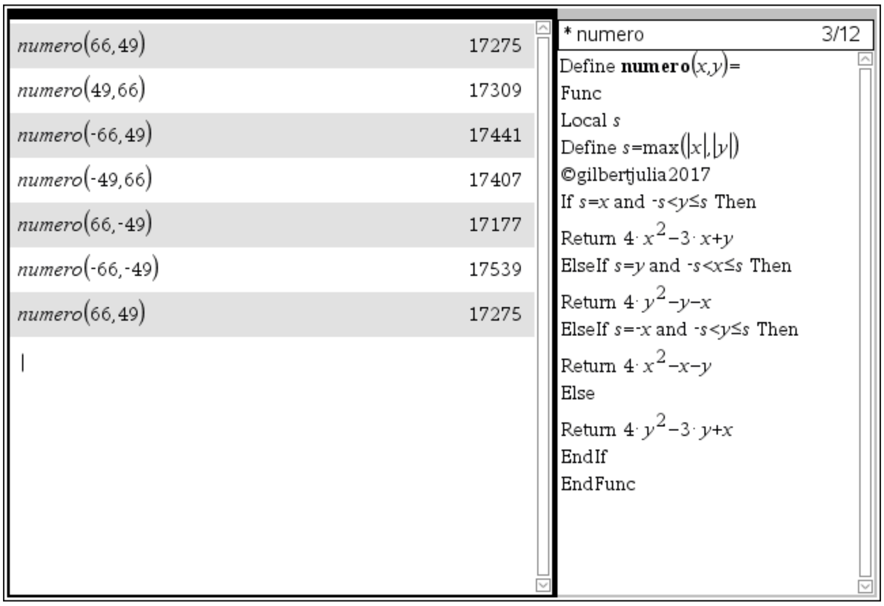
**Troisième cas :** $s = -x$ **et** $x < y \leq x$ : le point $M$ appartient au segment $]C_x\, D_x]$.

Son numéro est celui de $D_x$ diminué de $y(M) - y(D_x)$ soit $(4x^2 - 2x) - (y - x)_{gjulia2017} = 4x^2 - x - y$

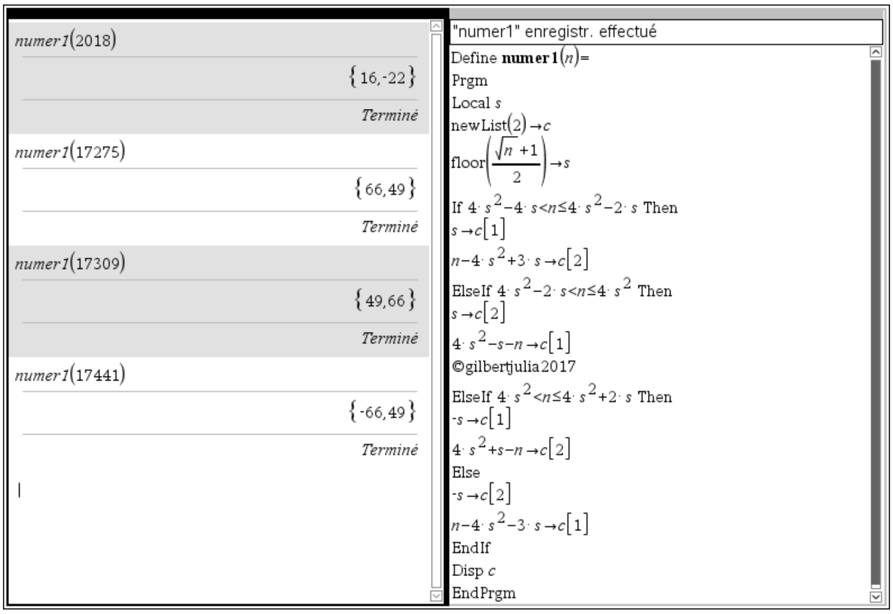
**Quatrième cas :** $s = -y$ **et** $y < x \leq -y$ : le point $M$ appartient au segment $]D_x\, A_x]$.

