L'art de couper les angles en trois
1. La trisectrice de Mac Laurin

Le problème de la trisection d'un angle n'est pas résoluble à la règle et au compas. Voici l'étude d'une courbe qui a été utilisée pour obtenir une construction approchée d'un angle égal au tiers d'un autre.

Le sujet

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O,\vec{i},\vec{j})$. On considère le cercle C de centre Ω (2, 0) et de rayon 2, ainsi que la droite Δ d'équation $x=1$.

Pour tout réel t, on note D_t la droite passant par O et de coefficient directeur t. Cette droite coupe le cercle C au point $A(t)$ et la droite Δ au point $B(t)$.

On note alors $M(t)$ le point de D_t défini par : $\overrightarrow{OM(t)}=\overrightarrow{A(t)B(t)}$. L'ensemble Γ des points M ainsi obtenus est appelée la « trisectrice de Mac Laurin ».

1. Montrer que les coordonnées de $M(t)$ sont données par : $\begin{cases} x(t)=\dfrac{t^2-3}{t^2+1} \\ y(t)=\dfrac{t(t^2-3)}{t^2+1} \end{cases}$

2. Construire cette courbe (si possible avec un logiciel de représentation graphique). On précisera :

- Les éléments de symétrie de Γ
- Le point de paramètre zéro et la tangente à Γ en ce point
- Le point de paramètre 1 et la tangente à Γ en ce point.
- L'allure de Γ au voisinage de l'origine.
- Les branches infinies.

3. Récréation trigonométrique.

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$. On pose : $t=\tan\theta$.

Démontrer que : $\tan 3\theta=\dfrac{t^3-3t}{3t^2-1}$

4. Soit W le point symétrique de Ω par rapport à O et U le symétrique de O par rapport à W.

Soit t un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert $\left]0,\sqrt{3}\right[$ et soit M le point de Γ de paramètre t.

Soit H son projeté orthogonal sur l'axe Ox. Evaluer la tangente de l'angle géométrique $\widehat{MOW}$ et la comparer avec la tangente de l'angle $\widehat{MWU}$.
Qu'en déduire ?

5. Application : On suppose que votre logiciel de construction a tracé scrupuleusement la « trisectrice de Mac-Laurin » sur votre feuille de travail. Indiquer une façon d'utiliser cette trisectrice pour terminer la construction, à la règle et au compas désormais, d'un angle de mesure π/9.

.

2. Eléments de correction

1. La droite D_t a pour équation : $y = t\,x$. Elle coupe la droite Δ au point $B(1,\, t)$.

Le cercle Γ a pour équation : $(x-2)^2 + y^2 = 4$ soit aussi bien : $x^2 + y^2 - 4x = 0$.

La droite D_t coupe Γ au point A autre que O d'intersection avec le cercle. Si $A(x,\, t\,x)$ est ce point, alors son abscisse doit vérifier l'équation : $x^2 + t^2\,x^2 - 4x = 0$.

Outre la solution nulle, qui correspond au point O, cette équation a une autre solution : $x = \dfrac{4}{1+t^2}$ qui est l'abscisse du deuxième point A. Ce point a pour coordonnées : $x = \dfrac{4}{1+t^2}$; $y = \dfrac{4t}{t^2+1}$

On en déduit celles de M : $x = -\dfrac{4}{t^2+1} + 1 = \dfrac{t^2-3}{t^2+1}$; $y = -\dfrac{4t}{t^2+1} + t = t\dfrac{t^2-3}{t^2+1}$

2. La trisectrice de Mac Laurin est déterminée par les formules paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2-3}{t^2+1} \\ y(t) = t\dfrac{t^2-3}{t^2+1} \end{cases}$ où t appartient à **R**.

La fonction « x » est paire et la fonction « y » est impaire : les points de paramètres opposés t et $-t$ sont symétriques par rapport à l'axe Ox, qui est axe de symétrie de Γ.

En conséquence, il est possible de n'étudier la situation que sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, ce qu'on suppose par la suite. On en déduira par symétrie le comportement graphique pour t négatif.

