# La versiera de Maria Gaetana AGNESI

*En hommage à Maria Gaetana AGNESI (1718 – 1799), mathématicienne et philosophe italienne. Outre la rédaction d'un traité d'analyse mathématique, on lui doit l'étude d'une courbe, baptisée « versiera », dont le nom a été déformé au fil des traductions en « sorcière d'Agnesi ». On ne sait pourquoi, le nom sulfureux de « sorcière » est le plus communément employé.*

*Ici, nous appellerons toujours « versiera » la courbe en question. Rien ne justifie que le nom de « sorcière » soit associé, d'une quelconque façon, à Maria Gaetana.*

## 1. Le sujet

### Partie A : Un lieu géométrique

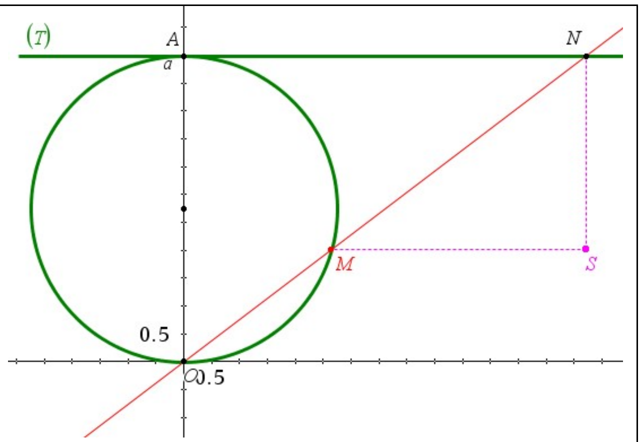
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$. Soit $a$ un réel strictement positif , $A$ le point du plan de coordonnées $(0\ ;\ a)$ et $\Gamma$ le cercle de diamètre $[OA]$.

$(T)$ est la tangente en $A$ au cercle $\Gamma$.

Pour tout point $M$ appartenant à $\Gamma$ et distinct de $O$, la droite $(OM)$ coupe $(T)$ en $N$.

On considère le point $S$ qui a la même abscisse que $N$ et la même ordonnée que $N$.

La « versiera d'Agnesi » est le lieu géométrique du point $S$ lorsque $M$ décrit le cercle $\Gamma$ privé du point $O$.



**1.** Ecrire une équation cartésienne du cercle Γ.

**2.** Pour tout point $M$ du cercle Γ et distinct de $O$, on désigne par θ la mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}\right)$ qui appartient à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2} ; +\frac{\pi}{2}\right[$ . Déterminer, en fonction de θ, les coordonnées du point $M$.

Démontrer que, en fonction de θ, les coordonnées du point $M$ sont : $\begin{cases} x_M = a.\sin\theta.\cos\theta \\ y_M = a.\cos^2\theta \end{cases}$.

**3.** Déterminer, en fonction de θ, les coordonnées du point $N$.

**4.** Déterminer, en fonction de θ, les coordonnées du point $S$.

**5.** Montrer que la « versiera d'Agnesi » est la courbe représentative de la fonction $f_a$ définie sur **R** par : $f_a(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$

## Partie B : Une famille de fonctions, une famille de courbes

Pour tout réel $a$ strictement positif on désigne par $f_a$ la fonction définie sur **R** par : $f_a(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$. On désigne par $C_a$ la courbe représentative de $f_a$ dans le repère orthonormé $\left(O ; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

**1. Etude de la fonction $f_1$ et représentation graphique**

**1.1.** Etudier la parité de la fonction $f_1$ et les éventuels éléments de symétrie de la courbe $C_1$.

**1.2.** Etudier les variations de la fonction $f_1$. En déduire l'allure de la courbe $C_1$.

**1.3.** Rechercher les points d'inflexion de la courbe $C_1$.

**2. Liens entre $C_1$ et $C_a$.**

Démontrer que la courbe $C_a$ est l'image de la courbe $C_1$ par l'homothétie $h_a$ de centre $O$ et de rapport $a$.

**3.** Représenter les courbes $C_1$ et $C_2$ sur un même graphique. Préciser, entre autres, leurs asymptotes, leurs sommets, leurs points d'inflexion.

