Autour de l'exercice 1 du concours général 1994

Ce problème est construit de manière à proposer une piste de résolution pour un exercice de concours général dont le texte est en partie B. Il appartiendra au lecteur à établir un lien entre les deux parties.
Dans la partie A, on retrouve des thèmes assez voisins de ceux développés dans le problème concernant le « théorème de Beatty ».

NB. On note : $x \mapsto [x]$ la fonction qui à tout réel x associe sa partie entière. On rappelle les propriétés additives de cette fonction, vues dans le problème « Beatty », à savoir :

- Quels que soient les réels x et y : $[x]+[y] \leq [x+y] \leq [x]+[y]+1$
- Quels que soient les réels x et y : $[x+y] = x+[y]$ si et seulement si x est un entier.

Soit x un nombre réel strictement positif. On associe à ce nombre la suite de ses multiples :
$S(x) = (n\,x)_{n\in N} = \{0\ ;\ x\ ;\ 2x\ ;\ 3x\ ;...\}$.*On s'intéresse aux nombres d'entiers qui sont compris entre deux termes consécutifs de cette suite. C'est-à-dire, n étant un entier naturel donné, on cherche à savoir combien il y a d'entiers p qui vérifient la double inégalité : $n\,x \leq p \leq (n+1)x$. On note u_n ce nombre.*

1. Le sujet

Partie A.

1. Exprimer u_0 en fonction de la partie entière $[x]$ du nombre réel strictement positif x.

2. Dans cette question et dans la suivante, on suppose que $0 < x < 1$. Démontrer qu'alors, quel que soit l'entier naturel n, ou bien $u_n = 0$, ou bien $u_n = 1$.

3. Pour tout entier k strictement positif, on désigne par I_k l'intervalle : $I_k = [(k-1)x,\ k\,x]$. Ainsi $I_1 = [0,\ x]$, $I_2 = [x,\ 2\,x]$, .., $I_n = [(n-1)x,\ n\,x]$. On suppose comme dans la question précédente que $0 < x < 1$. On souhaite savoir combien parmi ces n intervalles contiennent exactement un entier.

3.1. On suppose que x est irrationnel.
Montrer que parmi les n intervalles : $I_1 = [0,\ x]$, $I_2 = [x,\ 2\,x]$, .., $I_n = [(n-1)x,\ n\,x]$ il y a exactement $[n\,x]+1$ intervalles qui contiennent exactement un entier.

3.2. La proposition précédente est-elle encore vérifiée lorsque x est rationnel ?

4. On suppose désormais que : $x > 1$
4.1. Montrer que quel que soit l'entier naturel n ou bien $u_n = [x]$, ou bien $u_n = [x]+1$
4.2. On suppose que x est irrationnel, et on pose : $x = [x]+\alpha$. Exprimer en fonction de α et de n le nombre d'intervalles parmi $I_1 = [0,\ x]$, $I_2 = [x,\ 2\,x]$, .., $I_n = [(n-1)x,\ n\,x]$ qui contiennent exactement $[x]+1$ entiers.

Partie B.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'entiers p pour lesquels $50^n \leq 7^p \leq 50^{n+1}$

1. Démontrer que pour tout entier n, u_n vaut 2 ou 3.

2. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels u_n vaut 3 et donner le plus petit d'entre eux.

2. Eléments de correction

Partie A.

1. Compte tenu de la définition de la partie entière d'un nombre réel, l'ensemble des entiers qui sont situés au sens large entre 0 et x est l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ [x]\}$. Son cardinal est : $u_0 = [x]+1$.

2. Lorsque $0<x<1$, l'intervalle $[n\,x\ ;\ (n+1)x]$ a une longueur strictement plus petite que 1. Vu que la différence entre deux entiers distincts est supérieure ou égale à 1, cet intervalle contient au plus un entier.
Donc : ou bien $u_n = 0$ ou bien $u_n = 1$, ce qui achève la démonstration. En particulier, $u_0 = 1$ dans ce cas.

On peut si l'on veut chercher à discuter quel est, éventuellement, cet entier.
On dispose en toute généralité de l'inégalité : $[n\,x] \le n\,x < [n\,x]+1$ ainsi que de l'inégalité : $[n\,x]+[x] \le [(n+1)x] \le (n+1)x < [(n+1)x]+1 \le ([n\,x]+[x]+1)+1$
Lorsque $0<x<1$, cette dernière inégalité devient : $[n\,x] \le [(n+1)x] \le (n+1)x < [n\,x]+2$.
L'entier $[(n+1)x]$ est égal ou bien à $[n\,x]$ lui-même, ou bien à $[n\,x]+1$.
Les seuls entiers susceptibles d'être entre $n\,x$ et $(n+1)x$ sont $[n\,x]$ lui-même et $[n\,x]+1$.