Le vecteur dérivé est défini par les relations : $x'(t) = \dfrac{8t}{(t^2+1)^2}$; $y'(t) = \dfrac{t^4+6t^2-3}{t^2+1}$

<table>
<tr>
<td>
La courbe admet un sommet au point de paramètre $\sqrt{2\sqrt{3}-3}$: Il s'agit du point de coordonnées : $\left(-\sqrt{3}\ ;\ -\sqrt{6\sqrt{3}-9}\right)$.

Le point $M(0)$ est le point de coordonnées $(-3,\, 0)$ et la tangente y est parallèle à Ox.

Le point $M(1)$ est le point de coordonnées $(-2,\,-2)$ et la tangente y a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(2,\, 1)$.

Le point $M\left(\sqrt{3}\right)$ est l'origine du repère et la tangente y a pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $\left(\sqrt{3},\, 3\right)$.
</td>
<td>
Define $f(t)=\dfrac{t^2-3}{t^2+1}$ — *Terminé*
Define $g(t)=t\cdot f(t)$ — *Terminé*
$\dfrac{d}{dt}(f(t))$ — $\dfrac{8\cdot t}{(t^2+1)^2}$
$\dfrac{d}{dt}(g(t))$ — $\dfrac{t^4+6\cdot t^2-3}{(t^2+1)^2}$
solve$(t^4+6\cdot t^2-3=0,t)$ — $t=-\sqrt{2\cdot\sqrt{3}-3}$ or $t=\sqrt{2\cdot\sqrt{3}-3}$
$f\left(\sqrt{2\cdot\sqrt{3}-3}\right)$ — $-\sqrt{3}$
$g\left(\sqrt{2\cdot\sqrt{3}-3}\right)$ — $-\sqrt{3\cdot(2\cdot\sqrt{3}-3)}$
©gilbertjulia2020
</td>
</tr>
</table>

Lorsque t tend vers $+\infty$, x tend vers 1 et la droite Δ est une asymptote à la courbe.

3. Une linéarisation amène aux formules :

$\cos 3\theta + i\sin 3\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta.\sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta.\sin\theta - \sin^3\theta\right)$

Ce qui donne par identification des parties réelle et imaginaire :

$\begin{cases}\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta.\sin^2\theta \\ \sin 3\theta = 3\cos^2\theta.\sin\theta - \sin^3\theta\end{cases}$ et en ce qui concerne la tangente :

$$\tan 3\theta = \frac{\sin 3\theta}{\cos 3\theta} = \frac{3\cos^2\theta.\sin\theta - \sin^3\theta}{\cos^3\theta - 3\cos\theta.\sin^2\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \frac{3 - \dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1 - 3\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$$

Avec les notations de l'énoncé, c'est-à-dire : $t = \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, nous obtenons : $\tan 3\theta = \dfrac{t\left(3 - t^2\right)}{1 - 3t^2}$

4. Soit *W* le point symétrique de Ω par rapport à *O* et *U* le symétrique de *O* par rapport à *W*.

Soit *t* un nombre réel appartenant à l'intervalle ouvert $\left]0, \sqrt{3}\right[$ et soit $M(t)$ le point de Γ de paramètre *t*.

Dans ces conditions, les coordonnées de $M(t)$ (qu'on notera *M* dans ce qui suit) sont toutes deux strictement négatives.
Soit *H* le projeté orthogonal de *M* sur l'axe *Ox*.

L'angle géométrique $\widehat{MOW}$ est égal à l'angle $\widehat{HOM}$ et a même tangente que lui, à savoir le rapport :

$\dfrac{HM}{OH} = \dfrac{\dfrac{t\left(3-t^2\right)}{1+t^2}}{\dfrac{3-t^2}{1+t^2}} = t$ (dans ces hypothèses, même tangente que celle de l'angle polaire de la droite D_t)

Lorsque ce n'est pas un angle droit, c'est-à-dire lorsque *t* est différent de $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, l'angle géométrique $\widehat{OWM}$ a pour tangente le rapport $\dfrac{HM}{\overline{HW}}$ (en effet, s'il est aigu, sa tangente est $\dfrac{HM}{HW} = \dfrac{HM}{\overline{HW}}$ et s'il est obtus, c'est $-\dfrac{HM}{HW} = \dfrac{HM}{\overline{HW}}$ aussi)

