Autour des méthodes des trapèzes et des tangentes

Voici un énoncé de problème fortement inspiré de trois problèmes tirés de l'excellent « AUDIRAC Terminale C 1983 » des éditions Magnard. « L'Audirac », car c'est ainsi qu'on le nommait, était une référence de premier ordre en ce qui concernait la mythique et trois fois hélas défunte série C.

Cependant, Jean-Louis AUDIRAC a écrit ce manuel avec six collaboratrices, toutes agrégées de mathématiques, collaboratrices que personne à l'époque ne prenait la peine de citer.

Il n'est que justice de réparer cet oubli : Martine LATANICKI, Sylvie MARTIN, Marie-Françoise LE DANTEC, Christiane MARMECHE, Monique MEUNIER, Catherine PERAY.

Ce document leur est spécialement dédié. Il s'agit des problèmes 23, 24 et 25 pages 360 et 361.Ces problèmes traitaient en plusieurs étapes de la qualité des approximations d'une intégrale obtenues par la méthode des trapèzes et par une méthode des tangentes que j'ai pris la liberté de modifier.

Plantons le décor

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On désigne par Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Soit a et b deux nombres réels distincts appartenant à I et tels que $a<b$. On note A et B les points de Γ d'abscisses respectives a et b.

Une équation cartésienne de la droite (AB) est : $\begin{vmatrix} x-a & b-a \\ y-f(a) & f(b)-f(a) \end{vmatrix}=0$, c'est-à-dire de façon équivalente : $y=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$.

Pour tout réel x appartenant à I, soit M le point d'abscisse x situé sur la courbe Γ et P le point de même abscisse situé sur la droite (AB).

La différence entre les ordonnées des points M et P est : $\overline{PM}=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$

Le signe de la fonction phi définie sur I par : $x\mapsto\phi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)$ permet de savoir, graphiquement, lequel des deux points P ou M est au dessus de l'autre.

D'autre part, cette fonction phi mesure l'écart entre la fonction f et la fonction affine qui prend la même valeur que f en a et en b.

Soit maintenant c un réel appartenant à I, C le point d'abscisse c de Γ et T_c la tangente en C à Γ.

Pour tout x appartenant à I soit M le point d'abscisse x situé sur la courbe Γ et Q le point de même abscisse situé sur la tangente T_c. On note : $\psi(x)=\overline{QM}$.

Une équation cartésienne de la droite T_c est : $y=f'(c)(x-c)+f(c)$

La différence entre les ordonnées des points M et Q est : $\overline{QM} = f(x) - f'(c)(x-c) - f(c)$.

Le signe de la fonction psi définie sur I par : $\psi(x) = f(x) - f'(c)(x-c) - f(c)$ permet de savoir, graphiquement, lequel des deux points Q ou M est au dessus de l'autre. D'autre part, cette fonction psi mesure l'écart entre la fonction f et sa meilleure approximation affine qui en c.

Proposons-nous d'étudier la situation sous réserve de quelques hypothèses complémentaires.

Partie 1 : positions relatives de la courbe Γ, de ses sécantes et de ses tangentes

1. Nous supposerons dans toute cette partie que la fonction f est deux fois dérivable sur I

Justifier que chacune des deux fonctions phi et psi est une fonction deux fois dérivable sur I.

Exprimer les dérivées première et seconde de la fonction phi et les dérivées première et seconde de la fonction psi.

Supposons de plus que la dérivée seconde de f garde un signe constant sur I.

Plus précisément, nous supposerons dans les questions **2** et **3** que la fonction dérivée seconde de f est négative sur I : $(\forall x \in I) \; : \; f''(x) \leq 0$.

Sous ces hypothèses complémentaires, comment sont disposées la courbe Γ, une sécante à cette courbe, une tangente à cette courbe ?

2. ***Etude de la dérivée première de la fonction phi et de phi elle-même***

2.1. Etudier sur l'intervalle I le sens de variation de la dérivée première de phi.

2.2. Préciser les valeurs de $\phi(a)$ et de $\phi(b)$ puis justifier l'existence d'un réel c appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$ tel que $\phi'(c) = 0$. En déduire le signe de la dérivée première de phi sur l'intervalle I.

2.3. Etudier le sens de variation puis le signe de la fonction phi sur l'intervalle I. Quelle conclusion en tirer quant à la position relative de la courbe Γ et de la sécante (AB) ?

3. ***Etude de la dérivée première de la fonction psi et de psi elle-même***

3.1. Etudier sur l'intervalle I le sens de variation puis le signe de la dérivée première de psi.

3.2. Etudier sur l'intervalle I les variations puis le signe de la fonction psi. Quelle conclusion en tirer quant à la position relative de la courbe Γ et de la tangente T_a ?

