Le deuxième théorème de Thébault

Voici un problème de géométrie que le lecteur peut trouver éparpillé façon puzzle dans nombre de manuels. Repérez dans un énoncé un carré et des triangles équilatéraux, et vous y êtes, c'est du Thébault. Vous trouverez d'ailleurs sur ce site une autre mouture d'une partie de ce problème, je vous laisse la dénicher, ce n'est pas bien difficile.

La configuration que nous allons étudier se prête très bien à l'utilisation de différents outils pour résoudre un même problème et, à ce titre, elle figurait autrefois dans le « top 10 » des configurations les plus à la mode. Actuellement, c'est moins le cas, vu que les directives ministérielles s'intéressent davantage à des « compétences » de fête foraine plutôt qu'à des méthodes. Il n'en demeure pas moins que la situation devrait vous intéresser, chers candidats au CAPES, ne serait-ce que pour votre culture mathématique. Je vous invite à trouver, au fil des questions, des pistes de résolution autres que celles qui sont proposées ci-dessous, utilisant d'autres outils.

Plantons le décor

Le deuxième théorème de Thébault s'énonce ainsi :

« Soit *ABCD* un carré. On construit les triangles *ABI* et *ADJ*, ou bien tous les deux intérieurement, ou bien tous les deux extérieurement au carré. Alors, le triangle *CIJ* est un triangle équilatéral ».

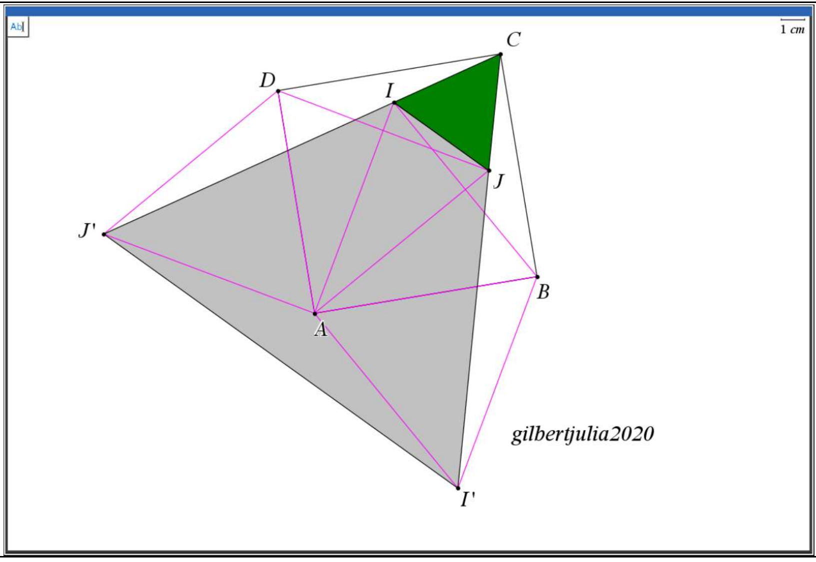
Nous nous proposons ici de démontrer ce théorème et, un peu au delà du théorème, d'étudier quelques propriétés de la configuration de Thébault.

Nous nous plaçons dans un plan euclidien orienté. L'orientation n'est pas nécessaire, mais elle va permettre pour qui le souhaite des résolutions utilisant les angles orientés (qui peut le plus peut le moins …)

Soit dans ce plan un carré *ABCD* de côté une unité et que nous supposerons direct, ce qui ne change rien à la généralité.

On construit intérieurement à ce carré les triangles équilatéraux *ABI* et *ADJ* et on construit extérieurement à ce carré les triangles équilatéraux *ABI'* et *ADJ'*.

De ce fait, *ABI* et *ADJ'* sont des triangles équilatéraux directs, tandis que *ABI'* et *ADJ* sont des triangles équilatéraux indirects.



Le sujet

Partie 1 : l'un dedans et l'autre dehors, un problème d'alignement

On considère dans cette partie les triangles équilatéraux *ABI* et *ADJ'*. On se propose de démontrer que les points *C, I, J'* sont des points alignés.

1. L'outil angulaire

1.1. Evaluer l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right)$ (ou son double, comme on voudra).

1.2. Evaluer l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IJ'}, \overrightarrow{IA}\right)$ (ou son double, comme on voudra).

1.3. Evaluer l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IJ'}, \overrightarrow{IC}\right)$; conclure.

2. L'outil des transformations.

On considère la rotation *r* de centre *A* et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$.

2.1. Montrer que le point *C'* image de *C* par *r* appartient à la droite (*BD*).

2.2. Déterminer l'image par la rotation *r* de la droite (IJ').

2.3. Conclure.

Partie 2 : Une démonstration du théorème de Thébault

1. Montrer que les points *I* et *I'* d'une part, et les points *J* et *J'* d'autre part, sont symétriques par rapport à (*AC*). En déduire que les deux triangles *CII'* et *CJJ'* sont des triangles isocèles.

