CONVOLUTION DE DIRICHLET, FONCTION DE MÖBIUS ET BACCALAUREAT 1976

Un surprenant sujet de la session 1976 du baccalauréat (Tel Aviv) propose une étude approfondie du produit de convolution de Dirichlet défini sur l'ensemble des fonctions arithmétiques. On y reconnaîtra la fonction de Möbius, ainsi que la notion de fonctions arithmétiques multiplicatives (appelées dans ce texte « régulières »). Ce sujet est proposé ici, prolongé par quelques questions complémentaires.

1.Le sujet original de 1976

On note **N*** l'ensemble des entiers naturels non nuls et P l'ensemble des nombres premiers. À tout $n \in \mathrm{N}^*$ on associe l'ensemble D_n des $d \in \mathrm{N}^*$ qui divisent n, l'ensemble C_n des $(d_1\,;\,d_2) \in (\mathrm{N}^*)^2$ tels que $d_1 d_2 = n$ et l'ensemble Γ_n des $(d_1\,;\,d_2\,;\,d_3) \in (\mathrm{N}^*)^3$ tels que $d_1 d_2 d_3 = n$

Le PGCD des entiers m et n est noté $m \wedge n$

Partie A

Dans tout le problème, on appelle suite une application de **N*** dans **R** et on note U l'ensemble des suites. On admet que l'on dispose du groupe $(U,+)$, la loi (+) étant définie par :

$\forall (u,v) \in U^2,\ \forall\, n \in \mathrm{N}^* : (u+v)(n) = u(n) + v(n)$.

On définit une seconde loi interne noté « étoile » sur U par :

$$\forall (u,v) \in U^2,\ \forall\, n \in \mathrm{N}^* : (u * v)(n) = \sum_{d \in D_n} u(d)\, v\!\left(\frac{n}{d}\right)$$

C'est ainsi que : $(u*v)(4) = u(1)v(4) + u(2)v(2) + u(4)v(1)$

1. Vérifier que, pour tout $(u,v,w) \in U^3$:

$$(u*v)(n) = \sum_{(d_1,d_2) \in C_n} u(d_1)v(d_2) \quad \text{et} \quad (u*v)*w(n) = \sum_{(d_1,d_2,d_3) \in \Gamma_n} u(d_1)v(d_2)w(d_3)$$

Quelles propriétés de la loi « étoile » découlent de ces résultats (que l'on pourra admettre, à défaut de démonstration)?

2. La loi « étoile » admet-elle un élément neutre ? Le triplet $(U,+,*)$ est-il un anneau ?

Partie B

Une suite $u \in U$ est dite régulière si et seulement si elle vérifie : $u(1) = 1$ et $u(qq') = u(q)u(q')$ pour tout $(q,q') \in (\mathrm{N}^*)^2$ tel que $q \wedge q' = 1$

1. Montrer que sont régulières les suites θ, ψ, f_m définies par $\forall n \in \mathrm{N}^* : \theta(n) = 1\,;\, \psi(n) = n\,;\ f_m(n) = m \wedge n$ (où $m \in \mathrm{N}^*$ est donné).

2. Soit u une suite régulière. Vérifier que $u(q_1 q_2 \ldots q_k) = \prod_{i=1}^{i=k} u(q_i)$ pour tout $(q_1, q_2, \ldots, q_k) \in (\mathrm{N}^*)^k$ tels que $q_1, q_2, \ldots, q_k$ soient premiers entre eux deux à deux.

Exprimer $u(n)$ pour $n = p_1^{a_1} \ldots p_k^{a_k}$ avec $(p_1, \ldots p_k) \in P^k$ et $(a_1, \ldots a_k) \in (\mathrm{N}^*)^k$

Partie C

1. Montrer que si les suites u et v sont régulières, alors la suite $u * v$ est régulière.

2. À $n \in \mathbb{N}^*$, on associe le nombre $\nu(n)$ de ses diviseurs positifs et la somme $\sigma(n)$ de ces diviseurs. Montrer qu'il existe deux suites régulières u_1 et u_2 telles que $\nu = \theta * u_1$ et $\sigma = \theta * u_2$
En déduire que les suites ν et σ sont régulières.