4. Que se passe-t-il si on suppose que f'' est positive sur I : $(\forall x \in I) \; : \; f''(x) \geq 0$?

Partie 2 : encadrement de la fonction phi et d'une fonction psi

Dans cette partie, nous considérons une fonction *f* deux fois continûment dérivable sur un segment $[a,b]$. Sa dérivée seconde étant continue sur le segment $[a,b]$, elle y admet un minimum et un maximum . La valeur absolue de cette dérivée seconde admet un maximum que l'on va noter *M*.

Pour tout réel *x* appartenant au segment $[a,b]$: $|f''(x)| \leq M$

On note toujours Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Majoration en valeur absolue de la fonction phi et ce qui s'ensuit

On se propose d'encadrer sur c la fonction phi : $x \mapsto \phi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(a)$.

Par construction, cette fonction phi s'annule en *a* et en *b*.

1.1. On fixe un réel *x* appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$.

On construit une fonction notée *g* telle que : $g(t) = \varphi(t) + k(t-a)(t-b)$ où *k* est une constante. Par construction, cette fonction s'annule en *a* et en *b*. Montrer que l'on peut choisir la constante *k* (que l'on déterminera) de façon que la fonction *g* s'annule aussi en *x*.

1.2. La fonction *g* étant désormais la fonction ainsi obtenue, justifier qu'elle est deux fois dérivable et calculer ses dérivées première et seconde

1.3. Justifier l'existence d'un réel c_1 appartenant à l'intervalle ouvert $]a, x[$ tel que : $g'(c_1) = 0$ et d'un réel c_2 appartenant à l'intervalle ouvert $]x, b[$ tel que : $g'(c_2) = 0$. En déduire l'existence d'un réel c_x appartenant à l'intervalle ouvert $]c_1, c_2[$ (donc a fortiori à l'intervalle ouvert $]a, b[$) tel que : $g''(c_x) = 0$.

En déduire : $\phi(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$

1.4. Suivant le signe (supposé constant) de *f''* l'intervalle $[a, b]$, discuter le signe de la fonction phi sur cet intervalle.

Démontrer d'autre part la majoration : $|\phi(x)| \leq \dfrac{M}{2}(x-a)(x-b)$ pour tout réel *x* de $[a, b]$.

1.5. Considérons l'intégrale : $I_{\sec}=\int_a^b \phi(x)dx$. Il s'agit de $\int_a^b\left(f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)-f(a)\right)dx$ soit, par linéarité de l'intégrale : $\left(\int_a^b f(x)dx\right)-\left(\int_a^b\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)dx\right)$. Cette intégrale mesure l'écart entre l'intégrale de *f* et celle de la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que *f* en *a* et en *b*.
Graphiquement, cette intégrale mesure l'aire algébrique entre la sécante (*AB*) et la courbe.
Déterminer une majoration de cette intégrale.

2. Encadrement d'une fonction psi et ce qui s'ensuit

On considère un réel *c* de l'intervalle ouvert $]a, b[$ et la tangente à la courbe Γ en son point *C* d'abscisse *c*.

On se propose d'encadrer sur $[a, b]$ la fonction psi définie par : $\psi(x)=f(x)-f'(c)(x-c)-f(c)$, fonction qui mesure l'écart entre *f* et sa meilleure approximation affine au voisinage de *c*.

2.1. On fixe un réel *x* appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$ et distinct de *c*.

On considère une fonction notée *h* définie sur $[a, b]$ par : $h(t)=\psi(t)+k(t-c)^2$ où *k* est une constante.

Par construction, cette fonction s'annule en *c* quelle que soit la valeur de *k*.
Montrer que l'on peut choisir la constante *k* (que l'on déterminera) de façon que la fonction *h* s'annule aussi en *x*.

2.2. La fonction *h* étant désormais la fonction ainsi obtenue, justifier qu'elle est deux fois dérivable et calculer ses dérivées première et seconde.

2.3. Justifier l'existence d'un réel *d* situé strictement entre *c* et *x* tel que : $h'(d)=0$

En déduire l'existence d'un réel d_x situé strictement entre *c* et *d* (donc a fortiori dans l'intervalle ouvert $]a, b[$) tel que : $h''(d_x)=0$. En déduire une expression de $\psi(x)$ en fonction de *c, x* et $f''(d_x)$.