2. Evaluer l'angle $\left(\overrightarrow{CJ'}, \overrightarrow{CI'}\right)$ puis démontrer le théorème de Thébault.

Partie 3 : Quelques propriétés métriques de la configuration

1. Calculer la longueur du côté du triangle équilatéral *CIJ* et celle du triangle équilatéral *CJ'I'*.

2. Préciser la nature du quadrilatère *IJI'J'*. Montrer que son aire est commensurable à celle du carré

B. Eléments de correction.

Partie 1 : l'un dedans et l'autre dehors, un problème d'alignement

On considère dans cette partie les triangles équilatéraux *ABI* et *ADJ'*. On se propose de démontrer que les points *C, I, J'* sont des points alignés.

1. L'outil angulaire

1.1. Compte tenu de la relation de Chasles sur les angles : $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

Le triangle *IBC* est isocèle de sommet *B*. Ses angles de sommets *I* et *C* sont égaux.
Compte tenu de la valeur de la somme des angles orientés d'un triangle :

$$2\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}\right) = \pi\ \ (2\pi) \text{ donc : } 2\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$$

En conséquence : $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right) = \frac{5\pi}{12}\ (\pi)$

(En divisant par 2, on perd le « modulo 2π » ; cela n'affecte pas la démonstration de l'alignement mais si on n reste là, on ne déterminera pas quel est l'ordre d'alignement).

On peut préciser : les mesures principales (comprises dans $]-\pi\ ;\ \pi]$) des trois angles orientés d'un triangle non aplati sont ou bien toutes les trois dans $]0\ ;\ \pi[$ si le triangle est direct ou bien toutes les trois dans $]-\pi\ ;\ 0[$ si le triangle est indirect . En l'occurrence : $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right) = \frac{5\pi}{12}\ (2\pi)$ et non $-\frac{7\pi}{12}$ car *IBC* est direct.

1.2. Compte tenu de la relation de Chasles sur les angles : $\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IJ'}\right) = \left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) + \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AJ'}\right) = -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$

Le triangle *AIJ'* est isocèle de sommet *A*. Ses angles de sommets *I* et *J'* sont égaux.
Compte tenu de la valeur de la somme des angles orientés d'un triangle :

$$2\left(\overrightarrow{IJ'}, \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ'}\right) = \pi\ \ (2\pi) \text{ donc : } 2\left(\overrightarrow{IJ'}, \overrightarrow{IA}\right) = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$$

En conséquence : $\left(\overrightarrow{IJ'}, \overrightarrow{IA}\right) = \frac{\pi}{4}\ (\pi)$

On peut préciser : $\left(\overrightarrow{IJ'}, \overrightarrow{IA}\right) = \frac{\pi}{4}\ (2\pi)$ et non $-\frac{3\pi}{4}$ car *IJ'A* est direct.

1.3. $\left(\overrightarrow{IJ'}, \overrightarrow{IC}\right) = \left(\overrightarrow{IJ'}, \overrightarrow{IA}\right) + \left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{12} = \pi\ \ (2\pi)$

Ainsi : $\left(\overrightarrow{IJ'}, \overrightarrow{IC}\right) = \pi\ (2\pi)$, cet angle est plat , ce qui est une caractérisation angulaire de l'alignement du point *I* sur le segment [*J'C*]
Les points *C, I, J'* sont des points alignés, le point *I* étant entre *C* et *J'*.

2. L'outil des transformations.

Par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, tout point M du plan distinct de A a pour image le point M' tel que le triangle AMM' est un triangle équilatéral direct. En effet, le triangle AMM' est au moins isocèle de sommet A car $AM = AM'$ et de plus, $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = -\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$, relation qui, pour un triangle isocèle AMM', caractérise le fait qu'il est équilatéral indirect .

2.1. Le point C' est donc le point du plan tel que ACC' est équilatéral indirect. Mis la droite (BD), en tant que diagonale du carré, est perpendiculaire à l'autre diagonale (AC) et passe par le milieu de [AC] : (BD) est la médiatrice de [AC]. Elle passe par C' qui est le sommet du triangle équilatéral ACC' opposé au côté[AC].

2.2. Les triangles $AJ'D$ et AIB sont tous deux équilatéraux indirects. Les images de J' et de I par r sont, respectivement, D et B. L'image de (IJ') est la droite qui passe par les images de deux de ses points : c'est la droite (DB). Puisque C appartient à cette droite, son image réciproque, le point C, appartient à ($J'I$) : les points J', I, C sont des points alignés.