## Partie C : Deux propriétés de la versiera

**1. L'aire sous la courbe :**
Déterminer, en fonction de $a$, l'aire du domaine situé entre l'axe $Ox$ et la courbe $C_a$

**2. Points de la versiera les plus proches de l'origine :**

Lou pense que les points de $C_a$ les plus proches de l'origine sont ses points d'inflexion, tandis que Pablo pense que les points de $C_a$ les plus proches de l'origine sont ses points d'abscisses $+\frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2}$. Qui a raison ?

## 2. Eléments de correction

### Partie A : un lieu géométrique

**1.** $\Gamma$ étant le cercle de diamètre $[OA]$, on privilégie la caractérisation de ce cercle à l'aide d'un diamètre.

Un point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartient au cercle $\Gamma$ si et seulement si le produit scalaire $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MA}$ est égal à zéro.

- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MO}$ : $(-x\ ;\ -y)$
- Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{MA}$ : $(-x\ ;\ a-y)$

La condition $\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{MA}=0$ se traduit analytiquement par : $(-x)\times(-x)+(-y)\times(a-y)=0$, c'est-à-dire par : l'équation cartésienne : $x^2+y^2-a\,y=0$

**2.** Soit $H$ le projeté orthogonal de $M$ sur l'axe $Oy$. Si $M$ est distinct de $O$, le point $H$ appartient au segment $]OA]$ et l'ordonnée de $H$ est strictement positive. Plus précisément : $0<y_H=y_m\leq a$

Le réel $\theta$ étant une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}\right)$, on dispose de la relation :

$x_M=\overline{HM}=OH.\tan\theta=y_M.\tan\theta$.

Les coordonnées $(x_M\ ;\ y_M)$ du point $M$ vérifient, simultanément : $\begin{cases} x_M=y_M.\tan\theta \\ {x_M}^2+{y_M}^2-a\,y_M=0 \end{cases}$

Son ordonnée vérifie l'équation : ${y_M}^2.\tan^2\theta+{y_M}^2-a\,y_M=0$, autrement dit : $y_M\left(y_M.\left(\tan^2\theta+1\right)-a\right)=0$.

Cette ordonnée étant non nulle, on en déduit que : $y_M=\dfrac{a}{\tan^2\theta+1}$

Les coordonnées du point $M$ s'expriment ainsi : $\begin{cases} x_M=y_M.\tan\theta=\dfrac{a.\tan\theta}{\tan^2\theta+1} \\ y_M=\dfrac{a}{\tan^2\theta+1} \end{cases}$.

Mais, en raison des formules trigonométriques usuelles : $\begin{cases} \dfrac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}=\sin\theta.\cos\theta \\ \dfrac{1}{\tan^2\theta+1}=\cos^2\theta \end{cases}$

Les coordonnées du point $M$ s'expriment ainsi : $\begin{cases} x_M=a.\sin\theta.\cos\theta \\ y_M=a.\cos^2\theta \end{cases}$.

**3.** Les points $O, M, N$ étant alignés dans cet ordre, les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont colinéaires et de même sens.

Le réel θ est aussi une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON}\right)$, on dispose de la relation :

$x_N = \overline{AN} = OA.\tan\theta = a.\tan\theta$ .

Les coordonnées du point $N$ sont : $\begin{cases} x_N = a.\tan\theta \\ y_N = a \end{cases}$

**4.** Le point $S$ ayant l'abscisse de $N$ et l'ordonnée de $M$ : $\begin{cases} x_S = a.\tan\theta \\ y_S = a.\cos^2\theta \end{cases}$

**5.** En raison des formules trigonométriques usuelles, nous avons vu que : $\cos^2\theta = \dfrac{1}{\tan^2\theta + 1}$

Or : $\tan\theta = \dfrac{x_S}{a}$.

Une relation indépendante de θ entre les coordonnées de $S$ est : $\dfrac{y_S}{a} = \dfrac{1}{\dfrac{x_S{}^2}{a^2} + 1} = \dfrac{a^2}{x_S{}^2 + a^2}$, autrement dit :

$$y_S = \frac{a^3}{x_S{}^2 + a^2}$$

Le point $S$ appartient à la courbe représentative de la fonction $f_a$.