2.4. Suivant le signe (supposé constant) de *f''* l'intervalle $[a, b]$, discuter le signe de la fonction psi sur cet intervalle.
Démontrer d'autre part la majoration :
Démontrer l'encadrement : $|\psi(x)|\le\frac{M}{2}(x-c)^2$ pour tout réel *x* de l'intervalle $[a, b]$

2.5. Considérons l'intégrale : $I_{\tan} = \int_a^b \psi(x)\,dx$. Il s'agit de $\int_a^b \left(f(x) - f'(c)(x-c) - f(c)\right)dx$ soit, par linéarité de l'intégrale : $\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) - \left(\int_a^b \left(f'(c)(x-c) + f(c)\right)dx\right)$. Cette intégrale mesure l'écart entre l'intégrale de f sur $[a, b]$ et celle de sa meilleure approximation affine au voisinage de c. Graphiquement, cette intégrale mesure l'aire algébrique entre la tangente en c et la courbe.

Déterminer un encadrement de cette intégrale. Que devient cet encadrement dans le cas particulier où c est le milieu du segment $[a, b]$?

Partie 3 : étude de la précision d'un calcul approchée d'une intégrale par les méthodes des trapèzes et des tangentes

Les hypothèses sur la fonction *f* sont les mêmes que dans la deuxième partie et les notations sont les mêmes.

Soit $I = \int_a^b f(x)dx$ l'intégrale de *f* sur le segment $[a,b]$, intégrale que nous nous proposons de calculer par des méthodes approchées.

Nous rappelons deux méthodes de calcul approché d'une intégrale dont le dénominateur commun est le découpage de $[a,b]$ en segments isométriques.

Ce découpage consiste à considérer pour chaque entier $n \geq 1$ une subdivision régulière $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ de l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de même longueur $\frac{b-a}{n}$ et à construire sur chaque intervalle $I_k = [x_{k-1}\ ;\ x_k]$; $k = 1, 2,..., n$ une fonction d'approximation de la fonction *f*.

Nous devrons utiliser également dans une des méthodes les milieux des segments I_k, à savoir les nombres réels : $u_k = \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

Méthode des trapèzes :

Les fonctions d'approximation sont des fonctions affines par morceaux qui coïncident avec *f* aux points x_i.
Ces fonctions d'approximation sont des fonctions continues sur $[a,b]$ en raison des coïncidences aux points de raccordement.

Précisément, il s'agit pour une valeur de n donnée de la fonction t_n définie sur $[a,b]$ de la façon suivante :

$$(\forall k \in \{1, 2, ..., n\})(\forall x \in I_k) : t_n(x) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}(x - x_{k-1}) + f(x_{k-1})$$

:

Graphiquement, si on note H_k et M_k les points d'abscisse x_k de Ox et C respectivement, les arcs de la courbe C joignant les points M_{k-1} et M_k sont remplacés par les segments $[M_{k-1}M_k]$.
L'intégrale I est approchée par une somme T_n d'aires algébriques des trapèzes $H_{k-1}M_{k-1}M_kH_k$, à savoir la somme : $T_n = \int_a^b t_n(x).dx = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_{k-1})+f(x_k)}{2}$

Méthode des tangentes ou des points médians.

Pour tout entier $k = 1, 2,\ldots, n$ on note D_k la tangente à **C** au point d'abscisse u_k, le milieu du segment I_k

Pour $k = 1, 2,..., n-1$, la droite D_k délimite avec l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = x_{k-1}$ et la droite d'équation $x = x_k$ un trapèze rectangle de largeur $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ et dont l'aire algébrique est la même que celle du rectangle de hauteur $f(u_k)$, à savoir $\frac{b-a}{n}f(u_k)$.

Les fonctions d'approximation sont des fonctions affines par morceaux, non continues aux points x_k.

Le résultat est le même si l'on choisit comme fonctions d'approximation des fonctions en escalier (constantes par morceaux) coïncidant à l'intérieur de chaque intervalle de subdivision $I_k = [x_{k-1} ; x_k]$; $k = 1, 2, ..., n$ avec la fonction constante égale à $f(u_k) = f\left(\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$

La somme des aires algébriques est dans ce cas : $M_n = \dfrac{b-a}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)\right)$

Travail à faire :

Soit f une fonction deux fois continûment dérivable sur un segment $[a,b]$.

On suppose de plus que la dérivée seconde de f garde un signe constant sur le segment $[a,b]$. On note M le maximum de de la fonction $|f''|$ valeur absolue de la dérivée seconde.

Soit $I = \int_a^b f(x)dx$ l'intégrale de f sur le segment $[a,b]$.

