Rennes terminale C, session de septembre 1976 : Point de Torricelli d'un triangle

Certains sujets de Baccalauréat des années 1960 à 1990 ont marqué leur époque par leur originalité ou leur hardiesse. Tel est le sujet de Rennes septembre 1976. Le problème présenté ici porte sur une application géométrique des nombres complexes à la résolution d'un problème de minimum dans le domaine de la géométrie euclidienne. Il fut repris par le manuel Magnard Terminale C édition 1979, référence en la matière.

Les candidats au CAPES risquent d'être quelque peu surpris par le niveau des questions, sans commune mesure avec les niveaux dérisoires des sujets de baccalauréat actuels. Ce niveau me semble au moins du même ordre que celui des sujets de CAPES les plus récents. Ce qui amène à penser qu'un élève de Terminale C des années 1970 était présumé avoir le même niveau que les candidats au CAPES des années 2010. Ou réciproquement.

1. Le sujet

Le plan affine euclidien E étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\, \vec{u},\, \vec{v}\right)$, à tout point M de E de coordonnées $(x,\, y)$ on associe le nombre complexe $z = x + i\,y$ affixe de M.

I. 1. Soient deux points M_1 d'affixe z_1 et M_2 d'affixe z_2. Montrer que M_1 et M_2 appartiennent à la même demi droite d'origine O si et seulement si $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.
(*On pourra par exemple écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique*)

2. En déduire que trois points M_1 d'affixe z_1, M_2 d'affixe z_2 et M_3 d'affixe z_3 appartiennent à la même demi droite d'origine O si et seulement si $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|$.

II. Soient A_1, A_2 et A_3 trois points dont les affixes a_1, a_2 et a_3 vérifient : $|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1$. Montrer que A_1, A_2 et A_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O si et seulement si : $a_1 + a_2 + a_3 = 0$
(On pourra considérer l'isobarycentre des points A_1, A_2 et A_3)

III. 1. Soient B_1, B_2 et B_3 trois points dont les affixes b_1, b_2 et b_3 vérifient : $\dfrac{b_1}{|b_1|} + \dfrac{b_2}{|b_2|} + \dfrac{b_3}{|b_3|} = 0$. On pose : $\alpha_1 = \dfrac{b_1}{|b_1|}$; $\alpha_2 = \dfrac{b_2}{|b_2|}$; $\alpha_3 = \dfrac{b_3}{|b_3|}$
Montrer que le nombre : $S = \overline{\alpha_1}(z - b_1) + \overline{\alpha_2}(z - b_2) + \overline{\alpha_3}(z - b_3)$ est indépendant de z. Calculer $|S|$ et en déduire que $\forall z \in \mathbf{C}$: $|b_1| + |b_2| + |b_3| \leq |z - b_1| + |z - b_2| + |z - b_3|$

2. Montrer que pour qu'un nombre complexe z vérifie la relation :
$|b_1| + |b_2| + |b_3| = |z - b_1| + |z - b_2| + |z - b_3|$ **(1)**
il faut et il suffit que les trois angles de vecteurs $\left(\overrightarrow{OB_1},\, \overrightarrow{B_1M}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB_2},\, \overrightarrow{B_2M}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB_3},\, \overrightarrow{B_3M}\right)$ soient égaux.
Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie **(1)** ?

3. Soient MB_1, MB_2 et MB_3 les distances respectives de M aux points B_1, B_2 et B_3. On pose : $S(M) = MB_1 + MB_2 + MB_3$.
Démontrer que l'ensemble des réels $S(M)$ pour M appartenant à E a un plus petit élément.

IV. Soit ABC un triangle dont chaque angle géométrique a une mesure en radians inférieure à $\dfrac{2\pi}{3}$.
Déterminer par une construction géométrique simple le point M qui réalise le minimum de $MA + MB + MC$

V. Complément (pour aller plus loin, ne figure pas dans l'énoncé original).

Soit ABC un triangle.

Lorsque l'angle géométrique de sommet A du triangle ABC a pour mesure $\frac{2\pi}{3}$ exactement, la partie **IV** a établi en principe que le minimum de $MA+MB+MC$ est obtenu lorsque M est en A.