Le vecteur $\overrightarrow{WM}$ ayant pour coordonnés : $\begin{cases} x(t) + 2 = \dfrac{t^2-3}{t^2+1} + 2 = \dfrac{3t^2-1}{t^2+1} \\ y(t) = \dfrac{t(t^2-3)}{t^2+1}\end{cases}$, $\overline{HW} = -\dfrac{1-3t^2}{t^2+1}$

Il en résulte que : $\tan\widehat{OWM} = \dfrac{-\dfrac{t\left(3-t^2\right)}{t^2+1}}{\dfrac{1-3t^2}{t^2+1}} = -\dfrac{t\left(3-t^2\right)}{1-3t^2}$

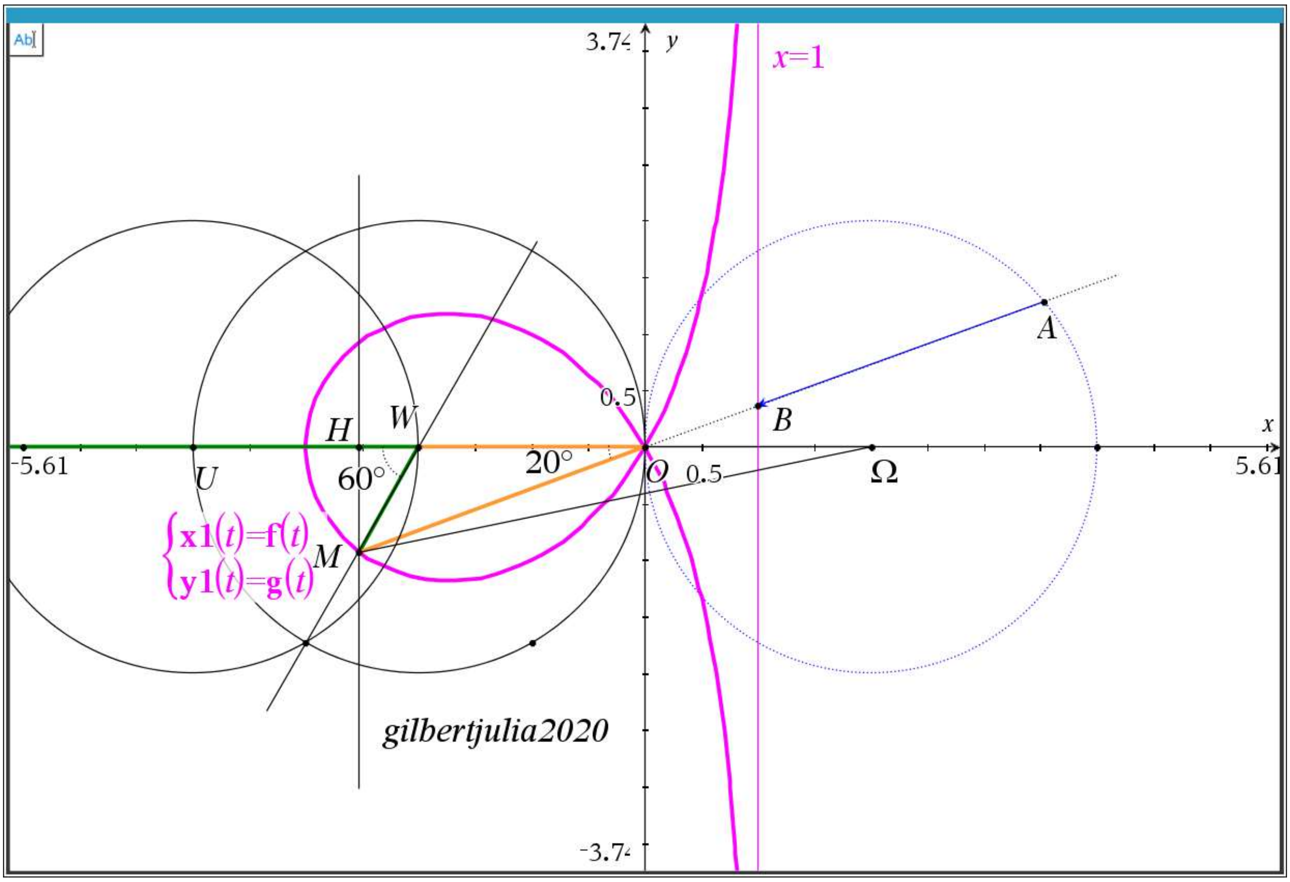
Cette tangente est l'opposée de la tangente du triple de $\widehat{MOW}$, les angles $3\widehat{MOW}$ et $\widehat{OWM}$ sont des angles supplémentaires.