Les notations étant celles de B 2, donner des expressions de $\nu(n)$ et de $\sigma(n)$. En particulier, calculer $\nu(700)$ et $\sigma(700)$.

3. Montrer qu'est régulière la suite μ définie par : $\mu(1)=1$; $\mu(n)=0$ si n est divisible par le carré d'un nombre premier, $\mu(n)=(-1)^k$ si n est le produit de k nombres premiers distincts.

Déterminer l'image de $n \in \mathbb{N}^*$ par chacune des suites $\mu * \theta$; $\mu * \nu$; $\mu * \sigma$; $\mu * \mu$

2. Questions complémentaires

1. *Eléments inversibles pour la loi « étoile ».*

1.1. Montrer qu'un élément u de U est inversible pour la loi étoile si et seulement si $u(1) \neq 0$

1.2. Lorsque cette condition est vérifiée, exprimer explicitement $u^{-1}(1)$ en fonction de $u(1)$ et, p étant un nombre premier donné, $u^{-1}(p)$ en fonction de $u(p)$ et de $u(1)$.

1.3. Soit u une suite régulière et v la suite régulière définie pour toute puissance de nombre premier p par la formule de récurrence : Pour tout entier $a \geq 1$: $v(p^a)_{gilbertjulia\,2014} = -\dfrac{1}{u(1)}\left(\sum_{1\leq i\leq a} u(p^i)\times v(p^{a-i})\right)$.

Etablir que : $u * v = \omega$. En déduire que l'inverse pour la loi « étoile » d'une suite régulière est une suite régulière.

2. Une formule sommatoire.

Soit s un réel tel que : $s > 1$. On considère d'une part la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s}$ et d'autre part la série : $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\theta(n)}{n^s}$.

2.1. Justifier leur convergence absolue.

2.2. Montrer que : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s}\right)\times\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\theta(n)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mu * \theta(n)}{n^s}$ (le produit des séries étant le produit au sens de Cauchy). En déduire l'expression de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mu(n)}{n^s}$ à l'aide de la fonction zêta de Riemann.

3. Eléments de correction

Partie A.

$\forall (u,v)\in U^2, \forall\, n\in \mathbb{N}^* : (u*v)(n)=\sum_{d\in D_n} u(d)v\left(\frac{n}{d}\right)$.

Les entiers d et $\frac{n}{d}$ sont deux diviseurs complémentaires de n, en ce sens que leur produit est égal à n. En posant : $d_1=d\,;d_2=\frac{n}{d}$, le couple $(d_1\,;d_2)$ appartient à C_n. Réciproquement, si le couple $(d_1\,;d_2)$ appartient à C_n, et si $\forall (u,v)\in U^2, \forall\, n\in \mathbb{N}^* : (u*v)(n)=\sum_{(d_1,d_2)\in C_n} u(d_1)v(d_2)$ alors d_1 est diviseur de n et $d_2=\frac{n}{d_1}$. Ainsi : $(u*v)(n)=\sum_{d_1\in D_n} u(d_1)v\left(\frac{n}{d_1}\right)$.

Les deux définitions de la loi « étoile » coïncident.

D'autre part : $(u*v)*w(n)_{\text{gilbertjulia 2014}} = \sum_{d\in D(n)}\left(\left(\sum_{e\in D(d)} f(e)\times g\left(\frac{d}{e}\right)\right)\times h\left(\frac{n}{d}\right)\right)$.