On suppose que l'angle géométrique de sommet A du triangle ABC a une mesure strictement supérieure à $\frac{2\pi}{3}$. Soit M un point strictement intérieur au triangle ABC. L'un au moins des deux angles géométriques $\widehat{MAB}$ ou $\widehat{MAC}$ a une mesure strictement inférieure à $\frac{2\pi}{3}$. Supposons qu'il s'agisse de $\widehat{MAB}$. Puisque $\widehat{MAB}$ a une mesure strictement inférieure à $\frac{2\pi}{3}$ tandis que $\widehat{CAB}$ a une mesure strictement supérieure à

Justifier l'existence d'un point D du segment $[MC]$, strictement entre M et C, tel que :

$\widehat{ABD}=\frac{2\pi}{3}$ exactement.

En considérant que $MA+MB+MC=MA+MB+MD+DC$, montrer que $MA+MB+MC>AB+AC$.
Conclure.

2. Eléments de correction

I. 1. M_1 et M_2 appartiennent à la même demi droite d'origine O si et seulement si $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

À l'aide d'une interprétation géométrique des modules (cette solution est avantageuse pour traiter la question suivante)

On désigne par S le point d'affixe z_1+z_2 : $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OM}_1+\overrightarrow{OM}_2$

On écarte le cas particulier où $z_1=z_2=0$, auquel cas $M_1=M_2=S=O$.

Si au moins l'une des deux affixes n'est pas nulle, $|z_1|+|z_2|>0$ et si $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$, alors S est distinct de O et définit une demi droite [OS). Sous cette hypothèse, S est le quatrième sommet d'un parallélogramme de sommets O, M_1 et M_2. Dans ce parallélogramme, $OM_2=M_1S$ ainsi que $OM_1=M_2S$ comme côtés opposés.

$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow OS=OM_1+OM_2=OM_1+SM_1 =_{gjulia2017} OM_2+SM_2$.

Or, ces cas d'égalité d'inégalités triangulaires caractérisent le fait que M_1 appartient au segment [OS] et que M_2 appartient au segment [OS]. M_1 et M_2 étant tous deux sur le même segment [OS], et ils sont alignés sur la même demi-droite [OS).

Réciproquement, si M_1 et M_2 sont sur une même demi-droite d'origine O, soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de cette demi-droite. Il existe λ_1 et λ_2 tous deux positifs tel que $\overrightarrow{OM_1}=\lambda_1.\vec{w}$ et $\overrightarrow{OM_2}=\lambda_2.\vec{w}$.

$|z_1|=\lambda_1\|\vec{w}\|$ et $|z_2|=\lambda_2\|\vec{w}\|$

$\overrightarrow{OS}=(\lambda_1+\lambda_2).\vec{w}$ et : $\|\overrightarrow{OS}\|=(\lambda_1+\lambda_2)\|\vec{w}\| =_{gj2017} \lambda_1\|\vec{w}\|+\lambda_2\|\vec{w}\|=|z_1|+|z_2|$. On obtient que $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$

À l'aide de la forme trigonométrique :

On écarte le cas particulier où $z_1=z_2=0$, auquel cas $M_1=M_2=O$.

Si l'un exactement des deux nombres z_1 ou z_2 est nul, alors l'égalité $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ est acquise, l'un des points M_1 ou M_2 est confondu avec O et l'alignement sur une même demi droite d'origine O est acquis.

Sinon, on peut écrire chacune $_{gj}$ des deux affixes sous forme trigonométrique : $z_1=r_1\,\mathbf{e}^{i\theta_1}$ et $z_2=r_2\,\mathbf{e}^{i\theta_2}$.

L'égalité des nombres positifs : $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ est équivalente à l'égalité de leurs carrés.

$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})=(r_1\,\mathbf{e}^{i\theta_1}+r_2\,\mathbf{e}^{i\theta_2})(r_1\,\mathbf{e}^{-i\theta_1}+r_2\,\mathbf{e}^{-i\theta_2})$.

Ainsi : $|z_1+z_2|^2=r_1{}^2+r_2{}^2+r_1r_2\left(\mathbf{e}^{i(\theta_1-\theta_2)}+\mathbf{e}^{i(\theta_2-\theta_1)}\right)=r_1{}^2+r_2{}^2+2r_1r_2\cos(\theta_2-\theta_1)$ tandis que : $(|z_1|+|z_2|)^2=r_1{}^2+r_2{}^2+2r_1\,r_2$ et donc : $|z_1+z_2|^2-(|z_1|+|z_2|)^2 =_{gjulia2017} 2r_1r_2\left(\cos(\theta_2-\theta_1)-1\right)$

On peut conclure : $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2| \Leftrightarrow \cos(\theta_2-\theta_1)=1$

Or : $\cos(\theta_2-\theta_1)=1 \Leftrightarrow \theta_2\equiv\theta_1 \mod 2\pi$, c'est-à-dire que z_1 et z_2 ont les mêmes arguments.