Sur la toile, ou dans les bons manuels d'Analyse de M1, on trouve les informations suivantes :

- L'erreur commise en prenant pour valeur approchée de I l'approximation par la méthode des trapèzes est, en valeur absolue, plus petite que : $M.\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$
- L'erreur commise en prenant pour valeur approchée de I l'approximation par la méthode des tangentes ou points médians est, en valeur absolue, plus petite que : $M.\dfrac{(b-a)^3}{24n^2}$

Justifier ces affirmations en utilisant les parties précédentes

Eléments de correction.

Partie 1 : positions relatives de la courbe Γ, de ses sécantes et de ses tangentes

NB. *Dans plusieurs questions, la confection d'un tableau de variations allégerait le raisonnement. Pour des raisons de mise en page, ces tableaux, qui remplaceraient avantageusement des « descriptions » un peu alambiquées, ne sont pas proposés ici. Il appartient au lecteur de les confectionner.*

1. Chacune des deux fonctions phi et psi apparaît comme la somme de la fonction *f*, supposée être deux fois dérivable, et d'une fonction affine, indéfiniment dérivable. Il s'agit de fonctions deux fois dérivables, comme la fonction *f* elle-même.

Dérivées première et seconde de phi : $\phi'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b-a}$ et $\phi''(x) = f''(x)$

Dérivées première et seconde de psi : $\psi'(x) = f'(x) - f'(c)$; $\psi''(x) = f''(x)$.

Les trois fonctions *f*, phi et psi ont la même dérivée seconde.

2.1. La dérivée première de phi ayant pour dérivée la dérivée seconde de *f*, supposée être négative sur *I*, cette fonction est décroissante sur *I*.

2.2. Par construction, la fonction phi s'annule en *a* et en *b* : $\phi(a) = \phi(b) = 0$.

Cette fonction étant deux fois dérivable sur *I*, elle est *a fortiori* continue sur l'intervalle fermé $[a\,;b]$ et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a\,;b[$. Le théorème de Rolle s'applique à cette fonction sur l'intervalle $[a\,;b]$: il existe *c* appartenant à l'intervalle ouvert $]a\,;b[$ tel que : $\phi'(c) = 0$.

(L'unicité de ce réel n'est pas garantie car l'hypothèse est : $(\forall x \in I)$: $f''(x) \leq 0$ avec une inégalité large).

Quoi qu'il en soit, l'existence de *c* est garantie. Compte tenu de la décroissance de la fonction dérivée première de phi, cette fonction est positive pour les valeurs de *I* plus petites que *c* et négative pour les valeurs de *I* plus grandes que *c*.

2.3. Il résulte du signe de la fonction dérivée première de phi que la fonction phi elle-même est croissante jusqu'à la valeur *c* puis décroissante, la valeur $\phi(c)$ est maximale.

Vu que *c* est entre *a* et *b* et que $\phi(a) = \phi(b) = 0$, la fonction phi est positive sur l'intervalle $[a\,;b]$ et négative à l'extérieur de cet intervalle.

Une conséquence graphique est que le point *M* est au dessus de *P* lorsque son abscisse est dans $[a\,;b]$, et au dessous de *P* sinon. L'arc de la courbe Γ situé entre les points *A* et *B* est au dessus de la sécante (*AB*).

3.1. La fonction psi ayant aussi la même dérivée seconde que *f*, sa fonction dérivée première est négative sur *I*, la fonction psi est décroissante sur *I*.
Vu l'expression de cette fonction dérivée : $\psi'(x) = f'(x) - f'(c)$, cette fonction s'annule en *c* ; elle est positive pour les valeurs de *I* plus petites que *c* et négative pour les valeurs de *I* plus grandes que *c*.

3.2. La fonction psi est croissante jusqu'à sa valeur en *c* puis décroissante ensuite, sa valeur en *c* étant maximale. Or $\psi(c) = 0$. Cette fonction ayant un maximum égal à zéro, elle est négative ou nulle sur *I*.

Graphiquement, il en résulte que $\overline{QM}$ est toujours négatif ou nul, le point *M* est toujours au dessous du point *Q*. La courbe Γ est située entièrement au dessous (au sens large) de la tangente en *C*.

En résumé, sous l'hypothèse de négativité de la dérivée seconde de *f* sur *I*, la courbe Γ est au dessous de ses tangentes et tout arc *AB* de cette courbe est au-dessus de la sécante (*AB*).

4. Si on suppose que la dérivée seconde de *f* est positive sur *I*, la courbe Γ est au dessus de ses tangentes et tout arc *AB* de cette courbe est au-dessous de la sécante (*AB*). En effet, son la fonction opposée de *f* entre dans le cadre précédent et sa courbe représentative est la symétrique de Γ par rapport à l'axe des abscisses.