Il en résulte que les angles $\widehat{UWM}$ (voir figure, coloré en vert) et $3\widehat{MOW}$ sont des angles égaux puisqu'ils ont le même supplémentaire.

Le point U est, sur la figure, le symétrique de O par rapport à W (on s'en sert dans la question 5) mais l'important est que W soit entre O et U.

L'angle géométrique $\widehat{MOW}$ (coloré en orange sur la figure) est ainsi « le tiers » de l'angle $\widehat{UWM}$

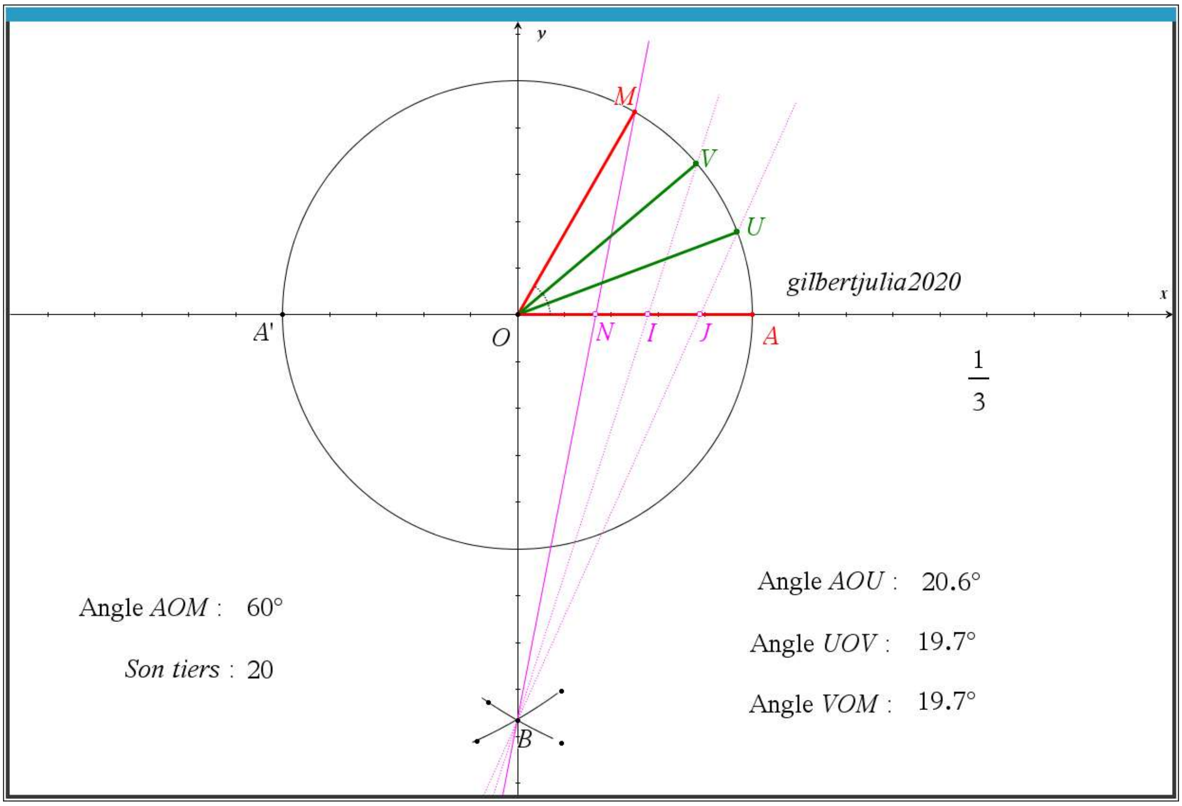
5. J'espère que la construction est assez explicite …



J'ai affiché la mesure des angles en degrés pour plus de lisibilité.