Ce qui équivaut au fait que leurs images M_1 et M_2 sont alignés sur une même demi droite d'origine O.

2. On écarte le cas où l'un des trois points M_i est confondu avec O, auquel cas on est ramené au cas ci-dessus de deux points. On suppose donc les trois points M_i tous distincts de O.

Si M_1, M_2 et M_3 sont sur une même demi-droite d'origine O, alors c'est le cas de M_1 et de M_2 et donc $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$. Le point S de la question 1 est distinct de O et appartient à cette demi-droite. On peut appliquer la question 1 aux points S et M_3 ce qui donne : $|(z_1+z_2)+z_3| =_{gjulia2017} |z_1+z_2|+|z_3|=|z_1|+|z_2|+|z_3|$.

Réciproquement, si $|z_1+z_2+z_3|=|z_1|+|z_2|+|z_3|$:

On écarte le cas où l'une des affixes est nulle, qui se ramène au cas de deux points.

On désigne par T le point d'affixe $z_1+z_2+z_3$, forcément distinct de O puisque $|z_1+z_2+z_3|=|z_1|+|z_2|+|z_3|>0$

Si la relation $|z_1+z_2+z_3|=|z_1|+|z_2|+|z_3|$ est vérifiée, alors les inégalités triangulaires $|z_1+z_2+z_3|\le|z_1+z_2|+|z_3|\le|z_1|+|z_2|+|z_3|$ deviennent des égalités : $|z_1+z_2+z_3|=|z_1+z_2|+|z_3|=|z_1|+|z_2|+|z_3|$.

Ceci montre d'une part que O, S, M_3 et T sont sur une même demi-droite d'origine O, et d'autre part que, O,

M_1, M_2 et S sont aussi sur une même demi droite d'origine O. Il s'agit dans les deux cas de la même demi droite, en l'occurrence $[OT]$. Donc, les points O, M_1, M_2, M_3 sont sur une même demi-droite d'origine O.

Partie II.

- Le fait que les trois modules soient égaux à 1 équivaut au fait que le point O est centre du cercle circonscrit au triangle $A_1A_2A_3$ et, accessoirement, que ce cercle a pour rayon 1 (les trois modules égaux suffiraient à notre bonheur).
- La relation $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ équivaut au fait que le point O est centre de gravité du triangle.

Il s'agit d'établir qu'un triangle est équilatéral si et seulement si son centre du cercle circonscrit est aussi son centre de gravité. Seule la réciproque est à démontrer, l'implication directe étant évidente.
Soit donc ABC tel que son centre du cercle circonscrit est aussi son centre de gravité :
Si I est milieu de $[BC]$, la droite (AI) est médiane du triangle.

La droite (OI) est médiatrice de $[BC]$. Mais compte tenu de l'alignement de A et I avec le centre de gravité, (OI) passe par A. (AI) est aussi une médiatrice du triangle. Par conséquent : $AB = AC$: le triangle ABC est isocèle en A. De même, on montrerait qu'il est isocèle en B donc il est équilatéral.

Il est plus long de tenter de le prouver en utilisant des calculs dans l'ensemble des complexes :
On va noter a, b, c les affixes des trois sommets. Sans modifier la généralité, on peut supposer que $a = 1$, quitte à effectuer une rotation du triangle autour de O. Donc, ABC ont pour affixes 1, b et c avec b et c de module 1.

Si $b = \mathbf{e}^{i\theta}$ et $c = \mathbf{e}^{i\theta'}$

$$b + c = \mathbf{e}^{i\theta} + \mathbf{e}^{i\theta'} = \exp\left(i.\frac{\theta+\theta'}{2}\right)\left[\exp(i.\frac{\theta-\theta'}{2}) + \exp\left(-i.\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\right] = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\exp\left(i.\frac{\theta+\theta'}{2}\right).$$

La relation $1 + b + c = 0$ équivaut à : $1 + 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)\exp\left(i.\frac{\theta+\theta'}{2}\right) = 0$

Une condition nécessaire est que $\exp\left(i.\frac{\theta+\theta'}{2}\right)$ soit un nombre réel (en l'occurrence 1 ou -1).