Son numéro est celui de $A_x$ diminué de $x(A_x) - x(M)$ soit $_{gj}(4y^2 - 4y) - (-y - x) = 4y^2 - 3y + x$

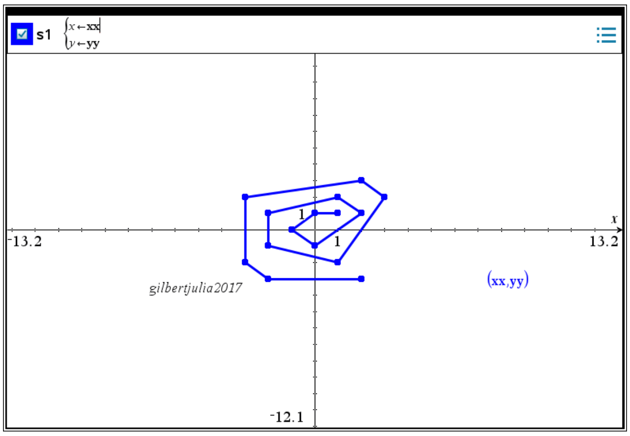
La fonction numero renvoie le numéro affecté à un point de coordonnées données …

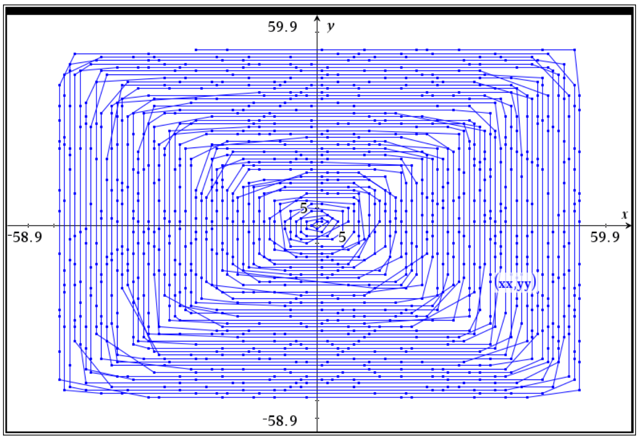


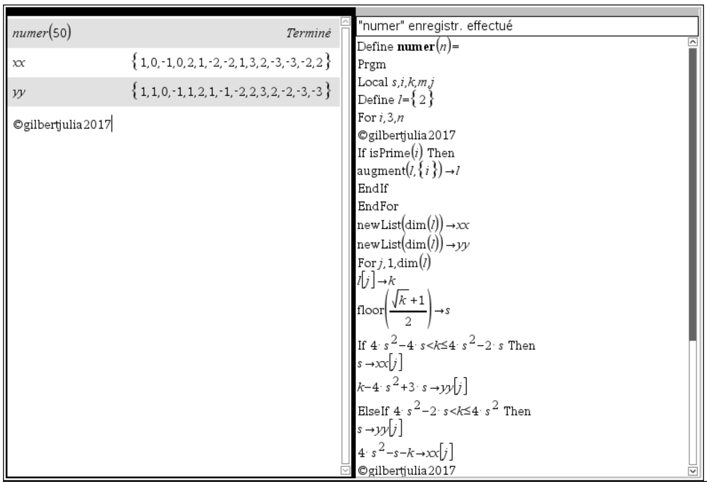

… tandis que le programme **numer1** affiche les coordonnées du point $A_n$ .




Quant à la distribution des points à numéros premiers, on ne voit pas grand-chose au premier abord…