Si on pose : $d_1=e\,;d_2=\frac{d}{e}\,;\,d_3=\frac{n}{d}$ alors $(d_1,d_2,d_3)\in\Gamma_n$ et $(u*v)*w(n)=\sum_{(d_1,d_2,d_3)\in\Gamma_n} u(d_1)v(d_2)w(d_3)$

Inversement, si $(d_1,d_2,d_3)\in\Gamma_n$, d_1 divise $d=d_1\,d_2$ et d divise $n=d_1\,d_2\,d_3$. Alors : $(u*v)*w(n)=\sum_{d\in D(n)}\left(\left(\sum_{d_1\in D(d)} f(d_1)\times g\left(\frac{d}{d_1}\right)\right)\times h\left(\frac{n}{d}\right)\right)$. Les deux expressions de la loi « étoile » appliquée deux fois coïncident.

Conséquences :

- La commutativité de la loi puisque $(u*v)(n)=\sum_{(d_1,d_2)\in C_n} u(d_1)v(d_2)$ est une expression symétrique en d_1 et d_2.
- L'associativité puisque $(u*v)*w(n)=\sum_{d_1\in D(n)} u(d_1)\times\left(\sum_{d_3\in D\left(\frac{n}{d_1}\right)} v\left(\frac{n}{d_1\,d_3}\right)\times w(d_3)\right)=u*(v*w)(n)$

2. S'il existe, un élément neutre ω doit vérifier : $\forall u\in U, \forall\, n\in\mathbb{N}^* : (\omega * u)(n)=\sum_{d\in D_n}\omega(d)u\left(\frac{n}{d}\right)=u(n)$

L'élément ω de U tel que : $\begin{cases}\omega(1)=1 \quad {\scriptstyle\text{gilbertjulia 2014}}\\ \omega(n)=0 \text{ si } n>1\end{cases}$ vérifie ces critères.

Pour que U soit muni d'une structure d'anneau par ces deux lois, il reste à vérifier la distributivité de la loi « étoile » sur l'addition : $u*(v+w)=u*v+u*w$, ce qui est une formalité.

Partie B.

Les suites têta et psi sont clairement régulières.

Quant à la suite f_m : $f_m(1)=m\wedge 1=1$ pour tout entier $m>0$

D'autre part, soit $m\wedge q=d$. Il existe deux entiers premiers entre eux m_1 et q_1 tels que : $m=m_1\,d\,;\,q=q_1\,d$.

Alors : $(q\,q')\wedge m=(q_1\,d\,q')\wedge(m_1 d)=d\,((q_1\,q')\wedge m_1)$.

Mais m_1 et q_1 étant premiers entre eux, $(q_1\,q')\wedge m_1=q'\wedge m_1$

Puisque d divise q, il est premier avec q' et par conséquent : $q' \wedge m_1 = q' \wedge (d\, m_1)$. C'est à dire : $q' \wedge m_1 = q' \wedge m$. Finalement : $f_m(q\,q') = (q\,q') \wedge m = (m \wedge q) \times (q' \wedge m) = f_m(q) \times f_m(q')$. Ce qui établit que f_m est régulière.

2. Par récurrence évidente, si u est régulière, alors : $u\left(\prod_{i=1}^{i=k} q_i\right) = \prod_{i=1}^{i=k} u(q_i)$. En effet, les q_i étant premiers entre eux deux à deux, chaque produit $q_1 ... q_j$ est premier avec le facteur suivant q_{j+1}, on peut donc appliquer la propriété de multiplicativité.

Soit alors n un entier supérieur ou égal à 2 et $n = \prod_{i=1}^{i=k} p_i^{a_i}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers. Ces puissances de facteurs premiers distincts sont premières entre elles deux à deux. $u(n)_{gilbertjulia2014} = u\left(\prod_{i=1}^{i=k} p_i^{a_i}\right) = \prod_{i=1}^{i=k} u\left(p_i^{a_i}\right)$ ce qui prouve que $u(n)$ s'exprime en fonction de valeurs de u sur les puissances de nombres premiers, lesquelles déterminent entièrement u.

Partie C.

1. Soient m et n deux entiers premiers entre eux et soit $d \in D_{m \times n}$

Si on note : $d_1 = d \wedge m$ et d_2 l'entier tel que : $d = d_1 \times d_2$:

Par construction, d_1 appartient à D_m et l'entier d_2 est premier avec m.