2. La méthode des compagnons du Moyen-âge

NB. Pour plus de commodité de lecture des mesures d'angle, l'unité utilisée est ici le degré. Il est par ailleurs conseillé d'utiliser un logiciel de calcul formel, avec son solveur, chaque fois que c'est possible.



Dans un repère orthonormé d'origine O, soit Γ le cercle de centre O et de rayon 1, et soit A et A' les points de l'axe Ox d'abscisses respectives 1 et -1.

Soit B le point de coordonnées $\left(0,\ -\sqrt{3}\right)$. Ce point, d'ordonnée négative, est tel que le triangle $AA'B$ est un triangle équilatéral.

Le nombre θ étant un réel donné de l'intervalle $]0, 180[$, soit M le point du cercle Γ d'ordonnée positive tel que l'angle $\widehat{AOM}$ ait pour mesure θ. De ce fait, les coordonnées de M sont $\left(\cos\theta,\ \sin\theta\right)$.

Les compagnons procédaient alors aux constructions suivantes :

- La droite (AM) coupe l'axe Ox en N.
- Les points I et J subdivisent le segment $[NA]$ en trois segments isométriques.
- La demi-droite $[AI)$ coupe le cercle Γ en U et la demi-droite $[AJ)$ coupe le cercle Γ en V

Les compagnons considéraient alors que les angles $\widehat{AOU}$; $\widehat{UOV}$; $\widehat{VOM}$ partageaient à peu près en trois l'angle $\widehat{AOM}$, chacun d'entre eux constituant une approximation « acceptable » de $\dfrac{\theta}{3}$.

La figure présentée montre ce qu'il en est lorsque $\theta = 60$.

On se propose d'étudier un brin cette situation.

1. Ecrire une équation cartésienne de la droite (BM).

2. Déterminer, en fonction de θ, l'abscisse du point N.

3. Déterminer, en fonction de θ, l'abscisse x_I du point I et l'abscisse x_J du point J.

4. On se propose de calculer les coordonnées de U et de V dans un cas particulier, celui où $\theta = 60$. C'est-à-dire que dans ce cas : $\cos\theta = \frac{1}{2}$; $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

4.1. Expliciter les abscisses de N, I et J.

4.2. Ecrire un système d'équations dont sont solution les coordonnées de U et un système d'équations dont sont solution les coordonnées de V.

4.3. Vérifier que l'abscisse de U est une solution de l'équation :

$146x^2 - 189x + 49 = 0$

Et que l'abscisse de V est une solution de l'équation :

$134x^2 - 135x + 25 = 0$

En déduire l'abscisse de U et l'abscisse de V.

Il s'agit des cosinus des angles $\widehat{AOU}$ et $\widehat{AOV}$ qui sont censés être voisins l'un de 20 et l'autre de 40 degrés. En utilisant la fonction « arc cosinus » de votre calculatrice, expliquer l'affichage de la copie d'écran « 20,6 » ainsi que « 19,7 » visible sur la première figure.

2. Eléments de correction

1. Une équation cartésienne de la droite (BM) est : $\begin{vmatrix} x & \cos\theta \\ y+\sqrt{3} & \sin\theta+\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$ c'est-à-dire :

$x\left(\sin\theta+\sqrt{3}\right) - y\cos\theta - \sqrt{3}\cos\theta = 0$.

2. Le point N est le point d'ordonnée zéro de cette droite, c'est-à-dire que son abscisse est $x_N = \dfrac{\sqrt{3}.\cos\theta}{\sqrt{3}+\sin\theta}$.