Réciproquement, soit $U\left(u\ ;\ f_a(u)\right)$ un point situé sur la courbe représentative de $f_a$. Pour tout réel $u$, il existe un réel $\theta_u$ qui appartient à l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}\ ;+\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\tan\theta_u = \dfrac{u}{a}$.

Le point $U$ a la même abscisse que le point $S_u$ associé à cette valeur de θ. Mais l'ordonnée de $S_u$ est alors le nombre $f_a(\theta_u)$ : les points $U$ et $S_u$ coïncident, tout point situé sur la courbe représentative de $f_a$ est un point $S$ pour une certaine valeur de θ.

Le lieu géométrique de $S$ est la totalité de la courbe représentative de $f_a$.

Une équation cartésienne de **(V)** est l'équation : $y = f_a(x) = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$ où $f_a$ est définie sur **R**.

## Partie B

**1. Etude de la fonction $f_1$ et représentation graphique**

**1.1.** La fonction $f_1$ est une fonction paire : La courbe $C_1$ admet l'axe $Oy$ comme axe de symétrie.

On peut n'étudier $f_1$ que sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$

**1.2.** Sa dérivée première est la fonction : $f_1'(x) = -\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$, fonction négative sur $[0\,;+\infty[$ et ne s'y annulant qu'en zéro. La fonction $f_1$ est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et, par parité, strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$. Elle admet un maximum en zéro, qui est égal à 1.

Sa limite en plus l'infini est, sans équivoque, égale à zéro. Il en est de même de la limite en moins l'infini. La courbe $C_1$ admet pour asymptote l'axe $Ox$.

**1.2.** Sa dérivée seconde est la fonction : $f_1''(x) = \dfrac{2\left(3x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$, fonction qui s'annule, et change de signe, pour

$x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Compte tenu que : $f_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{3}{4}$ et que $f'_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$, la courbe $C_1$ admet un point d'inflexion $I_1$ de coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{3}{4}\right)$, point où la tangente a pour coefficient directeur $-\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$

négative sur $[0\,;+\infty[$ et ne s'y annulant qu'en zéro. La fonction $f_1$ est strictement décroissante sur $[0\,;+\infty[$ et, par parité, strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\,;0]$. Elle admet un maximum en zéro, qui est égal à 1.

**2.** Par l'homothétie $h_a$ de centre $O$ et de rapport $a$, tout point $M$ du plan, de coordonnées $(x\,;y)$, a pour image le point $M'$ de coordonnées $\begin{cases} x' = a\,x \\ y' = a\,y \end{cases}$

Un point $M(x\,;\,y)$ appartient à la courbe $C_1$ si et seulement si $y = f_1(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

La relation $y = \dfrac{1}{x^2+1}$ est vérifiée si et seulement si la relation : $\dfrac{y'}{a} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x'}{a}\right)^2+1}$ est vérifiée.

Or : $\dfrac{1}{\left(\dfrac{x'}{a}\right)^2+1} = \dfrac{a^2}{x'^2+a^2}$. La relation $\dfrac{y'}{a} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{x'}{a}\right)^2+1}$ est équivalente à la relation : $y' = \dfrac{a^3}{x'^2+a^2}$, c'est-à-dire