Mais puisque d_2 divise d, il divise $m \times n$. Etant premier avec m, d'après le théorème de Gauss, il divise n.

L'entier d est un produit $d_1 \times d_2$; $d_1 \in D_m$, $d_2 \in D_n$. Les entiers d_1 et d_2 sont, par construction, premiers entre eux et les entiers $\frac{m}{d_1}$ et $\frac{n}{d_2}$ le sont aussi.

D'autre part, si un diviseur admet deux décompositions : $d = d_1 d_2 = d'_1\, d'_2$ du même genre, d_1 est premier avec n donc est premier avec d_2 et divise d'_1 et pour les mêmes raisons, d'_1 divise d_1. Ainsi $d_1 = d'_1$; $d_2 = d'_2$ il y a unicité d'une telle décomposition : $D_{m \times n} = \{d_1 \times d_2 \; ; d_1 \in D_m, \, d_2 \in D_n\}$

De façon générale, si m et n sont deux entiers premiers entre eux :

$$u * v(m \times n) = \sum_{d \in D_{m \times n}} u(d) \times v\left(\frac{m \times n}{d}\right) = \sum_{d_1 \in D_m \; ; d_2 \in D_n} u(d_1\, d_2) \times v\left(\frac{m \times n}{d_1\, d_2}\right)$$

Si de plus u et v sont régulières :

$$u * v(m \times n) = \sum_{d_1 \in D_m \; ; d_2 \in D_n} u(d_1) \times v(d_2) \times u\left(\frac{m}{d_1}\right) \times v\left(\frac{n}{d_2}\right)$$

En hiérarchisant la sommation : $u * v(m \times n)_{gilbertjulia2014} = \sum_{d_1 \in D_m} u(d_1) \times v\left(\frac{m}{d_1}\right) \times \left(\sum_{d_2 \in D_n} u(d_2) \times v\left(\frac{n}{d_2}\right)\right)$.

Ce qui donne : $u * v(m \times n) = (u * v(m)) \times (u * v(n))$. Et qui prouve la régularité du composé.

2. $v = \theta * \theta$ puisque par définition du nombre de diviseurs : : $v(n) = \sum_{d \in D_n} 1$

D'autre part : $\sigma = \psi * \theta$ puisque par définition de la somme des diviseurs : : $\sigma(n) = \sum_{d \in D_n} d$

Ce qui prouve leur régularité, comme composés de fonctions régulières.

Si n est une puissance de nombre premier : $n = p^a$, il a pour diviseurs $1, p, ..., p^a$ qui sont au nombre de $a+1$ et dont la somme est $1 + p + ... + p^a = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1}$

Si $n = p_1^{a_1} ... p_k^{a_k}$ avec $(p_1,...p_k) \in P^k$ et $(a_1,...a_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$, par multiplicativité : $v(n) = \prod_{i=1}^{i=k} (a_i + 1)$ et

$$\sigma(n) \underset{gilbertjulia2014}{=} \prod_{i=1}^{i=k} \left(\frac{p_i^{a_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) ;$$

Par exemple, $700 = 2^2 \times 5^2 \times 7$ donc $v(700) = 18$ et $\sigma(700) = (8-1) \times \frac{125-1}{5-1} \times \frac{49-1}{7-1} = 1736$

3. Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Alors, leurs décompositions $n = p_1^{a_1} ... p_k^{a_k}$ et $m = p'^{a'_1}_1 ... p'^{a'_{k'}}_{k'}$ en produit de facteurs premiers n'ont aucun facteur commun. $m \times n = p_1^{a_1} ... p_k^{a_k} p'^{a'_1}_1 ... p'^{a'_{k'}}_{k'}$ est la décomposition du produit.
Ou bien au moins un des exposants est >1, auquel cas l'un au moins des entiers a pour image 0 et $\mu(m \times n) = 0$ est le produit des images ou bien tous les exposants sont égaux à 1, auquel cas on obtient une décomposition en $k + k'$ nombres premiers distincts, $\mu(m \times n) = (-1)^{k+k'} = \mu(m)\mu(n)$ aussi. La suite est régulière.

