À prendre ou à laisser

Certains jeux télévisés se prêtent au calcul des probabilités. Il en est ainsi du jeu « à prendre ou à laisser » où les candidats ont devant eux une boîte contenant une certaine somme d'argent. Il est intéressant de regarder au moins une fois cette émission avec le regard d'un mathématicien. Remarquer le jeu du présentateur qui « chauffe » le candidat du jour de façon à ce que l'émission dure le plus longtemps possible. Si en fin d'émission le candidat ne se retrouve plus qu'avec deux boîtes, l'une contenant un clou et l'autre contenant une grosse somme d'argent, le présentateur a rempli parfaitement sa mission. Le suspense est à son comble …

Nous aurons dans ce problème une ambition mesurée. On remarque que, parmi les 24 *candidats potentiels, certains sont des « anciens », présents depuis plus de* 50 *émissions parfois, alors que d'autres sont des bleus qui viennent de débarquer. Comment est-ce possible ? Combien de temps un candidat doit-il attendre avant que n'arrive son tour ?*

Le sujet

Le jeu télévisé « à prendre ou à laisser » se déroule de la façon suivante :

Sur le plateau, 24 candidats sont présents, chacun possède une boîte. Ces dernières ont été réparties au hasard par un huissier de justice dans lesquelles se cachent des sommes d'argents différentes pour chacune d'entre elles. Une échelle des gains répertorie les sommes des différentes boîtes que l'un des candidats pourra être amené à remporter à l'issue de l'émission. Seuls l'huissier et un banquier connaissent le contenu des boîtes.

Au début de l'émission, un tirage au sort est effectué pour désigner le candidat qui jouera lors de cette émission en sachant que les candidats reviennent à l'émission suivante tant qu'ils n'ont pas été sélectionnés, celui qui sera tiré au sort rejoint l'animateur au centre du plateau avec sa boîte.

Le candidat devra ouvrir une à une les boîtes des autres candidats restants, à chaque ouverture, une somme est découverte et sera retiré de l'échelle des gains, cette somme est alors définitivement perdue car celle-ci n'est pas dans la boîte du candidat du jour (…). Le candidat gagne la somme contenue dans la dernière boîte qu'il garde avec lui, à moins qu'il n'accepte une des « offres » que le fait le banquier au cours du jeu.

On s'intéresse uniquement au nombre X d'émissions auxquelles un nouveau candidat participe pour être lui-même tiré au sort. Ainsi, s'il est tiré au sort à sa première participation, $X=1$, s'il n'est pas tiré au sort dès sa première participation mais il l'est à sa deuxième, $X=2$, …

1.1. Déterminer la probabilité que $X=1$ puis la probabilité que $X=2$

1.2. Pour tout entier n strictement positif, déterminer la probabilité que $X=n$.

1.3. Reconnaître le type de loi suivie par X. Quelle est, de ce fait, l'espérance mathématique de X ?

2. Déterminer quelle est en fonction de n la probabilité de l'évènement « $X \leq n$ ».

3. *Questions diverses*

3.1. Quelle est la probabilité que le candidat participe au plus à 10 émissions (y compris celle où il est sélectionné).

3.2. Quelle est la probabilité que le candidat participe au moins à 25 émissions (y compris celle où il est sélectionné).

3.3. Existe-t-il une valeur de n telle que la probabilité que le candidat participe au plus à n émissions est supérieure ou égale à 0,5 et que la probabilité que le candidat participe au moins à n émissions est aussi supérieure ou égale à 0,5 ?

Eléments de correction.

Sous l'hypothèse d'équiprobabilité, la probabilité que le candidat « lambda » soit tiré au sort au début d'une émission donnée est $\frac{1}{24}$. La probabilité qu'il ne le soit pas est la probabilité de l'évènement contraire, $1-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$

1.1. $p(X=1)=\frac{1}{24}$

1.2. Le candidat est tiré au sort lors de sa deuxième émission si et seulement si il ne l'est pas lors de sa première émission et il l'est lors de sa seconde. Sous l'hypothèse d'indépendance des tirages au sort effectués au début des émissions, la probabilité que le candidat soit tiré au sort lors de sa seconde émission est $p(X=2)=\frac{23}{24}\times\frac{1}{24}=\frac{23}{576}$.

1.3. De façon générale, pour n strictement supérieur à 1, le candidat est tiré au sort lors de son émission numéro n si et seulement si il ne l'est pas lors des $n-1$ premières émissions auxquelles il participe et il l'est lors de la n-ième. Sous l'hypothèse d'indépendance des tirages au sort effectués au début des émissions, la probabilité que le candidat soit tiré au sort lors de son émission numéro n est $p(X=n)=\left(\frac{23}{24}\right)^{n-1}\times\frac{1}{24}=\frac{23^{n-1}}{24^n}$. Cette formule reste valable lorsque n est égal à 1.

La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{24}$. Son espérance mathématique est égale à l'inverse du paramètre, c'est-à-dire à 24.

