Bac Terminale C Pondichéry 1982

Voici un problème qui est loin d'être festif, mais il est varié. Il me paraît formateur, en ce sens qu'il oblige à essayer de rédiger proprement des démonstrations portant sur des notions fondamentales de la géométrie affine. Il porte en effet sur les notions d'espace affine et d'espace vectoriel associé, d'applications affines, de barycentres, de similitudes directes, j'en passe et des meilleures.

On peut objecter que la géométrie affine est quelque peu passée de mode. Certes, j'en conviens. Mais elle figure toujours au patrimoine du CAPES, telle les Bouddhas de Bâmyân au patrimoine de l'Humanité.

1. Le sujet

E est un espace affine, $\vec{E}$ (« *E flèche* ») est son espace vectoriel associé. f_1 et f_2 sont deux applications affines de E dans E, $\vec{f_1}$ (« f_1 *flèche* ») et $\vec{f_2}$ sont les endomorphismes associés respectivement à f_1 et f_2.

Pour tout point M de E, on notera M_1 le point $f_1(M)$ et M_2 le point $f_2(M)$.

Étant donné deux réels a_1 et a_2 tels que $a_1 + a_2 = 1$, on étudie dans la suite du problème l'application f (qui dépend de f_1, f_2, a_1; a_2) qui à tout point M de E associe le point $f(M)$ barycentre de M_1 affecté du coefficient a_1 et de M_2 affecté du coefficient a_2.

On notera M' l'image par f du point M.

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question, $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ sont deux éléments de $\vec{E}$, f_1 est la translation de vecteur $\vec{V_1}$ et f_2 est la translation de vecteur $\vec{V_2}$. Montrer que f est la translation de vecteur $\vec{V} = a_1\vec{V_1} + a_2\vec{V_2}$

2. Dans cette question, E est un plan affine, D est une droite affine de E, $\vec{\Delta}$ est une droite vectorielle de $\vec{E}$ distincte de la direction de D, $f_1 = Id_E$ et f_2 est la projection affine sur D de direction $\vec{\Delta}$.

2.1. Montrer que les points de D sont invariants par f.

2.2. Exprimer $\overrightarrow{M_2M'}$ en fonction de a_1 et de $\overrightarrow{M_2M}$.
Quelle est la nature de f ? Quelle est l'application f dans le cas où $a_1 = -1$?

Partie B

1. Soit O un point de E. Montrer que pour tout point M de E: $\overrightarrow{O'M'} = a_1\vec{f_1}\left(\overrightarrow{OM}\right) + a_2\vec{f_2}\left(\overrightarrow{OM}\right)$
On rappelle que M' désigne $f(M)$ et O' désigne $f(O)$. En déduire que f est une application affine, préciser son endomorphisme associé.

2. Si f_1 et f_2 sont deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2, quelle est la nature de f (discuter) ?

3. Dans cette question E est un plan affine.

3.1. $ABCD$ est un parallélogramme de E ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$), g est une application affine. Montrer que $g(A)g(B)g(C)g(D)$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).

3.2. Soit $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$ deux parallélogrammes ($\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}$ et $\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{D_2C_2}$)

On suppose que $A_1B_1C_1D_1$ n'est pas aplati. Montrer qu'il existe une application affine notée f_2 telle que : $f_2(A_1)=A_2$; $f_2(B_1)=B_2$; $f_2(C_1)=C_2$; $f_2(D_1)=D_2$

3.3. Soit A', B', C', D' les barycentres respectifs de $\{(A_1, a_1);(A_2, a_2)\}$; $\{(B_1, a_1);(B_2, a_2)\}$; $\{(C_1, a_1);(C_2, a_2)\}$; $\{(D_1, a_1);(D_2, a_2)\}$. Montrer que $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.

Partie C

Dans ce paragraphe E est un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{e_1}, \vec{e_2})$. À tout point M de E on associe son affixe z.

1. Soit f_1 et f_2 deux similitudes directes de E. Montrer que f est soit une similitude directe, soit une application constante (on pourra utiliser les nombres complexes).

2. f_1 et f_2 sont deux similitudes directes de même rapport strictement positif, de même angle θ, de centres respectifs A_1 et A_2. Montrer que f est la similitude directe de rapport k, d'angle θ et de centre le barycentre A de $\{(A_1, a_1);(A_2, a_2)\}$.