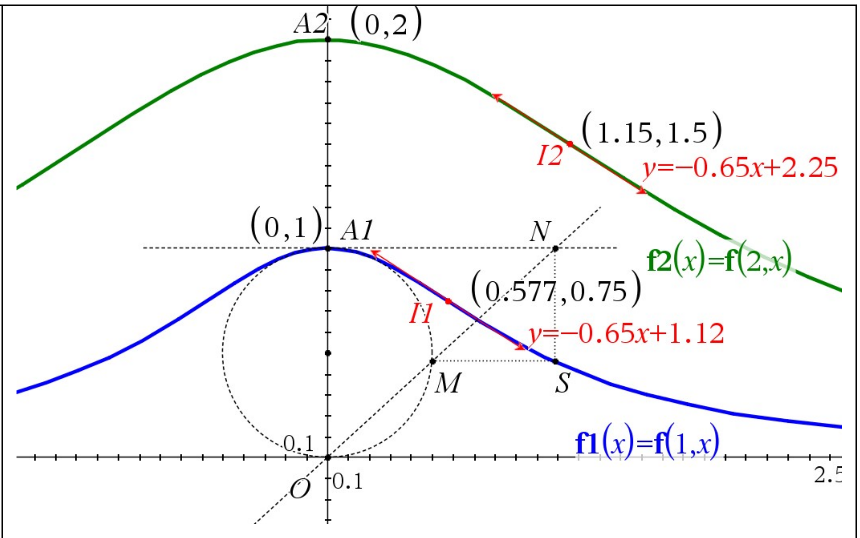
à la relation : $y' = f_a(x')$

Un point $M(x\,;\,y)$ appartient à la courbe $C_1$ si et seulement si les coordonnées de son image *M'* vérifient

$y = f_1(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ la relation : $y' = f_a(x')$, c'est-à-dire si et seulement si son image par $h_a$ appartient à $C_a$.

La courbe $C_a$ est l'image de la courbe $C_1$ par l'homothétie $h_a$ de centre $O$ et de rapport $a$.

La courbe $C_a$ a de ce fait la même asymptote que $C_1$, ca l'axe $Ox$ est invariant globalement par $h_a$. Son sommet et ses points d'inflexion se déduisent de ceux de $C_1$ par l'homothétie $h_a$.

| | |
|---|---|
| Les courbes $C_1$ et $C_2$ avec divers éléments |  |

## Partie C : Propriétés

**1.** Aire sous la courbe associée à $C_1$ : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+1}dx = \left[Arc\tan x\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

La courbe $C_a$ étant image de $C_1$ par une homothétie de rapport $a$, laquelle multiplie les aires par $a^2$, l'aire sous la courbe qui lui est associée est égale à $\pi a^2$.

**2.** « *Lou pense que les points de $C_a$ les plus proches de l'origine sont ses points d'inflexion, tandis que Pablo pense que les points de $C_a$ les plus proches de l'origine sont ses points d'abscisses $+\frac{a}{2}$ et $-\frac{a}{2}$. Qui a raison ?* »

On sait qu'une homothétie de rapport positif $a$ multiplie toutes les distances par $a$.

Compte tenu que toutes les courbes $C_a$ sont homothétiques de $C_1$ par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $a$, on peut ne considérer que la courbe $C_1$ représentative de le fonction $x \mapsto f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Compte tenu de la symétrie de ces courbes par rapport à l'axe $Oy$, on peut ne rechercher que les points d'abscisse positive les plus proches de l'origine.

Lou pense qu'il s'agit du point d'abscisse $\frac{\sqrt{3}}{3}$ tandis que Pablo pense qu'il s'agit du point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Soit $x$ un réel positif et $M$ le point d'abscisse $x$ de la courbe $C_1$. Le point $M$ a pour coordonnées $\left(x\ ;\ \frac{1}{1+x^2}\right)$
La distance $OM$ s'exprime ainsi en fonction de $x$ : $OM = \sqrt{x^2 + \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}}$. Cette distance varie dans le même sens que son carré. Nous pouvons ainsi considérer et étudier sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ la fonction :
$x \mapsto h(x) = OM^2 = x^2 + \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}$

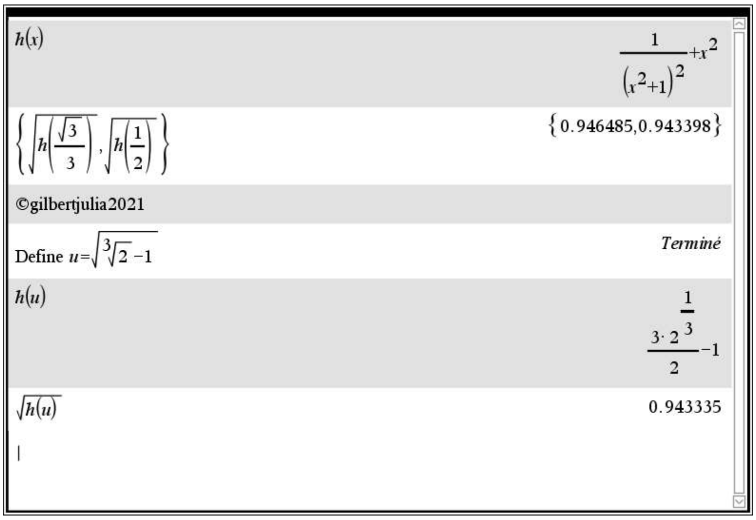
Tout d'abord : $h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{43}{48}$ et $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{89}{100}$.

