Musique factorielle

Ce document propose quelques variations autour des factorielles, de leur décomposition en produit de facteurs premiers, de divers pgcd et ppcm, ... Les parties B et C sont indépendantes de la partie A.

La factorielle d'un entier strictement positif n est le produit de tous les entiers de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$:
$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$

Le sujet

Partie A

Décomposition en facteurs premiers d'une factorielle, nombre des diviseurs d'une factorielle.
Soit n un nombre entier strictement supérieur à 1
Dans cette partie, on construit la décomposition en produit de facteurs premiers de la factorielle de n puis on en voit deux applications.

Soit p un nombre premier.

- Si $p > n$, alors p ne figure pas dans cette décomposition puisque tous les entiers de 1 à n sont premiers avec lui (un nombre entier premier est premier avec tous ses prédécesseurs).
- Soit désormais un nombre premier p tel que $p \leq n$. On va chercher quel est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de la factorielle de n.

1. Justifier qu'il existe nécessairement un entier k strictement positif tel que : $p^k \leq n < p^{k+1}$.

2. Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq k$. On note q_j le quotient de la division euclidienne de n par le nombre p^j.

Montrer que : $q_j = E\left(\dfrac{n}{p^j}\right)$ où la notation E désigne la fonction partie entière.

3. Supposons d'abord que $k = 1$, c'est-à-dire que $p \leq n < p^2$. La division euclidienne de n par p s'écrit : $n = q_1 p + r_1$ avec $0 \leq r_1 < p$. Montrer que l'exposant de p dans la décomposition de la factorielle de n est alors l'entier q_1.

4. Supposons maintenant que $k \geq 2$.
Soit j un entier tel que $2 \leq j \leq k$. Montrer que, dans l'ensemble A_n, il y a exactement $q_{j-1} - q_j$ entiers qui sont multiples de p^{j-1} mais non de p^j

Montrer que l'exposant du facteur premier p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de la factorielle de n est le nombre : $\alpha(n,p) = q_1 + q_2 + ... + q_k = \sum_{j=1}^{k} E\left(\dfrac{n}{p^j}\right)$

5. En conclusion, retenons que la décomposition en facteurs premiers de la factorielle de n est :

$$n! = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq n}} p^{\alpha(n,p)}$$

Proposer avec votre logiciel favori un algorithme permettant de décomposer en facteurs premiers la factorielle d'un entier n donné jusqu'à $n = 30$ au moins.

6. Donner une formule exprimant le nombre de diviseurs de la factorielle de n, en fonction des exposants $\alpha(n, p)$ obtenus pour tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. L'incorporer dans l'algorithme de la question **5** de façon à ce que l'algorithme affiche en fin d'exécution ce nombre de diviseurs.

7. Une question « classique » sur les factorielles est de demander par combien de zéros se termine l'écriture en numération décimale de la factorielle d'un entier. Montrer que ce nombre de zéros est égal à $\alpha(n, 5)$. Faire afficher ce nombre par l'algorithme.

8. Application numérique pour les questions **5, 6, 7** : $n = 10$ et, si l'algorithme fonctionne bien, $n = 20$; $n = 30$

Partie B

Pour tout entier n strictement supérieur à 1, on note a_n le nombre de nombres premiers qui sont inférieurs ou égaux à n (ainsi : $a_2 = 1$; $a_3 = a_4 = 2$; $a_5 = a_6 = 3$;...).

Déterminer en fonction de a_n le nombre de paires d'entiers strictement positifs $\{u\ ;\ v\}$ *premiers entre eux* dont le produit est égal à la factorielle de n.

Application numérique : $n = 20$; $n = 30$

Partie C

1. Combien y a-t-il de paires d'entiers strictement positifs $\{x\ ;\ y\}$ tels que : $\begin{cases} PGCD(x,\ y) = 15! \\ PPCM(x,\ y) = 20! \end{cases}$?

2. Combien y a-t-il de paires d'entiers strictement positifs $\{x\ ;\ y\}$ tels que : $\begin{cases} PGCD(x,\ y) = 12! \\ PPCM(x,\ y) = 17! \end{cases}$

3. Envisager une généralisation : étant donnés deux entiers a et b strictement positifs a et b tels que $a < b$, et en posant éventuellement $b = a + \lambda$, de quoi dépend le nombre de paires d'entiers strictement positifs $\{x\ ;\ y\}$ tels que : $\begin{cases} PGCD(x,\ y) = a! \\ PPCM(x,\ y) = b! \end{cases}$? Pourquoi peut-on affirmer que ce nombre est une puissance de 2 ?