3. Les points I et J ont pour abscisses : $\begin{cases} x_I = x_N + \dfrac{1}{3}\left(1-x_N\right) = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}x_N \\ x_J = x_N + \dfrac{2}{3}\left(1-x_N\right) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{3}x_N \end{cases}$

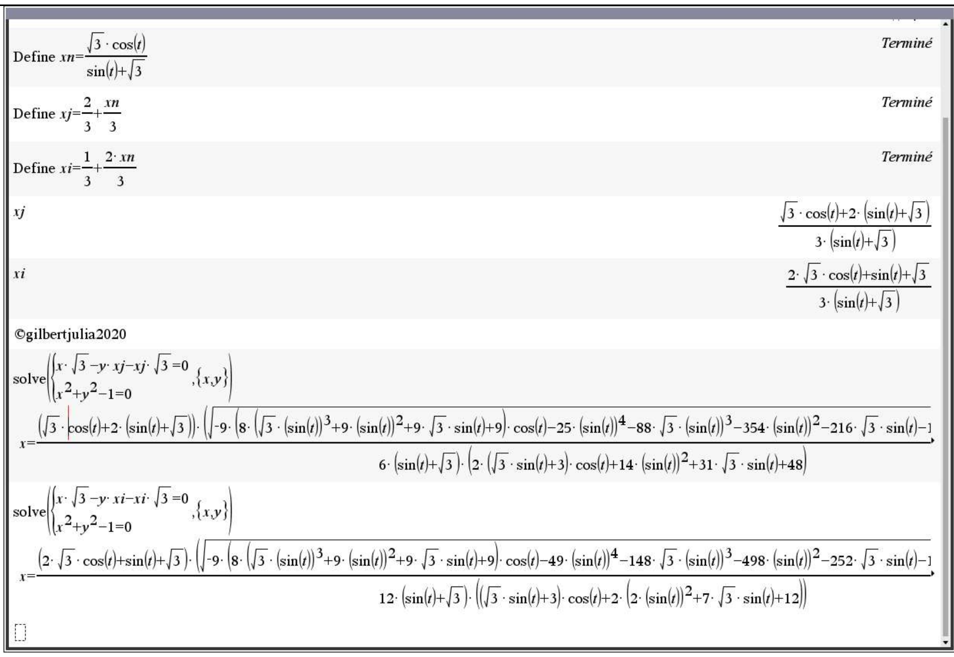
Ce qui donne les formules suivantes : $x_J = \dfrac{\sqrt{3}.\cos\theta+2.\sin\theta+\sqrt{3}}{3.\sin\theta+3\sqrt{3}}$ $x_I = \dfrac{2\sqrt{3}.\cos\theta+\sin\theta+\sqrt{3}}{3.\sin\theta+3\sqrt{3}}$	solve$\left(\cos(t)\cdot\sqrt{3}-\left(\sin(t)+\sqrt{3}\right)\cdot x=0,x\right)$ $x=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\cos(t)}{\sin(t)+\sqrt{3}}$ Define $xn=\dfrac{\sqrt{3}\cdot\cos(t)}{\sin(t)+\sqrt{3}}$ *Terminé* Define $xj=\dfrac{2}{3}+\dfrac{xn}{3}$ *Terminé* Define $xi=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2\cdot xn}{3}$ *Terminé* xj $\dfrac{\sqrt{3}\cdot\cos(t)+2\cdot\left(\sin(t)+\sqrt{3}\right)}{3\cdot\left(\sin(t)+\sqrt{3}\right)}$ xi $\dfrac{2\cdot\sqrt{3}\cdot\cos(t)+\sin(t)+\sqrt{3}}{3\cdot\left(\sin(t)+\sqrt{3}\right)}$ ©gilbertjulia2020

4. De façon générale, la droite (BJ) a pour équation : $\begin{vmatrix} x & x_J \\ y+\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$ c'est-à-dire $x\sqrt{3} - y.x_J - x_J.\sqrt{3} = 0$ et de même la droite (IJ) a pour équation : $\begin{vmatrix} x & x_I \\ y+\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$ c'est-à-dire $x\sqrt{3} - y.x_I - x_I.\sqrt{3} = 0$

Les coordonnées de U sont solution du système : $\begin{cases} x\sqrt{3} - y.x_J - x_J.\sqrt{3} = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Les coordonnées de V sont solution du système : $\begin{cases} x\sqrt{3} - y.x_I - x_I.\sqrt{3} = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$

Bravement, le logiciel de TI-Nspire nous donne les expressions exactes en fonction de θ des solutions de ce système, mais force est de constater que ces expressions nous désespèrent. C'est pourquoi nous nous contentons de continuer « sur un exemple ».