3.1. Soit un carré $ABCD$ ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$) et g une similitude directe.

Montrer que $g(A)g(B)g(C)g(D)$ est un carré tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{g(A)g(B)}, \overrightarrow{g(A)g(D)}}\right)$

3.2. $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$ sont deux carrés dont la longueur des côtés est non nulle tels que $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{D_2C_2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1D_1}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_2D_2}}\right)$

Montrer qu'il existe une unique similitude directe f_2 telle que :
$f_2(A_1)=A_2$; $f_2(B_1)=B_2$; $f_2(C_1)=C_2$; $f_2(D_1)=D_2$
A', B', C', D' étant définis comme dans la question **B.3.3**, montrer que $A'B'C'D'$ est un carré, éventuellement réduit à un point.

4. On donne trois points A_1, A_2 et B distincts. M_1 décrit le cercle de centre A_1 contenant B d'un mouvement uniforme tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_1M_1}}\right)=\omega t$; $(\omega\neq 0)$. M_2 décrit le cercle de centre A_2 contenant B d'un mouvement uniforme tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{A_2B_2}, \overrightarrow{A_2M_2}}\right)=\omega t$. M' est le barycentre de $\{(M_1, a_1);(M_2, a_2)\}$. Quel est le mouvement de M' ?

2. Eléments de correction

Partie A : Étude de deux cas particuliers

De façon générale, quelles que soient les applications affines f_1 et f_2 , notons que :

Pour tout point M, son image M' est le barycentre de M_1 affecté du coefficient a_1 et de M_2 affecté du coefficient a_2.

D'après la relation fondamentale du barycentre, pour tout point X du plan :
$(a_1 + a_2)\overrightarrow{XM'} \underset{\text{gilbertjulia}}{=} a_1\overrightarrow{XM_1} + a_2\overrightarrow{XM_2}$

Sachant de plus que la somme $a_1 + a_2$ est égale à 1, pour tout point X du plan :

$$\overrightarrow{XM'} \underset{\text{gilbertjulia}}{=} a_1\overrightarrow{XM_1} + a_2\overrightarrow{XM_2} \qquad \textbf{(R1)}$$

Cette relation permettra à plusieurs reprises de situer un point M'qui nous intéresse par rapport à un point X qui, pour une quelconque raison, nous apparaîtrait remarquable.

1. Dans le cas où nous avons affaire à deux translations, et en écrivant (**R1**) avec $X = M$, on obtient :
$\overrightarrow{MM'} = a_1\overrightarrow{MM_1} + a_2\overrightarrow{MM_2} = a_1\overrightarrow{V_1} + a_2\overrightarrow{V_2}$.

Tout point M a pour image par f le point M' tel que $\overrightarrow{MM'}$ est égal à un vecteur constant, cette relation vectorielle caractérise la translation de vecteur $a_1\overrightarrow{V_1} + a_2\overrightarrow{V_2}$

2. Dans cette question, E est un plan affine, D est une droite affine de E, $\vec{\Delta}$ est une droite vectorielle de $\vec{E}$ distincte de la direction de D, $f_1 = Id_E$ et f_2 est la projection affine sur D de direction $\vec{\Delta}$.

2.1. Tout point M de D est invariant par f_1 et par f_2. Dans le cas d'un tel point : $M_1 = M_2 = M$ et tout barycentre de M_1 et M_2, quelle que soit la pondération, est confondu avec M. C'est le cas en particulier de M' pour les pondérations a_1 et a_2. Tout point de D est invariant par f.

2.2. Par hypothèse, le point M_1 est le point M et le point M_2 est le projeté de M sur D suivant la direction $\vec{\Delta}$.

En écrivant (**R1**) avec $X = M_2$, on obtient : $\overrightarrow{M_2M'} \underset{gj}{=} a_1\overrightarrow{M_2M}$

- Si $a_1 = 0$, $f = f_2$ (f est une projection).
- Si $a_1 \neq 0$, f est l'affinité d'axe D, de direction $\vec{\Delta}$ et de rapport a_1. Dans le cas particulier où $a_1 = -1$, f est la symétrie axiale d'axe D et de direction $\vec{\Delta}$.