En conclusion, si *f''* garde un signe constant sur *I*, la courbe **Γ** est située « entre ses sécantes et ses tangentes ».

Partie 2 : encadrement de la fonction phi et d'une fonction psi

1.1. On fixe un réel *x* appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$.

La fonction *g* étant telle que : $g(t) = \varphi(t) + k(t-a)(t-b)$: $g(x) = \varphi(x) + k(x-a)(x-b)$

Elle s'annule en *x* lorsque *k* prend la valeur : $k = -\dfrac{\phi(x)}{(x-a)(x-b)}$

La fonction *g* que l'on obtient est la fonction définie ainsi : $g(t) = \varphi(t) - \dfrac{((t-a)(t-b))}{(x-a)(x-b)}\phi(x)$

1.2. La fonction *g* étant la somme d'une fonction deux fois dérivable et d'un polynôme du second degré indéfiniment dérivable, elle est deux fois dérivable. Les dérivées première et seconde de *g* sont les fonctions :

$$g'(t) = \varphi'(t) - \frac{2t-a-b}{(x-a)(x-b)}\phi(x) \text{ et } g''(t) = \varphi''(t) - \frac{2}{(x-a)(x-b)}\phi(x) = f''(t) - \frac{2}{(x-a)(x-b)}\phi(x)$$

Puisque *g* est dérivable sur le segment $[a, b]$ et s'annule aux trois points *a, x* et *b*, il est possible d'appliquer le théorème de Rolle d'une part sur l'intervalle $[a, x]$ et d'autre part sur l'intervalle $[x, b]$:

- Il existe c_1 appartenant à l'intervalle ouvert $]a, x[$ tel que : $g'(c_1) = 0$.
- Il existe c_2 appartenant à l'intervalle ouvert $]x, b[$ tel que : $g'(c_2) = 0$.

1.3. La fonction g étant deux fois dérivable, sa dérivée première est dérivable.

Il est possible d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction g' sur l'intervalle $\left[c_1, c_2\right]$.Il existe c_x (ainsi indexé car ce nombre dépend de x) appartenant à l'intervalle ouvert $\left]c_1, c_2\right[$ (donc a fortiori à l'intervalle ouvert $\left]a, b\right[$) tel que : $g''(c_x) = 0$.

Pour cette valeur : $f''(c_x) - \dfrac{2}{(x-a)(x-b)}\phi(x) = 0$ autrement dit : $\phi(x) = \dfrac{(x-a)(x-b)}{2} f''(c_x)$

Pour tout réel x de l'intervalle $\left[a, b\right]$, le produit $(x-a)(x-b)$ est négatif (car un facteur est positif et l'autre négatif) . Donc, la fonction phi est sur l'intervalle $\left[a, b\right]$ du signe opposé à celui de la dérivée seconde : si *f''* est une fonction négative, phi est une fonction positive et vice-versa.

D'autre part, si on note M le maximum de la fonction $\left|f''\right|$:

Pour tout réel x appartenant à $\left[a, b\right]$: $\left|f''(c_x)\right| \leq M$ et $\left|(x-a)(x-b)\right| = (x-a)(b-x)$ puisque x est entre a et b : $\left|\phi(x)\right| \leq \dfrac{M}{2}(x-a)(b-x)$

1.4. Considérons l'intégrale $\int_a^b \phi(x)\,dx$.

D'une part la fonction phi est du signe opposé à celui de *f''*, donc son intégrale est elle aussi du signe opposé à celui de *f''*.

D'autre part : $\left|\int_a^b \phi(x)\,dx\right| \leq \int_a^b \left|\phi(x)\right| dx \leq \dfrac{M}{2}\int_a^b (a-x)(b-x)\,dx = \dfrac{M(b-a)^3}{12}$

Comme en témoignent les calculs ci-contre.	$\int((x-a)\cdot(b-x))\mathrm{d}x$ → $\dfrac{-x\cdot(2\cdot x^2-3\cdot(a+b)\cdot x+6\cdot a\cdot b)}{6}$ $\int_a^b((x-a)\cdot(b-x))\mathrm{d}x$ → $\dfrac{-(a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3)}{6}$ $\mathrm{factor}\left(\dfrac{-(a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3)}{6}\right)$ → $\dfrac{-(a-b)^3}{6}$ ©gilbertjulia2020

2.1. On fixe un réel x appartenant à l'intervalle ouvert $]a, b[$ et distinct de c.

On construit une fonction notée h telle que : $h(t) = \psi(t) + k(t-c)^2$ où k est une constante.