Une CNS est que : $\begin{cases} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) = -\frac{1}{2} \\ \exp\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right) = 1 \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} \cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right) = \frac{1}{2} \\ \exp\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right) = -1 \end{cases}$ c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{\theta-\theta'}{2} \equiv \frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi \\ \frac{\theta+\theta'}{2} \equiv 0 \bmod 2\pi \end{cases} \text{ ou bien } \begin{cases} \frac{\theta-\theta'}{2} \equiv \frac{\pi}{3} \bmod 2\pi \\ \frac{\theta+\theta'}{2} \equiv \pi \bmod 2\pi \end{cases}$$

Dans le premier cas, on obtient : $\begin{cases} \theta \equiv \frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi \\ \theta' \equiv -\frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi \end{cases}$ et dans le deuxième : $\begin{cases} \theta \equiv \frac{4\pi}{3} \bmod 2\pi \\ \theta' \equiv \frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi \end{cases}$

c'est-à-dire finalement la même solution à l'orientation près.

Ainsi, la relation $1 + b + c = 0$ équivaut au fait que les sommets de ABC ont pour affixe 1, $b = \mathbf{e}^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$; $c = \mathbf{e}^{\mp i\frac{2\pi}{3}}$ affixes des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité.

Partie III.

L'hypothèse « B_1, B_2 et B_3 sont trois points dont les affixes b_1, b_2 et b_3 vérifient : $\dfrac{b_1}{|b_1|}+\dfrac{b_2}{|b_2|}+\dfrac{b_3}{|b_3|}=0$ » a quelques conséquences que l'on va d'abord détailler :

C1. Il va de soi selon l'énoncé que les points B_i pour $i=1,2,3$ ont tous des affixes non nulles, ils sont tous distincts de l'origine.

C2. Pour chaque indice i, $i=1,2,3$, on peut noter A_i le point dont l'affixe est α_i ; α_i a le même argument que b_i et en conséquence O, A_i et B_i sont alignés sur un même demi droite d'origine O : $\left(\overrightarrow{OA_i}, \overrightarrow{OB_i}\right)=0\ (2\pi)$.

C3. Mais pour $i=1,2,3$ $\alpha_i=\dfrac{b_i}{|b_i|}$ et ces trois nombres complexes sont de module 1. Puisque de plus $\displaystyle\sum_{i=1}^{i=3}\alpha_i=0$, en vertu de la partie **II**, les points A_i pour $i=1,2,3$ sont les trois sommets d'un triangle équilatéral, inscrit dans le cercle unité. En conséquence $\left(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}\right)=\left(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}\right)=\left(\overrightarrow{OA_3}, \overrightarrow{OA_1}\right)=\pm\dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

C4. Il en résulte que $\left(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2}\right)=\left(\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_3}\right)=\left(\overrightarrow{OB_3}, \overrightarrow{OB_1}\right)=\pm\dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$

1. $S=\overline{\alpha_1}(z-b_1)+\overline{\alpha_2}(z-b_2)+\overline{\alpha_3}(z-b_3)=\left(\overline{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}\right)z-\overline{\alpha_1}\,b_1-\overline{\alpha_2}\,b_2-\overline{\alpha_3}\,b_3$

Les nombres complexes α_1, α_2, α_3 ont pour somme zéro, le conjugué de leur somme est aussi zéro : le coefficient de z dans S est donc nul et $S=-\overline{\alpha_1}\,b_1-\overline{\alpha_2}\,b_2-\overline{\alpha_3}\,b_3$, indépendant de z.

$S=-\dfrac{b_1\overline{b_1}}{|b_1|}-\dfrac{b_2\overline{b_2}}{|b_2|}-\dfrac{b_3\overline{b_3}}{|b_3|}=-\left(|b_1|+|b_2|+|b_3|\right)$ est un nombre réel strictement négatif. $|S|=-S=|b_1|+|b_2|+|b_3|$

Le module d'une somme étant inférieur ou égal à la somme des modules, quel que soit le complexe z :

$$|S|=\left|\overline{\alpha_1}(z-b_1)+\overline{\alpha_2}(z-b_2)+\overline{\alpha_3}(z-b_3)\right|\le\sum_{i=1}^{3}\left|\overline{\alpha_i}(z-b_i)\right|=\sum_{i=1}^{3}|z-b_i|\quad.$$

Il en résulte que quel que soit le complexe z : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}|b_i|\le\sum_{i=1}^{3}|z-b_i|$

Interprétation géométrique : quel que soit le point M d'affixe z : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}OB_i\le\sum_{i=1}^{3}MB_i$

Ainsi, dans le cas où il existe un point O vérifiant $\left(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2}\right)=\left(\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_3}\right)=\left(\overrightarrow{OB_3}, \overrightarrow{OB_1}\right)=\pm\dfrac{2\pi}{3}\ (2\pi)$, ce point réalise le minimum de $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}MB_i$.