Partie B

1. Soit O un point de E.
Ecrivons (**R1**) avec $X = O$:
Pour tout point M d'image M' : $\overrightarrow{OM'} = a_1\overrightarrow{OM_1} + a_2\overrightarrow{OM_2}$

En particulier dans le cas du point O d'image O' : $\overrightarrow{OO'} = a_1\overrightarrow{OO_1} + a_2\overrightarrow{OO_2}$

Par la relation de Chasles, nous obtenons : $\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OO'} = a_1\left(\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OO_1}\right) + a_2\left(\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OO_2}\right)$
c'est-à-dire : $\overrightarrow{O'M'} = a_1\,\overrightarrow{O_1M_1} + a_2\,\overrightarrow{O_2M_2}$

Les applications f_1 et f_2 étant affines, par définition de leurs endomorphismes associés, $\overrightarrow{O_1M_1} = \vec{f_1}\left(\overrightarrow{OM}\right)$ et $\overrightarrow{O_2M_2} = \vec{f_2}\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

Donc $\overrightarrow{O'M'} = a_1\,\vec{f_1}\left(\overrightarrow{OM}\right) + a_2\,\vec{f_2}\left(\overrightarrow{OM}\right)$
Cette relation s'écrit : $\overrightarrow{O'M'} = \left(a_1\,\vec{f_1} + a_2\,\vec{f_2}\right)\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

Or, l'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel donné, muni de l'addition des applications et de leur multiplication par un réel, a une structure d'espace vectoriel. L'application $a_1\,\vec{f_1} + a_2\,\vec{f_2}$, combinaison linéaire de deux endomorphismes de $\vec{E}$, est lui-même un endomorphisme de $\vec{E}$.

Nous avons trouvé un point O tel que l'application $\overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{O'M'}$ $\left[= \left(a_1\,\vec{f_1} + a_2\,\vec{f_2}\right)\left(\overrightarrow{OM}\right)\right]$ est linéaire,
f est une application affine, son endomorphisme associé est $a_1\,\vec{f_1} + a_2\,\vec{f_2}$.

2. Si f_1 et f_2 sont deux homothéties de rapports respectifs k_1 et k_2, les endomorphismes associés sont des homothéties vectorielles, de rapports respectifs k_1 et k_2, de sorte que l'endomorphisme associé à f est défini par : $\overrightarrow{OM} \mapsto \overrightarrow{O'M'} = \left(a_1k_1 + a_2\,k_2\right)\left(\overrightarrow{OM}\right)$.

- Si $a_1k_1 + a_2\,k_2 \neq 0$, il s'agit d'une homothétie vectorielle, f est une homothétie.
- Si $a_1k_1 + a_2\,k_2 = 0$, il s'agit de l'application nulle, f est une application constante.

3. Dans cette question E est un plan affine.

3.1. Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses côtés sont parallèles deux à deux.

- $ABCD$ est un parallélogramme de E¸ donc ses côtés sont parallèles deux à deux.
- g est une application affine. À ce titre, elle conserve le parallélisme.
- $g(A)g(B)g(C)g(D)$ a les côtés homologues par g à ceux de $ABCD$ parallèles deux à deux.

Donc, $g(A)g(B)g(C)g(D)$ est un parallélogramme.

3.2. Soit $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$ deux parallélogrammes ($\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$ et $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$)

$A_1B_1C_1D_1$ n'étant pas aplati, les points A_1, B_1, C_1 sont non alignés.

Une application affine du plan affine est entièrement déterminée par la donnée des images de trois points non alignés : il existe une application affine unique f_2 telle que $f_2(A_1) = A_2$; $f_2(B_1) = B_2$; $f_2(C_1) = C_2$.

Il reste à montrer que dans ces circonstances nous avons aussi une relation analogue pour le quatrième point, c'est-à-dire que : $f_2(D_1) = D_2$.

Soit $\overrightarrow{f_2}$ l'endomorphisme associé à f_2.

$\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1} \Rightarrow \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{f_2}\left(\overrightarrow{A_1B_1}\right) = \overrightarrow{f_2}\left(\overrightarrow{D_1C_1}\right) = \overrightarrow{f_2(D_1)C_2}$

$A_2B_2C_2D_2$ étant aussi par hypothèse un parallélogramme : $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$

Donc, $\overrightarrow{D_2C_2} = \overrightarrow{f_2(D_1)C_2}$. Ce qui implique bien que $D_2 = f_2(D_1)$

Il existe une application affine unique f_2 telle que : $f_2(A_1) = A_2$; $f_2(B_1) = B_2$; $f_2(C_1) = C_2$; $f_2(D_1) = D_2$

3.3. Soit *A'*, *B'*, *C'*, *D'* les barycentres respectifs de $\{(A_1, a_1) ; (A_2, a_2)\}$; $\{(B_1, a_1) ; (B_2, a_2)\}$; $\{(C_1, a_1) ; (C_2, a_2)\}$; $\{(D_1, a_1) ; (D_2, a_2)\}$.

Ces points sont les images respectives de A_1, B_1, C_1, D_1 par l'application affine $a_1\, Id_E + a_2 f_2$. En vertu de **3.1**, *A'B'C'D'* est un parallélogramme (éventuellement aplati).