Cette fonction s'annule en x lorsque k prend la valeur : $k = -\dfrac{\psi(x)}{(x-c)^2}$

La fonction h que l'on obtient est la fonction définie ainsi : $h(t) = \psi(t) - \dfrac{(t-c)^2}{(x-c)^2}\psi(x)$

2.2. La fonction h étant la somme d'une fonction deux fois dérivable et d'un polynôme du second degré indéfiniment dérivable, elle est deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$. Les dérivées première et seconde de h sont les fonctions : $h'(t) = \psi'(t) - \dfrac{2(t-c)}{(x-c)^2}\psi(x) = f'(t) - f'(c) - \dfrac{2(t-c)}{(x-c)^2}\psi(x)$ et

$h''(t) = \psi''(t) - \dfrac{2}{(x-c)^2}\psi(x) = f''(t) - \dfrac{2}{(x-c)^2}\psi(x)$

2.3. La fonction dérivable h s'annule en x et en c : on peut appliquer le théorème de Rolle sur l'intervalle $[x, c]$: il existe un réel d appartenant à l'intervalle ouvert $]x, c[$ tel que : $h'(d) = 0$.

2.4. La fonction h étant deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$., sa dérivée première y est dérivable. Or, cette dérivée première s'annule en d et en c

Il est possible d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction h' sur l'intervalle $[d, c]$ (les réels d et c sont distincts, leur ordre de rangement n'a pas d'incidence). Il existe d_x (ainsi indexé car ce nombre dépend de x) appartenant à l'intervalle ouvert $]d, c[$ (donc a fortiori à l'intervalle ouvert $]a, b[$) tel que : $h''(d_x) = 0$.

Pour cette valeur : $f''(d_x) - \dfrac{2}{(x-c)^2}\psi(x) = 0$ autrement dit : $\psi(x) = \dfrac{(x-c)^2}{2} f''(d_x)$

Pour tout réel x de l'intervalle $[a, b]$, $\psi(x)$ est du même signe que $f''(d_x)$. Donc, la fonction psi est sur l'intervalle $[a, b]$ du même signe que la dérivée seconde.

D'autre part, si on note M le maximum de la fonction $|f''|$:

Pour tout réel x appartenant à $[a, b]$: $|f''(d_x)| \leq M$ et $|\psi(x)| \leq \dfrac{M}{2}(x-c)^2$

2.5. Considérons l'intégrale $\int_a^b \psi(x)\,dx$.

D'une part la fonction psi est du même signe que celui de *f''*, donc son intégrale est elle aussi de ce même signe..

D'autre part : $\left|\int_a^b \psi(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |\psi(x)|\,dx \leq \frac{M}{2}\int_a^b (x-c)^2\,dx = \frac{M}{2}\left[\frac{(x-c)^3}{3}\right]_a^b$

Ces résultats sont peu significatifs lorsque *c* est quelconque. Ils le sont davantage lorsque *c* est le milieu du segment.	$\int((x-a)\cdot(b-x))\,dx \quad \frac{-x\cdot(2\cdot x^2-3\cdot(a+b)\cdot x+6\cdot a\cdot b)}{6}$ $\int_a^b((x-a)\cdot(b-x))\,dx \quad \frac{-(a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3)}{6}$ $\text{factor}\left(\frac{-(a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3)}{6}\right) \quad \frac{-(a-b)^3}{6}$ ©gilbertjulia2020 $\int(x-c)^2\,dx \quad \frac{(x-c)^3}{3}$ $\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2 dx \quad \frac{-(a-b)^3}{12}$

On conclut que, dans le cas où $c = \frac{a+b}{2}$: $\left|\int_a^b \psi(x)\,dx\right| \leq \frac{M}{24}(b-a)^3$

Le majorant est deux fois plus petit que dans la question précédente.

Partie 3 : étude de la précision du calcul approchée d'une intégrale par les méthodes des trapèzes et des tangentes

Soit *f* une fonction deux fois continûment dérivable sur un segment $[a,b]$. On suppose de plus que la dérivée seconde de *f* garde un signe constant sur le segment $[a,b]$.

Soit $I=\int_a^b f(x)dx$ son intégrale sur le segment $[a,b]$.
Désignons par ϕ et ψ les fonctions représentant les écarts entre *f* et ses fonctions d'approximation, par les méthodes, respectivement, des trapèzes et des tangentes (ou point médian)

1. En appliquant la relation de Chasles pour les intégrales : $I=\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k_{k-1}}^{x_k} f(x)dx\right)$.