On note d'abord que : $h\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{43}{48} - \frac{89}{100} = \frac{7}{1200}$, ce qui prouve que le point d'abscisse $\frac{1}{2}$ est plus près de l'origine que le point d'inflexion. Lou n'a pas raison.

La fonction dérivée de la fonction $h$ est la fonction :
$x \mapsto h'(x) = 2x - \frac{4x}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^3} \times \left(\left(1+x^2\right)^3 - 2\right)$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(1+x^2\right)^3 = 2$, soit : $1+x^2 = \sqrt[3]{2}$ ou $x = \sqrt{\sqrt[3]{2}-1}$ =0,5098 à $10^{-4}$ près.

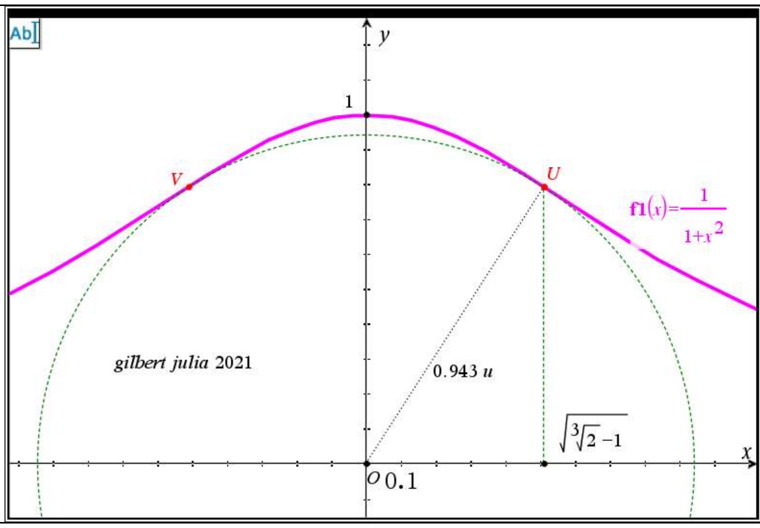
La fonction $x \mapsto 1 + x^2$ étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction $x \mapsto (1+x^2)^3$ l'est aussi. On en déduit que $h'$ est négative sur $\left[0\ ;\ \sqrt{\sqrt[3]{2}-1}\right]$ et positive sur $\left[\sqrt{\sqrt[3]{2}-1}\quad +\infty\right[$. La fonction $h$ est décroissante sur $\left[0\ ;\ \sqrt{\sqrt[3]{2}-1}\right]$ puis croissante sur $\left[\sqrt{\sqrt[3]{2}-1}\quad +\infty\right[$.
La fonction $h$ atteint son minimum en $\sqrt{\sqrt[3]{2}-1}$




Le point $U$ d'abscisse $\sqrt{\sqrt[3]{2}-1}$ est le point de $C_1$ le plus près de l'origine, de même que son symétrique $V$ par rapport à l'axe $Oy$.

La distance de ce point à l'origine est 0,943335 à $10^{-6}$ près, alors que la distance du point d'abscisse $\frac{1}{2}$ à l'origine est 0,943398 à $10^{-6}$ près.

Pablo n'a pas raison non plus …
Quoique …




De façon générale, les points de $C_a$ les plus proches de l'origine sont les images par l'homothétie de centre $O$ et de rapport $a$ des deux points $U$ et $V$ obtenus ici.

*NB. En théorie, Pablo a tort certes, cela se joue à peu, un dix-millième d'unité de longueur. C'est pourquoi, si on considère que le nombre* $\sqrt{\sqrt[3]{2}-1}$ *n'est pas un nombre constructible, et que donc on n'a aucune chance de « construire » le point de la courbe théoriquement le plus près de l'origine, on peut considérer la réponse de Pablo comme excellente.*
*Parfois, il est préférable d'avoir un peu tort que tout à fait raison, n'en déplaise aux intégristes.*