- Si $n\,x = [n\,x]$ (c'est-à-dire si $n\,x$ est un entier), seul l'entier $[n\,x]$ est entre $n\,x$ et $(n+1)x$.
- Si $[(n+1)x] = [n\,x]+1$, alors l'entier $[n\,x]+1$ est entre $n\,x$ et $(n+1)x$, et c'est le seul.
- Si $[(n+1)x] = [n\,x]$ $(\neq n\,x)$, alors il n'y aucun entier entre $n\,x$ et $(n+1)x$.

3.1. L'ensemble des entiers qui sont entre 0 et $n\,x$ est l'ensemble $\{0,\ 1,\ 2,\ ...,\ [n\,x]\}$. Il y a $[n\,x]+1$ tels entiers. Lorsque x est irrationnel, aucun des multiples de x n'est un entier. Aucun des entiers précités ne peut être extrémité commune de deux intervalles consécutifs $[(k-1)x,\ k\,x]$ et $[k\,x,\ (k+1)x]$, chacun appartient à un seul intervalle.
Parmi les n intervalles $[0,\ x],\ [x,\ 2x],\ldots,[(n-1)x,\ n\,x]$, il y en a $[n\,x]+1$ qui contiennent exactement un entier et les autres n'en contiennent aucun.

3.2. Un contre-exemple : prenons le cas de $x=\dfrac{1}{2}$. $I_k = \left[\dfrac{k-1}{2},\ \dfrac{k}{2}\right]$ contient toujours exactement un entier puisque des deux nombres $\dfrac{k-1}{2},\ \dfrac{k}{2}$ il y en un et un seul qui est entier, tantôt l'un tantôt l'autre suivant la parité de k. Chacun des n intervalles considérés dans la question contient un entier, alors que n est distinct de $\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$ dès que $n>1$. Donc la relation précédente n'est plus vérifiée lorsque x est rationnel.

Si l'on veut, on peut proposer une démonstration plus générale. Soit $x=\dfrac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux.

Si on pose : $n = a\,q + r$ avec $0 \le r < q$, alors $n\dfrac{p}{q} = a\,p + \dfrac{r\,p}{q}$ et $\left[n\dfrac{p}{q}\right] = a\,p + \left[\dfrac{r\,p}{q}\right]$.
On note au passage qu'il y a $(a+1)$ multiples de q qui sont inférieurs ou égaux à n :
les entiers $0,\ q,\ 2q,\ldots,a\,q$

Lorsque l'entier k prend les valeurs $0,1,\ 2,\ \ldots,n$, le nombre $\dfrac{k\,p}{q}$ prend $(a+1)$ fois une valeur entière (d'après le théorème de Gauss, chaque fois que q divise k puisque q est premier avec p). Il y a donc $(a+1)$

intervalles $I_k = \left[\dfrac{(k-1)p}{q}, \dfrac{k\,p}{q}\right]$ qui ont une extrémité entière. Cette extrémité appartient à deux intervalles consécutifs, sauf s'il s'agit de 0, ou bien s'il s'agit de l'extrémité du dernier intervalle $\dfrac{n\,p}{q}$ (ce qui a lieu si n est multiple de q).

Le nombre d'intervalles qui contiennent exactement un entier est alors $a\,p + \left[\dfrac{r\,p}{q}\right] + 1 + a$ si n n'est pas multiple de q et $a\,p + a$ si n est multiple de q. Dès que $a > 0$, le premier nombre est différent de $\left[n\dfrac{p}{q}\right] + 1 = a\,p + \left[\dfrac{r\,p}{q}\right] + 1$ et dès que $a > 1$ le deuxième l'est aussi.

Avec $p = 1,\ q = 2$, on retrouve que ce nombre d'intervalles est égal à n que n soit pair ou impair.

4.1. Soit n un entier naturel. On dispose alors des inégalités : $[n\,x] \le n\,x < [n\,x] + 1$ et $[(n+1)x] \le (n+1)x < [(n+1)x] + 1$. Les entiers $[n\,x]+1, [n\,x]+2, ..., [(n+1)x]$ sont tous certainement compris entre $n\,x$ et $(n+1)x$ et il faut y adjoindre l'entier $[n\,x]$ dans le cas où $n\,x$ est un entier.