Partie 2 : Une démonstration du théorème de Thébault

1. Soit s la réflexion d'axe (AC). La droite (AC) étant un axe de symétrie du carré, s laisse invariants les points A et C et échange les points B et D. En tant qu'isométrie, s transforme un triangle équilatéral en un triangle équilatéral. Chacun des deux triangles équilatéraux de base [AB] ont pour images l'un ou l'autre des deux triangles équilatéraux de base [AD].

Or, en tant qu'isométrie négative s change le sens des angles.
En conséquence, le triangle équilatéral direct ABI a pour image par s le triangle équilatéral indirect ADJ et le triangle équilatéral indirect ABI' a pour image par s le triangle équilatéral indirect ADJ'.
L'image de I par s est le point J et l'image de I' par s est le point J'.
Les points I et I' d'une part, et les points J et J' d'autre part, sont symétriques par rapport à (AC).

Les deux triangles CII' et CJJ' sont des triangles isocèles de sommet C.

2. Le triangle BCI' est un triangle isocèle de sommet B et son angle de sommet B est tel que : $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI'}\right) = \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI'}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}\ (2\pi)$
Compte tenu de la valeur de la somme des angles orientés d'un triangle :
$2\left(\overrightarrow{CI'}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI'}\right) = \pi\ \ (2\pi)$ donc : $2\left(\overrightarrow{CI'}, \overrightarrow{CB}\right) = \pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}\ (2\pi)$

En conséquence : $\left(\overrightarrow{CI'}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{12}\ (\pi)$

On peut préciser : $\left(\overrightarrow{CI'}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{12}\ (2\pi)$ car $CI'B$ est direct.

Son angle symétrique par rapport à (AC) est tel que : $\left(\overrightarrow{CJ'}, \overrightarrow{CD}\right) = -\frac{\pi}{12}\ (2\pi)$

Il en résulte que : $\left(\overrightarrow{CJ'}, \overrightarrow{CI'}\right) = \left(\overrightarrow{CJ'}, \overrightarrow{CD}\right) + \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CI'}\right) = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$

L'angle de sommet C du triangle isocèle $CJ'I'$ a pour mesure $\frac{\pi}{3}$
Le triangle $CJ'I'$ est équilatéral direct.

Compte tenu des alignements *C, I, J'* et *C, J, I'* (dans cet ordre), le triangle *CIJ* est lui aussi équilatéral direct, car son angle de sommet *C* est le même que le précédent.

Les deux triangles *CIJ* et *CI'J'* sont des triangles équilatéraux, ce qui démontre le théorème de Thébault.

Partie 3 : Quelques propriétés métriques de la configuration

1. La longueur *CI* s'obtient en appliquant le théorème d'Al_Kashi dans le triangle *BCI*. On a vu au fil des questions déjà traitées qu'il s'agissait d'un triangle isocèle de côté 1 et dont l'angle au sommet avait pour mesure $\frac{\pi}{6}$.
La longueur *CJ'* s'obtient en appliquant le théorème d'Al_Kashi dans le triangle *CDJ'*. On a vu au fil des questions déjà traitées qu'il s'agissait d'un triangle isocèle de côté 1 et dont l'angle au sommet avait pour mesure $\frac{5\pi}{6}$

2. Les points *I* et *I'* ainsi que *J*et *J'* étant symétriques par rapport à (*AC*), la droite (*AC*) est la médiatrice à la fois de [*II'*] et de [*JJ'*] : le quadrilatère *II'J'J* est un trapèze isocèle. Son aire est égale à l'aire du triangle *CI'J'* diminuée de l'aire de *CIJ*.

Il y a tout intérêt à automatiser les calculs. On obtient ainsi, successivement, les longueurs des côtés du triangle *CIJ* et du triangle *CI'J'* puis leur aire puis l'aire du trapèze *II'J'J*, laquelle est égale à $\frac{3}{2}$ fois l'aire du carré (les deux aires sont donc commensurables puisque leur rapport est rationnel).	Define $alkashi(a,b,t)=\sqrt{a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot \cos(t)}$ *Terminé* $alkashi\left(1,1,\frac{\pi}{6}\right)$ $\quad \frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $alkashi\left(1,1,\frac{5\cdot\pi}{6}\right)$ $\quad \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ Define $aire(a)=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$ *Terminé* $aire\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad \frac{2\cdot\sqrt{3}-3}{4}$ $aire\left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $\quad \frac{2\cdot\sqrt{3}+3}{4}$ $\frac{2\cdot\sqrt{3}+3}{4}-\frac{2\cdot\sqrt{3}-3}{4}$ $\quad \frac{3}{2}$ ©gilbertjulia2020