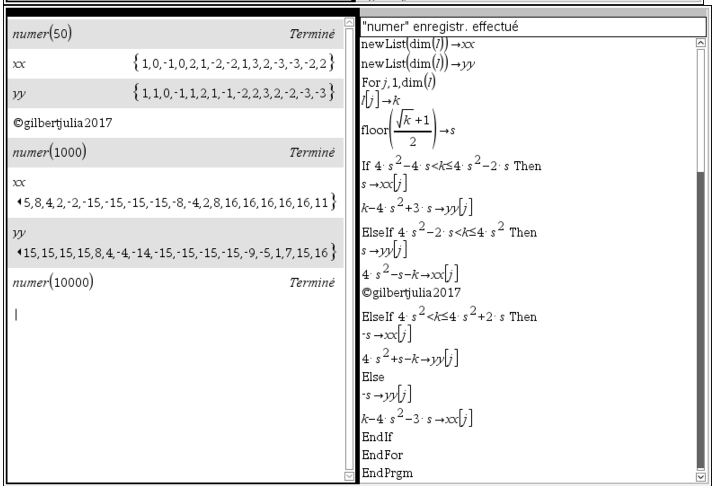




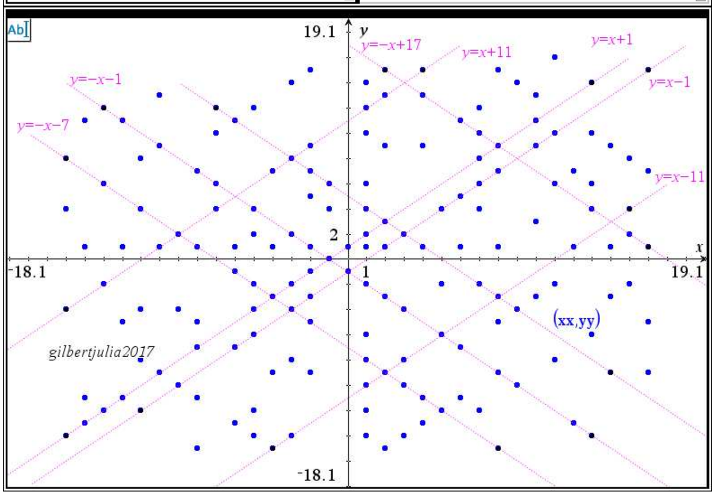

Pour obtenir cette distribution, le programme **numer** a été modifié de façon à ne retenir que les points à numéros $_{gilbertjulia2017}$ premiers.

Il a été exécuté avec $n = 50$ (graphique de gauche ci-dessus) puis avec $n = 10000$ (graphique de droite ci-dessus).




Puis avec $n = 1000$.

Ce n'est peut-être pas une bonne idée de relier ces points les uns aux autres, il n'y a aucune raison de le faire …




On distingue maintenant avec $n = 1000$ des alignements sur des droites parallèles à la droite d'équation $y = x$ ou à la droite d'équation $y = -x$.

Quelques uns d'entre eux ont été matérialisés. On peut conjecturer qu'il s'agit de droites d'équation de la forme $y = \pm x - (2p+1)$

Mais il y a aussi des alignements sur lesquels on peut conjecturer qu'il n'y a aucun point de numéro $_{gj}$ premier …

**8.** Soit $D_p$ la droite d'équation $y = x - 2p$. Supposons $p$ entier strictement positif.

Les spires d'ordre $< p$ n'ont pas de point commun avec $D_p$.

Le point $A_p\ (p, -p)$ de la spire d'ordre $p$ de numéro $_{gjulia}\ 4s^2 + 4s$ pair non premier appartient à $D_p$.

Les spires d'ordre $s > p$ ont avec $D_p$ deux points communs :

D'une part le point $M\ (s,\ s-2p)$ qui est sur $]A_s B_s]$ et de numéro $4s^2 - 2s - 2p$, numéro pair non premier.

D'autre part le point $N(-s+2p,\ -s)$ qui est sur $]D_s A_s]$ et de numéro $_{gj}\ 4s^2 + 3s + (-s+2p) = 4s^2 + 2s + 2p$, numéro pair non premier.

On note que ces points sont séparés l'un de $B_s$ l'autre de $D_s$ d'un nombre pair de points entiers, ce qui justifie que leurs numéros sont pairs, puisque $B_s$ et $D_s$ ont des numéros pairs.

De façon analogue, si $p$ est strictement négatif, $D_p$ coupe les spires d'ordre $s$ sur les segments $]B_s C_s]$ et $]C_s D_s]$ en des points qui sont séparés d'un sommet de la spire d'un nombre pair de points entiers. Comme les sommets ont des numéros pairs, il en sera de même de ces points d'intersection.

Quant aux droites $D'_p$ d'équation $y = -x + 2p$, lorsqu'elles coupent la spire d'ordre $s$, elles le font en des points séparés d'un sommet d'un nombre pair de points entiers. Ces points ont aussi un numéro pair.

Autrement dit, si on excepte le cas de $A_2$, aucun point de ces droites n'a un numéro premier. Tous les points entiers de ces droites ont des numéros pairs.

(Ce qui explique que les points de numéros premiers « s'alignent » sur des droites d'équation $y = \pm x - 2p + 1$)

Avec $n = 100000$ on obtient un effet tweed assez esthétique.