Partie C

Dans ce paragraphe *E* est un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O ; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$. À tout point *M* de *E* on associe son affixe *z*.

1. Soit f_1 et f_2 deux similitudes directes de *E*.
Notons $z_1 = u_1 z + v_1$ et $z_2 = u_2 z + v_2$ les affixes respectives des images de *M* par f_1 et f_2.

Vu que *M'* est barycentre de $\{(M_1, a_1) ; (M_2, a_2)\}$, son affixe *z'* est égale à $\dfrac{a_1 z_1 + a_2 z_2}{a_1 + a_2}$, c'est-à-dire à $a_1 z_1 + a_2 z_2$ puisque la somme des deux coefficients est égale à 1.

Ainsi : $z' = a_1(u_1 z + v_1) + a_2(u_2 z + v_2)$, soit $z' = (a_1 u_1 + a_2 u_2) z + (a_1 v_1 + a_2 v_2)$

- Si $a_1 u_1 + a_2 u_2 = 0$, il s'agit là de l'écriture complexe d'une application constante.
- Si $a_1 u_1 + a_2 u_2 \neq 0$, il s'agit là de l'écriture complexe d'une similitude directe.

2. Soit f_1 et f_2 sont deux similitudes directes de même rapport *k* strictement positif, de même angle θ, de centres respectifs A_1 et A_2. (Il est sous-entendu dans cette question que f_1 et f_2 sont des similitudes directes autres qu'une translation puisqu'elles ont un centre).

Cela signifie que, avec les notations de la question précédente, $u_1 = u_2 = k(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec en outre $k(\cos\theta + i\sin\theta) \neq 1$. On pourra noter : $u = k(\cos\theta + i\sin\theta)$

Dans ces conditions $a_1 u_1 + a_2 u_2 = k(\cos\theta + i\sin\theta) = u$ et l'écriture complexe de f est $z' = u\,z + (a_1 v_1 + a_2 v_2)$. Le coefficient de z dans cette écriture complexe est le même que ceux de f_1 et f_2.

La similitude directe f a le même rapport et le même angle que f_1 et f_2.

Il reste à préciser son centre. Le centre de f_1 a pour affixe $\dfrac{v_1}{1-u}$, celui de f_2 a pour affixe $\dfrac{v_2}{1-u}$ et celui de f a pour affixe $\dfrac{a_1 v_1 + a_2 v_2}{1-u} = a_1\left(\dfrac{v_1}{1-u}\right) + a_2\left(\dfrac{v_2}{1-u}\right)$. Cette affixe est celle du barycentre A de $\{(A_1,\, a_1)\,;\,(A_2,\, a_2)\}$.

3.1. Soit un carré $ABCD$ et g une similitude directe.

- $g(A)g(B)g(C)g(D)$ est au minimum un parallélogramme en tant qu'image d'un parallélogramme par une application affine.
- En tant que similitude directe, g conserve les angles et, en particulier, l'orthogonalité. Puisque $ABCD$ a quatre angles droits, son image aussi : $g(A)g(B)g(C)g(D)$ est au minimum un rectangle.
- En tant que similitude directe de rapport k, g multiplie les distances par k. Les côtés de $g(A)g(B)g(C)g(D)$ ont pour longueur k fois celle de leurs côtés homologues par g. Puisque $ABCD$ a ses quatre côtés de même longueur, il en est de même de $g(A)g(B)g(C)g(D)$. $g(A)g(B)g(C)g(D)$ est au minimum un losange.

Etant à la fois un rectangle et un losange, $g(A)g(B)g(C)g(D)$ est un carré.

Les angles étant conservés, notamment $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AD}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{g(A)g(B)},\, \overrightarrow{g(A)g(D)}}\right)$. (C'est-à-dire que les deux carrés $ABCD$ et $g(A)g(B)g(C)g(D)$ sont ou bien tous les deux directs ou bien tous les deux indirects).

3.2. $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$ sont deux carrés dont la longueur des côtés est non nulle tels que $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{D_2C_2}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1},\, \overrightarrow{A_1D_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A_2B_2},\, \overrightarrow{A_2D_2}}\right)$.

Puisque la longueur des côtés de $A_1B_1C_1D_1$ et celle des côtés de $A_2B_2C_2D_2$ sont non nulles, les points A_1 et B_1 sont distincts et les points A_2 et B_2 sont aussi distincts.

Une similitude directe est entièrement déterminée par la donnée des deux images (distinctes) de deux points distincts. Il existe une unique similitude directe f_2 telle que : $f_2(A_1) = A_2$; $f_2(B_1) = B_2$.