Le cardinal de l'ensemble $\{[n\,x]+1, [n\,x]+2, ..., [(n+1)x]\}$ est égal à $[[(n+1)x] - [n\,x]_{gjulia2015}$.
Or, $[n\,x] + [x] \le [(n+1)x] \le [n\,x] + [x] + 1$. Il en résulte que $[x] \le [(n+1)x] - [n\,x] \le [x] + 1$
Le cardinal de l'ensemble $\{[n\,x]+1, [n\,x]+2, ..., [(n+1)x]\}$ est donc ou bien $[x]$ ou bien $[x]+1$. Lorsque $n\,x$ n'est pas un entier ce cardinal représente exactement le nombre d' entiers p qui sont compris entre $n\,x$ et $(n+1)x$.

Dans le cas où $n\,x$ est un entier, c'est-à-dire dans le cas où $[n\,x] = n\,x$, on dispose de la formule additive vue dans les généralités : $[(n+1)x] = nx + [x]$. Les entiers p qui sont compris entre $n\,x$ et $(n+1)x$ sont exactement les entiers : $n\,x,\ n\,x+1, ...,\ nx + [x]$. Ils sont au nombre de $[x]+1$.

Donc, quel que soit le réel x strictement positif, il y a ou bien $[x]$ ou bien $[x]+1$ nombres entiers entre deux multiples consécutifs de x.

4.2. Entre 0 et $n\,x$, il y a les $[n\,x]+1$ entiers 0, 1, … , $[n\,x]$.

Lorsque x est irrationnel, aucun de ces multiples de x n'est entier. Aucun d'entre eux n'est extrémité commune de deux consécutifs des intervalles $I_1 = [0,\ x],\ I_2 = [x,\ 2\,x], .., I_n = [(n-1)x,\ n\,x]$. Les ensembles $I_k \cap \{0, 1, ..., [n\,x]\}$ déterminent une partition de $\{0, 1, ..., [n\,x]\}$ en n sous-ensembles contenant chacun ou bien $[x]$ entiers ou bien $[x]+1$ entiers.

Si m est le nombre d'intervalles qui contiennent $[x]+1$ entiers, les $(n-m)$ autres intervalles en contiennent $[x]$ et on obtient pour cardinal de $\bigcup I_k$: $(n-m)[x] + m([x]+1) = n[x] + m$.

Ainsi : $n[x] + m = [n\,x] + 1$

Or : $[n\,x] = [n([x] + \alpha)] = n[x] + [n\alpha]$. Il en résulte que : $[n\,x] + 1 = n[x] + [n\alpha] + 1 = n[x] + m$ et : $m = [n\alpha] + 1$

Parmi les n intervalles $I_1=[0,\ x]$, $I_2=[x,\ 2x]$, .., $I_n=[(n-1)x,\ nx]$. il y en a $[n\alpha]+1$ qui contiennent $[x]+1$ entiers.
Ces résultats généralisent ce qui a été obtenu pour $x<1$.

Partie B.

Dire que $50^n \le 7^p \le 50^{n+1}$ équivaut à dire que : $n\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)} \le p \le (n+1)\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}$.

Il y a autant de puissances de 7 entre 50^n et 50^{n+1} que d'entiers p entre $n\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}$ et $(n+1)\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}$.

On est amené à appliquer les résultats de la **partie A** du problème avec : $x=\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}$. Le fait que $7^2=49<50<343=7^3$ indique que $2\ln(7)<\ln(50)<3\ln(7)$, donc que $2<\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}<3$, c'est-à-dire que $\left[\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}\right]=2$. D'après la **partie A**, il y a 2 ou 3 entiers entre deux multiples consécutifs de $\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}$. En conséquence il y a 2 ou 3 puissances de 7 entre 50^n et 50^{n+1}.

2. Montrons d'abord que $\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}$ est irrationnel. S'il existait des entiers strictement positifs p et q tels que : $\dfrac{p}{q}=\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}$ alors : $50^q=2^q\times 5^{2q}=7^p$ et il y aurait un entier qui admettrait deux décompositions en facteurs premiers distinctes. C'est impossible.

On peut dès lors appliquer **A.4.2.** On pose : $\alpha=\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}-2$. Lorsque n est un entier donné, parmi les n intervalles $I_1=[0,\ x]$, $I_2=[x,\ 2x]$, .., $I_n=[(n-1)x,\ nx]$. il y en a $[n\alpha]+1$ qui contiennent 3 entiers. En faisant tendre n vers l'infini, on fait tendre aussi $[n\alpha]+1$ vers l'infini. Il y a une infinité d'intervalles I_k qui contiennent 3 entiers, donc une infinité de paires de puissances de 50 consécutives entre lesquelles il y a trois puissances de 7.

Il s'agit d'identifier quelle est la première valeur de l'entier n pour laquelle il y a deux intervalles parmi $I_1=[0,\ x]$, $I_2=[x,\ 2x]$, .., $I_n=[(n-1)x,\ nx]$. qui contiennent trois entiers (le premier étant $I_1=[0,\ x]$).
L'intervalle répondant à la question du concours général sera alors l'intervalle $I_n=[(n-1)x,\ nx]$.