Sur chaque intervalle de subdivision, la fonction ϕ_k (respectivement ψ_k) restriction de phi (respectivement de psi) est construite en prenant $a=x_{k-1}$; $b=x_k$; elle représente l'écart un point de la sécante $(M_{k-1}M_k)$ (respectivement un point de la tangente en le point dont l'abscisse est $\frac{x_{k-1}+x_k}{2}$) et le point de même abscisse de la courbe Γ. Elle entre dans le cadre de ce qu'on vient d'étudier.

L'intégrale $\int_{k_{k-1}}^{x_k}\phi_k(x)dx$ représente l'aire algébrique de la portion de plan entre la sécante et la courbe et l'intégrale $\int_{k_{k-1}}^{x_k}\psi_k(x)dx$ représente l'aire algébrique de la portion de plan entre la tangente et la courbe.

On peut appliquer les résultats obtenus dans la partie précédente sur chaque intervalle.

- Si *f''* est positive sur l'intervalle $[a,b]$, toutes les fonctions phi-*k* sont négatives et toutes les fonctions psi-*k* sont positives. La fonction phi est négative, et la fonction psi positive. La méthode des trapèzes donne une approximation par excès et celles des tangentes par défaut.
- Si *f''* est négative, les rôles sont inversés
- Dans ces deux cas, la méthode des trapèzes combinée à celle des tangentes permet d'obtenir un encadrement

De plus, si on désigne par M_k le maximum de $|f''|$ sur le *k*-ème intervalle de subdivision, et M le maximum universel sur la totalité du segment $[a,b]$: $M_k \le M$ pour tout entier *k*, on peut utiliser le maximum « universel » dans les majorations sur chaque intervalle de subdivision.

Ce qui donne, pour tout entier *k* entre 1 et *n* :

- Pour les « phi-*k* » (trapèzes) : $\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\phi_k(x)dx\right|\le\frac{M(x_{k-1}-x_k)^3}{12}$ soit : $\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\phi_k(x)dx\right|\le\frac{M(b-a)^3}{12n^3}$
- Pour les « psi-*k* » (tangentes) : $\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\psi(x)dx\right|\le\frac{M(x_k-x_{k-1})^3}{24}$ soit $\left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\psi_k(x)dx\right|\le\frac{M(b-a)^3}{24n^3}$

ϕ et ψ étant les fonctions représentant les écarts entre f et ses fonctions d'approximation sur tout l'intervalle d'intégration, leurs intégrales se calculent par sommation des intégrales sur les n intervalles de subdivision $\int_a^b \phi(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k_{k-1}}^{x_k} \phi_k(x)dx\right)$ (et de même pour les psis).

En raison de l'inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b \phi(x)dx\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(\int_{k_{k-1}}^{x_k} \phi_k(x)dx\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\left|\int_{k_{k-1}}^{x_k} \phi_k(x)dx\right|\right)$

(et de même pour psi).

Nous pouvons majorer : $\left|\int_a^b \phi(x)dx\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{M(b-a)^3}{12n^3}\right) = \frac{M(b-a)^3}{12n^2}$

Et de même : $\left|\int_a^b \psi(x)dx\right| \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{M(b-a)^3}{24n^3}\right) = \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$

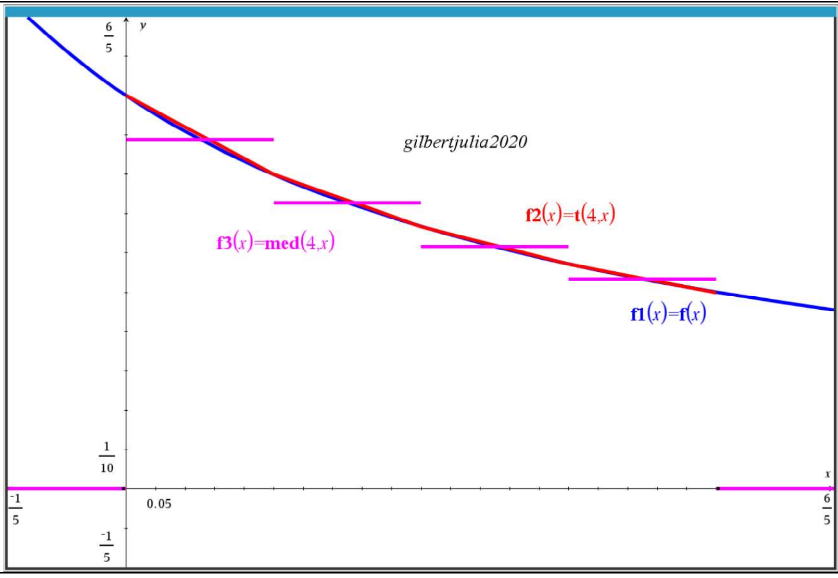
Calcul « instrumenté »