NB. *Des « énoncés fermés » des parties B et C sont proposés à la suite de la correction.*

Eléments de correction

Partie A

Soit n un nombre entier strictement supérieur à 1 et p un nombre premier. On cherche quel est l'exposant de p dans la décomposition en produit de facteurs premiers de la factorielle de n.
La factorielle de n est le produit de tous les entiers de l'ensemble $E_n = \{1, 2, ..., n\}$

1. Le nombre p étant un nombre premier, la suite de ses puissances est une suite d'entiers strictement croissante. Toute suite d'entiers strictement croissante a pour limite plus l'infini. Elle échelonne l'ensemble **N***. Tout entier n strictement positif est entre deux termes consécutifs de la suite. Il existe nécessairement un entier naturel k tel que : $p^k \leq n < p^{k+1}$

Si $k = 0$, c'est-à-dire si $n < p$, p est premier avec tous les entiers de 1 à n, il ne figure pas dans la décomposition en produit de facteurs premiers de la factorielle de n.

2. Sinon, étudions pour tout entier j la division euclidienne de n par p^j.

- Si $j > k$: $p^j > n$, l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ ne contient aucun entier multiple de la puissance j-ème de p.
- Si $1 \leq j \leq k$, l'entier n vérifie : $n \geq p^j$. Selon la division euclidienne de n par p^j, il existe deux entiers q_j et r_j : tels que : $0 \leq r_j < p^j$ et $n = q_j\, p^j + r_j$. De plus, l'inégalité $n \geq p^j$ implique que le quotient de la division euclidienne est au moins égal à 1 : $1 \leq q_j$

Selon cette division euclidienne : $\dfrac{n}{p^j} = q_j + \dfrac{r_j}{p^j}$ avec $0 \leq \dfrac{r_j}{p^j} < 1$, c'est-à-dire que $q_j \leq \dfrac{n}{p^j} < q_j + 1$, double inégalité qui permet de caractériser l'entier q_j : c'est l'entier : $q_j = E\left(\dfrac{n}{p^j}\right)$.

3. Supposons d'abord que $k = 1$, c'est-à-dire que $p \leq n < p^2$. La division euclidienne de n par p s'écrit : $n = q_1\, p + r_1$ avec $0 \leq r_1 < p$ et q_1 est au moins égal à 1. Mais en outre l'inégalité $n < p^2$ implique $q_1\, p + r_1 < p^2$ et, puisque r_1 est un entier positif, *a fortiori* : $q_1\, p < p^2$. Nous obtenons : $1 \leq q_1 < p$.
Il y a alors dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ exactement q_1 multiples de p (avec l'inégalité $q_1 < p$), les entiers $p, 2p, ..., q_1 p$. L'inégalité $q_1 < p$ implique que tous les entiers $2, 3, ..., q_1$ sont premiers avec le nombre premier p.
Parmi les nombres $p, 2p, ..., q_1 p$, aucun d'entre eux n'est multiple de p^2 ni *a fortiori* d'une puissance de p plus grande. Le produit de ces nombres est $(q_1!) \times p^{q_1}$, le nombre $q_1!$ étant premier avec p, comme tous les autres entiers non multiples de p figurant dans la factorielle de n.

L'exposant de p dans la décomposition de la factorielle de n est alors l'entier $q_1 = E\left(\dfrac{n}{p}\right)$.

4. Supposons maintenant que $k \geq 2$.
Soit j un entier tel que $2 \leq j \leq k$.
L'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ contient q_j multiples de p^j, les entiers $p^j, 2p^j, ..., q_j p^j$,
Or, pour tout entier j strictement positif, les multiples de p^j sont *a fortiori* des multiples de p^{j-1} (tout multiple d'une puissance donnée de p est multiple de la puissance précédente). Plus précisément, parmi les q_{j-1} multiples de p^{j-1}, q_j d'entre eux sont des multiples de p^j : il y a dans $\{1, 2, ..., n\}$ exactement $q_{j-1} - q_j$ entiers qui sont multiples de p^{j-1} mais non de p^j

Ainsi, dans cet ensemble $\{1, 2, ..., n\}$:

- Il y a q_1 multiples de p et parmi eux, q_2 multiples de p^2 : il y a exactement $q_1 - q_2$ nombres qui sont multiples de p mais non de p^2.
- Il y a q_2 multiples de p^2 et parmi eux, q_3 multiples de p^3 : il y a exactement $q_2 - q_3$ nombres qui sont multiples de p^2 mais non de p^3.
- …
- Il y a q_{k-1} multiples de p^{k-1} et parmi eux, q_k multiples de p^k : il y a exactement $q_{k-1} - q_k$ nombres qui sont multiples de p^{k-1} mais non de p^k.
- Il y a enfin q_k multiples de p^k et aucun multiple d'une puissance de p plus grande.