2. Dire que z vérifie la relation : $|b_1|+|b_2|+|b_3|=|z-b_1|+|z-b_2|+|z-b_3|$ équivaut à dire que z vérifie la relation : $\left|\overline{\alpha_1}(z-b_1)+\overline{\alpha_2}(z-b_2)+\overline{\alpha_3}(z-b_3)\right|=\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\left|\overline{\alpha_i}(z-b_i)\right|$ ou que les trois complexes $\overline{\alpha_i}(z-b_i)$ vérifient les conditions de la question **I.2**. Une CNS est que ils aient des arguments égaux.

Or : $\arg\left(\overline{\alpha_i}(z-b_i)\right)=\arg(z-b_i)-\arg(\alpha_i)=\left(\overrightarrow{OB_i}, \overrightarrow{B_iM}\right)$.

Il faut et il suffit que les trois angles de vecteurs $\left(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{B_1M}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{B_2M}\right)$, $\left(\overrightarrow{OB_3}, \overrightarrow{B_3M}\right)$ soient égaux.

Ce qui est équivalent à $\left(\overrightarrow{B_1O}, \overrightarrow{B_1M}\right)=\left(\overrightarrow{B_2O}, \overrightarrow{B_2M}\right)=\left(\overrightarrow{B_3O}, \overrightarrow{B_3M}\right)$

Si M est un point vérifiant ces égalités angulaires :

O, B_1, B_2 et M sont alignés ou cocycliques.
O, B_1, B_3 et M sont alignés ou cocycliques.
O, B_3, B_2 et M sont alignés ou cocycliques.
L'alignement est hors de question d'après les hypothèses passées en revue au début de cette question. Il reste la cocyclicité, sur chacun des trois cercles circonscrits aux triangles OB_iB_j. Mais ces trois cercles n'ont que le point O en commun puisque deux à deux ils se coupent en O et en un point B_i. Aucun autre point que le point O vérifie la propriété en question.

Ainsi, dans le cas où il existe un point O vérifiant $\left(\overrightarrow{OB_1}, \overrightarrow{OB_2}\right)=\left(\overrightarrow{OB_2}, \overrightarrow{OB_3}\right)=\left(\overrightarrow{OB_3}, \overrightarrow{OB_1}\right)=\pm\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$, ce point est l'unique point qui réalise le minimum de $\sum_{i=1}^{3} MB_i$.

3. La fonction $M \mapsto MA_1 + MA_2 + MA_3$ définie sur le plan et à valeurs dans **R** est une fonction continue.
Tout point M strictement extérieur au triangle est strictement au moins dans un demi plan de frontière un côté du triangle en ne contenant pas le troisième sommet. Par exemple, strictement dans le demi plan de frontière (A_1A_2) qui ne contient pas A_3. Si on considère le symétrique M' de M par rapport à (A_1A_2), $M'A_1 = MA_1$ et $M'A_2 = MA_2$ mais $M'A_3 < MA_3$. Ainsi, la fonction $M \mapsto MA_1 + MA_2 + MA_3$ n'atteint pas son minimum en M. Elle ne peut atteindre son minimum en aucun point strictement extérieur au triangle. Si elle l'atteint, c'est à l'intérieur (au sens large).

Mais l'intérieur du triangle frontière comprise est fermé borné, c'est un compact. La fonction continue $M \mapsto MA_1 + MA_2 + MA_3$ y est bornée et elle atteint ses bornes : en particulier, elle y admet un minimum qu'elle atteint.

Partie IV
On oriente le plan de façon que ABC soit un triangle de sens direct.