Dans le cas particulier où $\theta = 60$, c'est-à-dire que dans ce cas : $\cos\theta = \frac{1}{2}$; $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, cela donne les résultats qui suivent :

4.1. L'abscisse de N est : $x_N = \dfrac{\sqrt{3}\times\frac{1}{2}}{\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{3}$.

Les abscisses de I et de J sont alors, respectivement : $x_I = \frac{5}{9}$; $x_J = \frac{7}{9}$.

4.2. Les coordonnées de U sont solution du système : $\begin{cases} x\sqrt{3} - \frac{7y}{9} - \frac{7\sqrt{3}}{9} = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$ et celles de V du système :

$$\begin{cases} x\sqrt{3} - \frac{5y}{9} - \frac{5\sqrt{3}}{9} = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

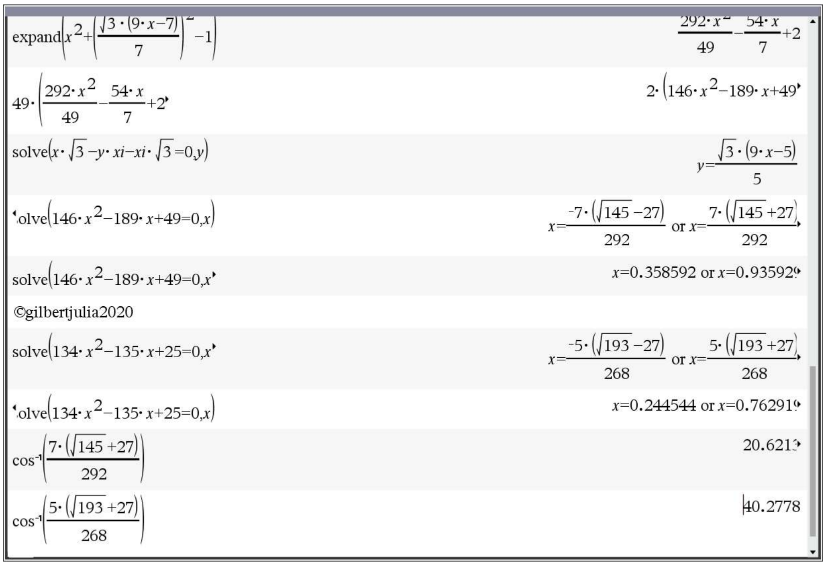
La première équation de chaque système permet d'exprimer y en fonction de x :

Respectivement : $y = \left(\frac{9x}{7} - 1\right)\sqrt{3}$ dans l'un puis $y = \left(\frac{9x}{5} - 1\right)\sqrt{3}$ dans l'autre.

L'abscisse x_U de U est solution de l'équation au second degré : $x^2 + 3\left(\frac{9x}{7} - 1\right)^2 - 1 = 0$.

L'abscisse x_V de V est solution de l'équation au second degré : $x^2 + 3\left(\frac{9x}{5} - 1\right)^2 - 1 = 0$.

On vérifie sans trop de peine que ces équations sont équivalentes à celles proposées par l'énoncé.

L'équation $146x^2 - 189x + 49 = 0$ admet deux solutions positives, mais comme l'abscisse de U est supérieure à celle de J nous retenons que $x_U = \dfrac{189 + 7\sqrt{145}}{292}$ Il en est de même de l'équation $134x^2 - 135x + 25 = 0$ mais comme l'abscisse de V est supérieure à celle de I nous retenons que $x_V = \dfrac{135 + 5\sqrt{193}}{268}$	

L'usage de la fonction arc cosinus montre que les angles obtenus ne sont « pas trop éloignés » l'un de 20 et l'autre de 40 degrés.

Sur la copie d'écran, on lit 20,6 et 19,7, ce qui fait que l'angle $\widehat{AOV}$ devrait mesurer à peu près $20,6 + 19,7 = 40,3$ degrés. Les résultats concordent assez bien.

Il reste à savoir si l'approximation était suffisamment bonne pour réussir la construction des cathédrales. Il semble que la réponse soit oui …