L'exposant du nombre premier p dans la décomposition de la factorielle de n est :

$$(q_1 - q_2) + 2(q_2 - q_3) + ... + (k-1)(q_{k-1} - q_k) + k.q_k \quad \text{soit : } q_1 + q_2 + ... + q_k$$

Compte tenu des caractérisations de ces divers entiers, cet exposant est le nombre :

$$\alpha(n,p) = E\left(\frac{n}{p}\right) + E\left(\frac{n}{p^2}\right) + ... + E\left(\frac{n}{p^k}\right) = \sum_{j=1}^{k} E\left(\frac{n}{p^j}\right)$$

5. En synthétisant les résultat précédents, un nombre premier figure dans la décomposition de la factorielle de n si et seulement si il est inférieur ou égal à n. Avec les notations ci-dessus, nous avons obtenu les exposants de tous ces facteurs premiers.

Ainsi, la décomposition en facteurs premiers est : $n! = \prod\limits_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq n}} p^{\alpha(n,p)}$

Voir un algorithme un peu plus bas.

6. De façon générale, si un entier a se décompose ainsi : $a = p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}$, alors le nombre de ses diviseurs est égal à :

$$(\alpha_1 + 1) \times ... \times (\alpha_k + 1) = \prod_{j=1}^{k} (\alpha_j + 1)$$

On en déduit ici une expression du nombre de diviseurs de la factorielle de n : $\prod\limits_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq n}} (\alpha(n,p) + 1)$

7. De façon générale, l'écriture en numération décimale d'un entier a se termine par m zéros exactement si et seulement si a s'écrit : $a = 10^m \times b$ où b est un entier non divisible par dix. C'est le cas en effet si et seulement si les chiffres affectés aux m premières puissances de 10 (à savoir les puissances $10^0, 10^1, ... 10^{m-1}$) sont nuls alors que celui affecté à la $(m+1)$ème puissance (à savoir la puissance 10^m) ne l'est pas. Cet entier b n'est pas divisible par dix si et seulement si il n'est pas divisible à la fois par 2 et par 5.

De ce qui précède, il ressort qu'une factorielle s'écrit ainsi : $n! = 2^{\alpha(n,2)} \times 5^{\alpha(n,5)} \times A_n$ où l'entier A_n, produit des facteurs premiers autres que 2 et que 5, n'est divisible ni par 2 ni par 5.

De plus, pour tout entier j : $\frac{n}{2^j} > \frac{n}{5^j}$ donc : $E\left(\frac{n}{2^j}\right) \geq E\left(\frac{n}{5^j}\right)$. Dans l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$, il y a toujours plus de multiples d'une puissance de 2 que de la même puissance de 5 , ce qui implique que : $\alpha(n, 2) \geq \alpha(n, 5)$.

De la relation $n! = 2^{\alpha(n,2)-\alpha(n,5)} \times 2^{\alpha(n,5)} \times 5^{\alpha(n,5)} \times A_n$, on déduit que : $n! = 10^{\alpha(n,5)} \times 2^{\alpha(n,2)-\alpha(n,5)} \times A_n$. La factorielle de n est le produit de $10^{\alpha(n,5)}$ par un entier non divisible par 5 donc non divisible par dix : le nombre de zéros de son écriture décimale est le nombre $\alpha(n, 5)$

Voici un algorithme écrit avec TI-nSpire. Je laisse au pythonistes le soin d'écrire leur propre algorithme avec Python. Courage, je compatis !

L'algorithme donne la liste des exposants des facteurs premiers, celui pour les entiers de 1 à 30, maison pourrait aller au-delà en allongeant la liste des nombres premiers utilisés (cette liste a été arrêtée à 29).

```
Define prem={2,3,5,7,11,13,17,19,23,29▸          Terminé
decompfacto(10)
                         {2,3,5,7,11,13,17,19,23,29}
                         {8,4,2,1,0,0,0,0,0,0}
                                                  Terminé
factor(10!)                             2^8·3^4·5^2·7
decompfacto(20)
                         {2,3,5,7,11,13,17,19,23,29}
                         {18,8,4,2,1,1,1,1,0,0}
                                                  Terminé
factor(20!)              ‹18·3^8·5^4·7^2·11·13·17·19
decompfacto(30)
                         {2,3,5,7,11,13,17,19,23,29}
                         {26,14,7,4,2,2,1,1,1,1}
                                                  Terminé
factor(30!)   ‹26·3^14·5^7·7^4·11^2·13^2·17·19·23·29
©gilbertjulia2021
```

```
decompfacto                                          9/12
Define decompfacto(n)=
Prgm
Local u,j,k
newList(dim(prem))→expo
For u,1,dim(prem)
  0→k
  While iPart(n/(prem[u])^k)≥1
   k+1→k
  EndWhile
© gilbertjulia2021
  Σ(j=1..k) (floor(n/(prem[u])^j))→expo[u]
EndFor
Disp prem
Disp expo
EndPrgm
```