Une calculatrice donne : $x=2{,}01308$ à 10^{-5} près.

En posant : $\alpha=\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}-2$, la calculatrice atteste que : $96\alpha<1<97\alpha$

Ainsi, $[96x,\ 97x]$ est le deuxième intervalle, après $[0,\ x]$, qui contient trois entiers.

```
Define x=ln(50)/ln(7)          Terminé
Define a=x−iPart(x)            Terminé
iPart(x)                       2
x                              2.01038
96•a                           0.996685
97•a                           1.00707
                               4/6
```

```
* sept                         1/8
Define sept()=
Prgm
©gilbertjulia2015
1→n
While iPart((n+1)•x)−iPart(n•x)=:
n+1→n
EndWhile
Disp n
Disp iPart(n•x)
Disp iPart((n+1)•x)
EndPrgm
```

Le programme **sept** recherche le premier entier pour lequel $\left[(n+1)x\right]-\left[n\,x\right]=3$ et obtient $n=96$.

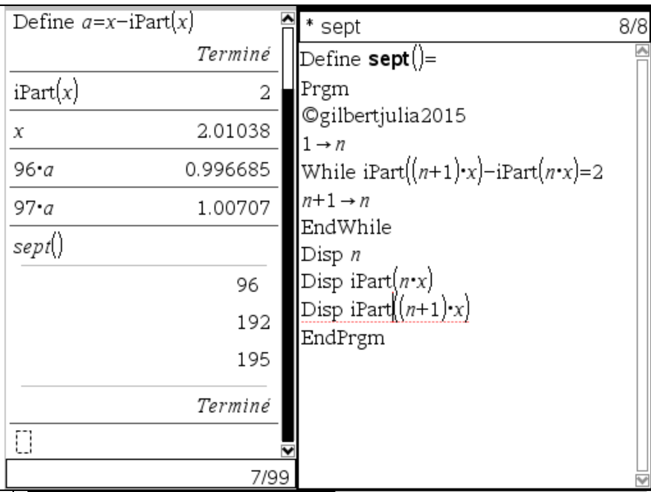
$\left[96\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}\right] \underset{gjulia2015}{=} 192$ et $\left[97\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}\right]=195$

Il en résulte que :

$192<96\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}<195<97\dfrac{\ln(50)}{\ln(7)}<196$ puis que :

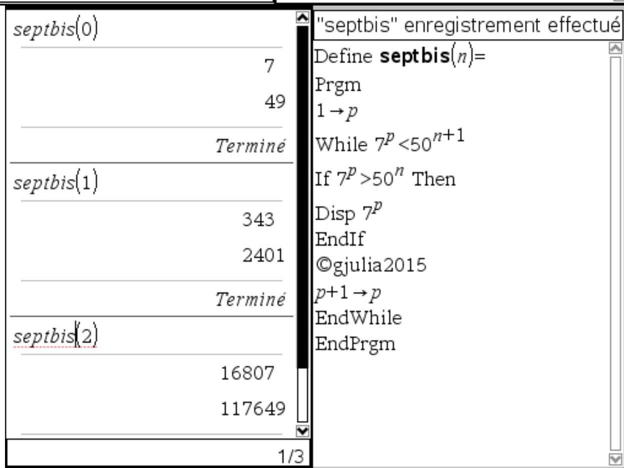
$7^{192}<50^{96}<7^{195}<50^{97}<7^{196}$

Les trois puissances de 7 concernées sont $7^{193}, 7^{194}, 7^{195}$ qui sont toutes les trois entre 50^{96} et 50^{97}.



On peut aussi rechercher directement à l'aide d'un autre programme quelles sont les puissances de 7 qui sont entre deux puissances consécutives de 50, d'abord par exemple entre 1 et 50 puis entre 50 et 2500 puis entre 2500 et 125000. Pour le moment, on en trouve deux.

Tant qu'il y a exactement deux puissances de 7 entre 50^n et 50^{n+1}, les exposants des puissances de 7 correspondantes sont $p=2n+1$ et $p=2n+2$.



En abordant des exposants plus grands, on fait afficher non plus la puissance de 7 elle-même, mais l'exposant.

Entre 50^{95} et 50^{96}, il y a 7^{191} et 7^{192}, ce qui est conforme au résultat attendu : il y a toujours, pour le moment, deux puissances de 7 entre les deux puissances de 50 consécutives.

Mais entre 50^{96} et 50^{97}, il y en a trois : 7^{193} , 7^{194} et 7^{195} ce qui recoupe l'étude précédente.

La capacité de calcul du logiciel n'est pas encore dépassée.