Il reste à montrer que cette similitude directe f_2 envoie C_1 sur C_2 et D_1 sur D_2.
On note k_2 son rapport, c'est-à-dire que $k_2 = \dfrac{A_2B_2}{A_1B_1}$.

Le point D_1 est déterminé par les conditions : $\begin{cases} A_1D_1 = A_1B_1 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1},\, \overrightarrow{A_1D_1}}\right) = +\dfrac{\pi}{2} \textbf{ ou bien } -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ (suivant que $A_1B_1C_1D_1$ est un carré direct ou indirect).

Son image par f_2 est le point $f_2(D_1)$ tel que : $A_2\, f_2(D_1) = k_2\, A_1B_1 = A_2B_2$ et, compte tenu qu'une similitude conserve les angles, $\left(\widehat{\overrightarrow{A_2B_2},\, \overrightarrow{A_2 f_2(D_1)}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1},\, \overrightarrow{A_1D_1}}\right)$

Or, $A_2B_2C_2D_2$ étant un carré, $A_2D_2 = A_1D_1$ et par hypothèse, il a la même orientation que $A_1B_1C_1D_1$, $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1B_1},\, \overrightarrow{A_1D_1}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A_2B_2},\, \overrightarrow{A_2D_2}}\right)$.

Donc, en même temps : $\begin{cases} A_2 f_2(D_1) = A_2D_2 \\ \left(\widehat{\overrightarrow{A_2B_2},\, \overrightarrow{A_2 f_2(D_1)}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{A_2B_2},\, \overrightarrow{A_2D_2}}\right) \end{cases}$. Les points D_2 et $f_2(D_1)$ sont confondus (ils sont l'un et l'autre images de B_2 par la même rotation d'angle droit, direct ou indirect selon l'orientation des deux carrés, de centre A_2).

f_2 envoie D_1 sur D_2.

Le fait que f_2 envoie C_1 sur C_2 en découle puisque en tant que carrés, $A_1B_1C_1D_1$ et $A_2B_2C_2D_2$ sont des parallélogrammes : leur quatrième sommet est déterminé par les trois autres.

3.3. *A', B', C', D'* sont les barycentres respectifs de $\{(A_1,\, a_1)\,;(A_2,\, a_2)\}$; $\{(B_1,\, a_1)\,;(B_2,\, a_2)\}$; $\{(C_1,\, a_1)\,;(C_2,\, a_2)\}$; $\{(D_1,\, a_1)\,;(D_2,\, a_2)\}$.

Ces points sont les images respectives de A_1, B_1, C_1, D_1 par l'application affine $a_1\, Id_E + a_2 f_2$.

Les applications Id_E et f_2 étant deux similitudes directes, la combinaison linéaire $a_1\, Id_E + a_2 f_2$ est une similitude directe ou une application constante. *A'B'C'D'* est l'image d'un carré soit par une similitude directe, auquel cas *A'B'C'D'* est un carré, soit par une application constante, auquel cas il est réduit à un point.

4. Notons m_1 l'affixe de A_1, m_2 celle de A_2 (pour éviter un télescopage de notations …), b celle de B, z_1 et z_2 celles de M_1 et de M_2.

D'après la définition des points M_1 et M_2 : $z_1 - m_1 = (b - m_1)\mathbf{e}^{i\,\omega t}$ et $z_2 - m_2 = (b - m_2)\mathbf{e}^{i\,\omega t}$

$z' = a_1\, z_1 + a_2\, z_2 = (a_1\, m_1 + a_2\, m_2) + \left(a_1\,(b - m_1) + a_2\,(b - m_2)\right)\mathbf{e}^{i\,\omega t}$, relation qui s'écrit :

$z' - (a_1\, m_1 + a_2\, m_2) = \left(b - (a_1 m_1 + a_2\, m_2)\right)\mathbf{e}^{i\,\omega t}$

Si *A'* d'affixe $(a_1\, m_1 + a_2\, m_2)$ désigne le barycentre de $\{(A_1,\, a_1)\,;(A_2,\, a_2)\}$, la relation précédente devient : $z' - a' = (b - a')\mathbf{e}^{i\,\omega t}$.

Elle exprime que le point *M'* décrit le cercle de centre *A'* passant par *B* d'un mouvement uniforme ayant la même période que le mouvement des deux autres points M_1 et M_2. À l'instant zéro, les trois points sont en *B*.

Ils s'y rejoignent pour les valeurs de *t* de la forme $t = k\dfrac{2\pi}{\omega}$, *k* entier.