Les suites $\mu * \theta$; $\mu * v$; $\mu * \sigma$; $\mu * \mu$ prennent la valeur 1 en 1 puis sont déterminées par leurs valeurs pour les puissances de nombres premiers. Soit p^a un tel entier.
De façon générale : $\mu * u(p^a) = \sum_{i=1}^{i=a} \mu(p^i) u(p^{a-1}) \underset{gilbertjulia2014}{=} \mu(1) u(p^a) + \mu(p) u(p^{a-1}) = u(p^a) - u(p^{a-1})$ car $\mu(1) = 1$; $\mu(p) = -1$ sont les seules contributions non nulles associées à la suite μ.
$\mu * \theta(p^a) = 1 - 1 = 0$. Par conséquent : $\mu * \theta(n) = 0$ pour tout entier n>1. Ainsi, μ et θ sont inverses l'une de l'autre pour la loi « étoile ».
$\mu * v(p^a) = v(p^a) - v(p^{a-1}) = (a+1) - a = 1$. Par conséquent : $\mu * v(n) = 1$ pour tout entier n>1. Il en résulte que : $\mu * v = \theta$

$\mu * \sigma(p^a) = \sigma(p^a) - \sigma(p^{a-1}) = \frac{p^{a+1} - 1}{p - 1} - \frac{p^a - 1}{p - 1} = \frac{p^{a+1} - p^a}{p - 1} = p^a$ Par conséquent : $\mu * v(n) = n$ pour tout entier n>1. Il en résulte que : $\mu * \sigma = \psi$.

$$\mu * \mu(p^a) = \mu(p^a) - \mu(p^{a-1}) = \begin{cases} 0 \ si \ a > 2 \\ 0 - (-1) = 1 \ si \ a = 2 \\ -1 - 1 = -2 \ si \ a = 1 \end{cases}$$

On en déduit : $\mu * \mu(n) = 0$ s'il a au moins un facteur cube, $\mu * \mu(n) = (-2)^k$ s'il a exactement k facteurs premiers non répétés.

Questions complémentaires.
1. ***Les éléments inversibles.***
Soit u un élément de U. Il est inversible si et seulement si il existe un élément v de U tel que : $u * v(n) = \sum_{d \in D_n} u(d) \times v\left(\frac{n}{d}\right) = \omega(n)$ pour tout entier n.
En particulier il est nécessaire que : $u * v(1) = u(1) \times v(1) = \omega(1) = 1$.
Si $u(1) = 0$, alors u n'est pas inversible.

La condition $u(1) \neq 0$ est nécessaire pour que u soit inversible et dans ce cas : $v(1) = \frac{1}{u(1)}$

Cette condition étant supposée vérifiée, soit n un entier >1 et supposons que pour tout entier $k \leq n - 1$, les $v(k)$ aient été exprimés en fonction de $u(1),...,u(k-1)$.
Puisque n est un entier >1, il admet au moins un diviseur autre que 1.

$u*v(n)=\sum_{d\in D_n} u(d)\times v\left(\frac{n}{d}\right)=0$ implique : $u(1)\times v(n)+\sum_{d\in D_n, d\neq 1} u(d)\times v\left(\frac{n}{d}\right)=0$ et par conséquent : $v(n)=-\frac{1}{u(1)}\left(\sum_{d\in D_n, d\neq 1} u(d)\times v\left(\frac{n}{d}\right)\right)$. $v(n)$ s'exprime en fonction $u(1),...,u(n)$. Par récurrence, on peut ainsi construire un élément de U inverse de u pour la loi étoile.
Il en résulte que la condition $u(1)\neq 0$ est suffisante pour que *f* soit inversible.
Si tel est le cas :