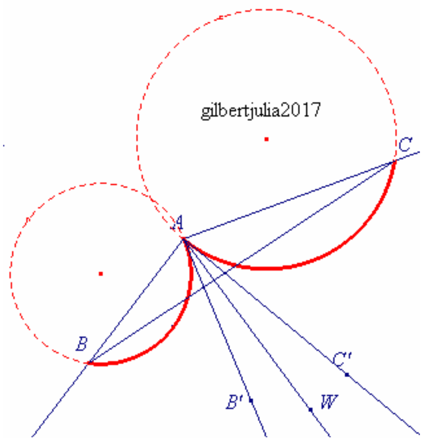
On construit les cercles lieux des points N du plan tels que $\left(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}\right)=\frac{\pi}{3}\ (\pi)$ et tels que $\left(\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NA}\right)=\frac{\pi}{3}\ (\pi)$.

Ces deux cercles se coupent en A, ils ont un autre point d'intersection I, distinct de A si l'angle géométrique de sommet A du triangle n'a pas pour mesure $\frac{2\pi}{3}$. Alors : $\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IC}\right)=\left(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}\right)=\frac{\pi}{3}\ (\pi)$; Le point I appartient au cercle lieu des points N du plan tels que $\left(\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC}\right)=\frac{\pi}{3}\ (\pi)$.

Reste à préciser la position de ce point I.

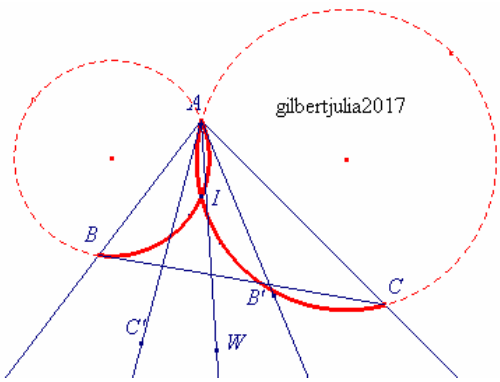
Les arcs de ces cercles où $\left(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}\right)=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ et où $\left(\overrightarrow{NC}, \overrightarrow{NA}\right)=\frac{2\pi}{3}\ (2\pi)$ sont en gras, les autres arcs en pointillés.

On a construit la demi droite $[AW)$ bissectrice intérieure de l'angle de sommet A ainsi que les demi tangentes en A aux deux cercles $[AB')$ et $[AC')$ telles que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right)=\left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AC}\right)=\frac{\pi}{3}\ (2\pi)$



Soit θ la mesure en radians de l'angle géométrique de sommet A du triangle. Vu le choix d'orientation : $\left(\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AW}\right)=\left(\overrightarrow{AW},\,\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\theta}{2}.\,(2\pi)$

Lorsque l'angle géométrique de sommet A du triangle a une mesure en radians θ supérieure ou égale à $\frac{2\pi}{3}$, comme c'est le cas sur la figure ci-dessus : $\frac{\pi}{3}\leq\theta<\frac{\pi}{2}$. L'arc de cercle lieu des points N vérifiant $\left(\overrightarrow{NA},\,\overrightarrow{NB}\right)=\frac{2\pi}{3}\,(2\pi)$ est inclus dans le secteur angulaire ABB' donc à fortiori dans le secteur angulaire ABW tandis que l'arc de cercle lieu des points N vérifiant $\left(\overrightarrow{NC},\,\overrightarrow{NA}\right)=\frac{2\pi}{3}\,(2\pi)$ est inclus dans le secteur angulaire $AC'C'$ donc à fortiori dans le secteur angulaire AWC : ces deux arcs sont de part et d'autre de [AW) et n'ont en commun que le point A. Les deux cercles lieux des points N du plan tels que $\left(\overrightarrow{NB},\,\overrightarrow{NA}\right)=\frac{\pi}{3}\,(\pi)$ et tels que $\left(\overrightarrow{NC},\,\overrightarrow{NA}\right)=\frac{\pi}{3}\,(\pi)$ ne se recoupent pas sur ces arcs, mais sur les arcs en pointillés. Il n'existe pas pour le triangle ABC de point ayant le statut du point O de l'énoncé.



Lorsque l'angle géométrique de sommet A du triangle a une mesure en radians θ inférieure à $\frac{2\pi}{3}$:

$0<\theta<\frac{\pi}{3}$. Les deux arcs de cercle traversent la demi tangente [AW). Ils se coupent en un point I distinct de A appartenant strictement au secteur angulaire (saillant) de sommet A du triangle.