2. La probabilité de l''évènement « $X\leq n$ » peut se calculer de deux façons.

D'une part, il a pour probabilité $\sum_{k=1}^{n}p(X=k)=\frac{1}{24}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{23}{24}\right)^{n-1}=\frac{1}{24}\frac{1-\left(\frac{23}{24}\right)^n}{1-\frac{23}{24}}=1-\left(\frac{23}{24}\right)^n$

D'autre part, il s'agit de l'évènement contraire de l'évènement « $X>n$ », lequel se produit si et seulement si le candidat n'est tiré au sort dans aucune des n premières émissions auxquelles il participe. La probabilité de cet évènement contraire est $\left(\frac{23}{24}\right)^n$. D'où le même résultat.

3.1. Le candidat participe au plus à 10 émissions (y compris celle où il est sélectionné) si et seulement si $X\leq 10$. La probabilité de cet évènement est : $\sum_{k=1}^{10}p(X=k)=1-\left(\frac{23}{24}\right)^{10}$ soit 0,347 à 10^{-3} près.

3.2. Le candidat participe au moins à 25 émissions (y compris celle où il est sélectionné) si et seulement si $X\geq 25$. Cet évènement est l'évènement contraire de l'évènement $X<25$, c'est-à-dire de l'évènement $X\leq 24$ puisque X ne prend que des valeurs entières. Sa probabilité est $1-\left(\sum_{k=1}^{24}p(X=k)\right)=\left(\frac{23}{24}\right)^{24}$ soit 0,36 à 10^{-3} près.

3.3. Le candidat participe au plus à n émissions (y compris celle où il est sélectionné) si et seulement si $X \leq n$. Le candidat participe au moins à n émissions (y compris celle où il est sélectionné) si et seulement si $X \geq n$ .. On est amené à examiner s'il existe n tel que en même temps : $\sum_{k=1}^{n} p(X=k) = 1-\left(\frac{23}{24}\right)^n \geq 0,5$ soit $\left(\frac{23}{24}\right)^n \leq 0,5$ et aussi $1-\left(\sum_{k=1}^{n-1} p(X=k)\right) = \left(\frac{23}{24}\right)^{n-1} \geq 0,5$, autrement dit à chercher la première puissance du nombre $\frac{23}{24}$ qui est plus petite que 0,5. Le cas se produit lorsque $n=17$ (C'est le premier entier supérieur à $\frac{\ln(0,5)}{\ln(23)-\ln(24)}$). Il s'agit là d'une valeur médiane. « Il y a au moins une chance sur deux de participer à au plus 17 émissions et au moins une chance sur deux de participer à au moins 17 émissions ».

On pouvait aussi utiliser un tableur

Le cas se produit lorsque $n=17$.

On remarque au passage que la probabilité que X soit supérieur ou égal à 26 est plus grande que 1/3. Ce qui explique pourquoi il y a dans l'émission des « anciens candidats », présents depuis longtemps (la probabilité que X soit supérieur ou égal à 50 est d'ailleurs encore supérieure à 0,12)

	A num	B sumproba
=	=seq(n,n,1,30)	=seq(s(n),n,1,30)
6	6.	0.225361
7	7.	0.257637
8	8.	0.288569
9	9.	0.318212
10	10.	0.34662
11	11.	0.373844
12	12.	0.399934
13	13.	0.424937
14	14.	0.448898
15	15.	0.47186
16	16.	0.493866
17	17.	0.514955
18	18.	0.535165
19	19.	0.554533
20	20.	0.573094
21	21.	0.590882
22	22.	0.607929
23	23.	0.624265
24	24.	0.639921
25	25.	0.654924
26	26.	0.669302
27	27.	0.683081

17

Les divers résultats numériques sont résumés ci-dessous

©Loi de la variable aléatoire X

Define $u(n)=\left(\frac{23}{24}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{24}$ *Terminé*

$\mathrm{seq}(u(n),n,1,10)$ $\{0.0417,0.0399,0.0383,0.0367,0.0351,0.0337,0.0323,0.0309,0.0296,0.0284\}$

©Calcul de la probabilité de "X inférieur ou égal à 10"

©gilbertjulia2020

$\left\{\sum_{k=1}^{10}(u(k)),1-\left(\frac{23}{24}\right)^{10}\right\}$ $\{0.3466,0.3466\}$

©Calcul de la probabilité de l'évènement "X supérieur ou égal à 25"

$\left\{1-\sum_{k=1}^{24}(u(k)),\left(\frac{23}{24}\right)^{24}\right\}$ $\{0.3601,0.3601\}$

$\mathrm{solve}\left(\left(\frac{23}{24}\right)^{n-1}\geq 0.5,n\right)$ $n\leq 17.29$

$\mathrm{solve}\left(1-\left(\frac{23}{24}\right)^{n}\geq 0.5,n\right)$ $n\geq 16.29$

$\frac{\ln(0.5)}{\ln\left(\frac{23}{24}\right)}$ 16.29