De façon beaucoup plus ergonomique que sirop Python, le logiciel de TI-Nspire permet de définir relativement facilement les fonctions d'approximation « trapèzes » et « points médians »	©On définit les points de subdivision : Define $u(k,n)=a+\frac{k\cdot(b-a)}{n}$ *Terminé* ©Et maintenant l'équation de la sécante en deux points de subdivision Define $s(k,n,x)=\frac{(f(u(k,n))-f(u(k-1,n)))\cdot(x-u(k-1,n))}{u(k,n)-u(k-1,n)}+f(u(k-1,n))$ *Terminé* Define $sr(k,n,x)=$when$(u(k-1,n)\leq x$ and $u(k,n)\geq x,s(k,n,x),0)$ *Terminé* ©On a ainsi restreint à l'intervalle de subdivision. Et maintenant la fonction d'approximation "trapèzes" : Define $t(n,x)=\sum_{k=1}^{n}(sr(k,n,x))$ *Terminé* ©Et des bornes Define $b=1$ *Terminé* Define $a=0$ *Terminé* ©gilbertjulia2020 ; Il reste à tester avec une fonction "adéquate" : Define $f(x)=\frac{1}{1+x}$ *Terminé* ©Tant qu'on y est, choisissons aussi les "points médians " plus faciles à définir que les tangentes : Define $c(k,n)=\frac{u(k-1,n)+u(k,n)}{2}$ *Terminé* Define $m(k,n,x)=$when$(u(k-1,n)\leq x$ and $u(k,n)>x,f(c(k,n)),0)$ *Terminé*
Avec la fonction $f(x)=\frac{1}{1+x}$, et quatre intervalles de subdivision de l'intervalle $[a,b]=[0,1]$, on parvient aux résultats ci-contre :	Define $c(k,n)=\frac{u(k-1,n)+u(k,n)}{2}$ *Terminé* Define $m(k,n,x)=$when$(u(k-1,n)\leq x$ and $u(k,n)>x,f(c(k,n)),0)$ *Terminé* Define $med(n,x)=\sum_{k=1}^{n}(m(k,n,x))$ *Terminé* $\int_0^1 f(x)\,dx$ $\ln(2)$ $\int_0^1 f(x)\,dx$ 0.693147 $\int_0^1 t(4,x)\,dx$ $\frac{1171}{1680}$ $\int_0^1 t(4,x)\,dx$ 0.697024 $\int_0^1 med(4,x)\,dx$ $\frac{4448}{6435}$ $\int_0^1 med(4,x)\,dx$ 0.69122 ©gilbertjulia2020

Une représentation graphique, en bleu la courbe Γ, en rouge la fonction d'approximation « trapèzes ».

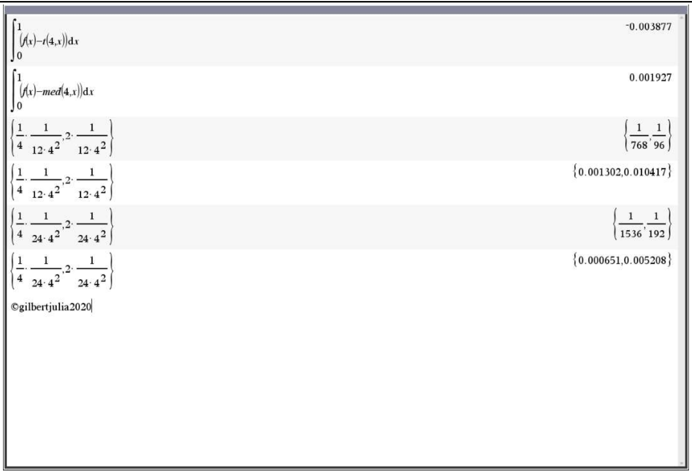
La courbe est sous les sécantes et serait au-dessus des tangentes (non représentées).

On a représenté en magenta la fonction en escalier correspondant aux « points médians ».



La dérivée seconde est strictement positive : $f''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$, elle a sur $[0,1]$ un maximum égal à 2 et un minimum égal à $\dfrac{1}{4}$.

On constate que les « fourchettes » prévues sont bien respectées. Ce qui ne garantit évidemment pas leur exactitude. Leur compatibilité seulement.



Reconnaissez-vous la valeur de l'intégrale qui a été approchée ci-contre ?

Pourquoi l'intervalle d'intégration choisi est-il $\left[0,\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$?