Si les trois angles ont tous des mesure en radians inférieures à $\frac{2\pi}{3}$, alors I se trouve strictement dans les trois secteurs saillants du triangle. Il est donc intérieur au triangle.

Dans ce cas, $\left(\overrightarrow{IA},\,\overrightarrow{IB}\right)=\left(\overrightarrow{IB},\,\overrightarrow{IC}\right)=\left(\overrightarrow{IC},\,\overrightarrow{IA}\right)=\frac{2\pi}{3}\,(2\pi)$. Ce point I a exactement le statut du point O défini dans l'énoncé. C'est lui qui réalise le minimum de la somme des distances aux trois sommets.

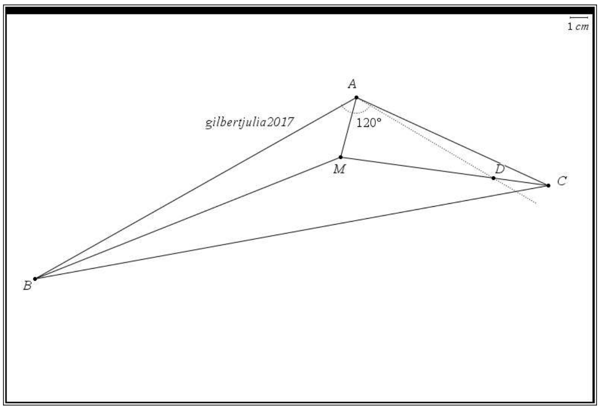
Il est important cependant de remarquer au passage le cas où l'angle géométrique de sommet A du triangle a pour mesure exactement $\frac{2\pi}{3}$. Le point A endosse le statut minimal du point O de l'énoncé en ce sens que c'est l'unique point qui réalise le minimum de la somme des distances aux trois sommets. Ce minimum vaut dans ce cas $AB+AC$.

3. Pour aller plus loin : cas d'un angle géométrique de mesure supérieure à 2π/3

On suppose que l'angle géométrique de sommet *A* du triangle *ABC* a une mesure strictement supérieure à $\frac{2\pi}{3}$. Le minimum de $MA+MB+MC$ est obtenu en un point intérieur au triangle.

Soit *M* un point strictement intérieur au triangle *ABC*. L'un au moins des deux angles géométriques $\widehat{MAB}$ ou $\widehat{MAC}$ a une mesure strictement inférieure à $\frac{2\pi}{3}$. Supposons qu'il s'agisse de $\widehat{MAB}$. Puisque $\widehat{MAB}$ a une mesure strictement inférieure à $\frac{2\pi}{3}$ tandis que $\widehat{CAB}$ a une mesure strictement supérieure à $\frac{2\pi}{3}$, il existe un point *D* du segment [*MC*], strictement entre *M* et *C*, tel que : $\widehat{ABD}=\frac{2\pi}{3}$ exactement.

Le triangle *ABD* vérifie les conditions de la « remarque importante ». La somme $MA+MB+MD$ est minimale lorsque *M* est en *A* : $MA+MB+MD \geq AB+AD$
Or :
$MA+MB+MC = MA+MB+(MD+DC) \geq AB+AD+DC$.
Mais $AD+DC > AC$. Finalement, quel que soit *M* strictement intérieur au triangle :
$MA+MB+MC > AB+AC$. Le minimum de $MA+MB+MC$ est obtenu lorsque *M* est en *A*.



4. Commentaire

On peut certes discuter l'aptitude de ce sujet à réaliser une évaluation bien dosée des candidats bacheliers. Compte tenu du niveau des questions, les candidats bretons de septembre 1976 ont dû pas mal tanguer …

J'ai cependant souhaité proposer ce sujet pour montrer jusqu'où allait, dans les années 70, un sujet de baccalauréat. On mesure l'étendue de la culture mathématique sous jacente en principe acquise par des élèves de terminale de la série C il y a 40 ans. Cela se passe de discours. Depuis lors, beaucoup d'eau est passée sous les ponts. On ne parle plus depuis longtemps de terminale C, jamais été remplacée par une filière scientifique de qualité équivalente.

Un tel sujet est bien entendu inconcevable de nos jours. Il y a un abîme entre ce qu'un élève d'il y a 40 ans était censé savoir, et le maigre baluchon de façade des élèves contemporains. Les discours lénifiants des fossoyeurs ministériels de l'enseignement public, prétendant « développer des compétences » sur des problèmes de colibri n'y changeront rien.