- $u^{-1}(1)=\frac{1}{u(1)}$.
- Si p est un nombre premier, la relation concernant l'inverse de f donne : $u*u^{-1}(p)=u(1)\times u^{-1}(p)+u(p)\times u^{-1}(1)=0$ c'est à dire : $u^{-1}(p)=-\frac{u(p)}{(u(1))^2}$

2. Soit *v* la suite régulière définie par : $v(1)=1$ et par la formule de récurrence :

Pour tout entier $a\geq 1$: $v(p^a)=-\frac{1}{u(1)}\left(\sum_{1\leq i\leq a} u(p^i)\times v(p^{a-i})\right)$

Par construction, cette fonction coïncide avec u^{-1} sur les puissances de nombres premiers.

De ce fait, pour tout nombre premier et tout exposant a strictement positif : $u*v(p^a)=u*u^{-1}(p^a)=\omega(p^a)=0$

Plus généralement, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 tel que $n=\prod_{i=1}^{i=k} p_i^{a_i}$,

$$u*v(n) \underset{gilbertjulia2014}{=} u*v\left(\prod_{i=1}^{i=k} p_i^{a_i}\right)=\prod_{i=1}^{i=k} u*v\left(p_i^{a_i}\right)=0 .$$

Ainsi : $u*v=\omega$. Par unicité de l'inverse d'un élément pour une loi de composition interne associative : $v=u^{-1}$. Une suite régulière admet donc une suite inverse elle-même régulière.

2.1. On reconnaît la fonction zêta de Riemann, somme d'une série à termes positifs convergente : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\theta(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}=\zeta(s)$ qui est convergente pour $s>1$. Seule est à justifier la convergence absolue de $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}$, laquelle est acquise du fait que : $|\mu(n)|\leq 1$ donc que $\left|\frac{\mu(n)}{n^s}\right|\leq\frac{1}{n^s}$ pour tout entier *n*.

2.2. $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\theta(n)}{n^s}\right)\times\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mu(n)}{n^s}\right)=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\theta(k)\mu(n-k)}{k^s(n-k)^s}\right)$. Puisque les deux séries convergent absolument, on peut réorganiser autrement les termes figurant dans la sommation sans changer la valeur de la somme.
En particulier, on peut considérer la valeur des dénominateurs :
En posant : $k(n-k)=a$, les entiers *k* et $n-k$ sont des diviseurs complémentaires de *a*.
On réorganise la sommation en hiérarchisant suivant la valeur de ce dénominateur :

- Ceux qui ont pour dénominateur 2^s : $\frac{\theta(1)\mu(2)+\theta(2)\mu(1)}{2^s}$.
- Ceux qui ont pour dénominateur 3^s : $\frac{\theta(1)\mu(3)+\theta(3)\mu(1)}{3^s}$.
- Ceux qui ont pour dénominateur 4^s : $\frac{\theta(1)\mu(4)+\theta(2)\mu(2)+\theta(4)\mu(1)}{2^s}$.

- De façon générale, ceux dont le dénominateur est a^s : $\dfrac{\sum_{k\in D_a}\theta(k)\mu\left(\frac{a}{k}\right)}{a^s}$.

On obtient : $\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\theta(n)}{n^s}\right)\times\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\mu(n)}{n^s}\right)=1+\sum_{a=2}^{+\infty}\dfrac{1}{a^s}\left(\sum_{k\in D_a}\theta(k)\mu\left(\dfrac{a}{k}\right)\right)=\sum_{a=1}^{+\infty}\dfrac{\theta*\mu(a)}{a^s}$.

Et du fait que les deux suites θ et μ sont inverses l'une de l'autre pour la loi « étoile », $\theta*\mu=\omega$:

$_{gilbertjulia2014}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\mu(n)}{n^s}\right)=1$ et : $\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\mu(n)}{n^s}=\dfrac{1}{\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^s}}=\dfrac{1}{\zeta(s)}$