Il est possible au contraire de ne considérer que des nombres premiers particuliers comme 2 et 5. On apprend ainsi par exemple que la factorielle de 100 se termine par 24 zéros et que la factorielle de 1000 se termine par 249 zéros.

```
                                                  Terminé
factor(20!)              ‹18·3^8·5^4·7^2·11·13·17·19
decompfacto(30)
                         {2,3,5,7,11,13,17,19,23,29}
                         {26,14,7,4,2,2,1,1,1,1}
                                                  Terminé
factor(30!)   ‹26·3^14·5^7·7^4·11^2·13^2·17·19·23·29
©gilbertjulia2021
Define prem={2,5}                                 Terminé
decompfacto(100)
                                              {2,5}
                                              {97,24}
                                                  Terminé
decompfacto(1000)
                                              {2,5}
                                              {994,249}
                                                  Terminé
```

```
decompfacto                                          9/12
Define decompfacto(n)=
Prgm
Local u,j,k
newList(dim(prem))→expo
For u,1,dim(prem)
  0→k
  While iPart(n/(prem[u])^k)≥1
   k+1→k
  EndWhile
© gilbertjulia2021
  Σ(j=1..k) (floor(n/(prem[u])^j))→expo[u]
EndFor
Disp prem
Disp expo
EndPrgm
```

Un algorithme avec les applications numériques. On apprend que si la factorielle de 10 n'a « que » 270 diviseurs, celle de 30 en a 2332800.

```
Define prem={2,3,5,7,11,13,17,19,23,29▸          Terminé
©gilbertjulia2021
decompfacto(10)
                         {2,3,5,7,11,13,17,19,23,29}
                         {8,4,2,1,0,0,0,0,0,0}
                         nombre de diviseurs 270
                         nombre de zéros 2
                                                  Terminé
decompfacto(20)
                         {2,3,5,7,11,13,17,19,23,29}
                         {18,8,4,2,1,1,1,1,0,0}
                         nombre de diviseurs 41040
                         nombre de zéros 4
                                                  Terminé
decompfacto(30)
                         {2,3,5,7,11,13,17,19,23,29}
                         {26,14,7,4,2,2,1,1,1,1}
                         nombre de diviseurs 2332800
                         nombre de zéros 7
                                                  Terminé
```

```
decompfacto                                         11/14
Define decompfacto(n)=
Prgm
Local u,j,k
newList(dim(prem))→expo
For u,1,dim(prem)
  0→k
  While iPart(n/(prem[u])^k)≥1
   k+1→k
  EndWhile
© gilbertjulia2021
  Σ(j=1..k) (floor(n/(prem[u])^j))→expo[u]
EndFor
Disp prem
Disp expo
Disp "nombre de diviseurs ", Π(u=1..dim(prem)) (expo[u]+1)
Disp "nombre de zéros ",expo[3]
EndPrgm
```

Partie B

L'idée fondamentale est que deux entiers u et v sont premiers entre eux si et seulement si dans leurs factorisations en produit de facteurs premiers il n'y a aucun facteur premier commun aux deux décompositions. Il s'agira de déterminer quels sont les facteurs premiers mobilisés dans la décomposition en facteurs premiers de la factorielle de n puis de déterminer de combien de façons on peut effectuer une partition de cette décomposition.

Par définition de la factorielle, tout nombre premier inférieur ou égal à n est un facteur dans la factorielle de n : il figure dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$

Au contraire, si p est un nombre premier strictement supérieur à n, il est premier avec tous les entiers qui lui sont inférieurs, donc il est premier avec tous les entiers de 1 à n, et il est premier avec leur produit : il ne figure pas dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$

Ainsi, un nombre premier figure dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$ si et seulement si c'est un nombre premier inférieur ou égal à n : il y a exactement a_n nombres premiers distincts qui figurent dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$ (Tout ceci a été vu dans la **partie A**)

L'ensemble de ces facteurs premiers est l'ensemble $P_n = \{2\ ;3\ ;5\ ;...;p_{a_n}\}$ des a_n nombres premiers qui sont inférieurs ou égaux à n. Cet ensemble possède a_n éléments.

Deux entiers u et v sont premiers entre eux et ont pour produit la factorielle de n si et seulement si leurs décompositions en produit de facteurs premiers sont disjointes (aucun facteur premier commun) et ont pour produit celle de la factorielle de n. Ce qui revient à dire que les facteurs premiers mobilisés d'une part pour u et d'autre part pour v forment une partition en deux parties complémentaires de P_n. Les exposants affectés à ces divers facteurs premiers sont ceux de la factorielle de n (il n'y a pas lieu de les rechercher).

Il y a autant de paires $\{u\ ;v\}$ d'entiers strictement positifs premiers entre eux dont le produit est égal à la factorielle de n que de partitions de P_n en deux parties complémentaires.

Or il existe 2^{a_n} parties de l'ensemble P_n, chacune déterminant sa partie complémentaire.

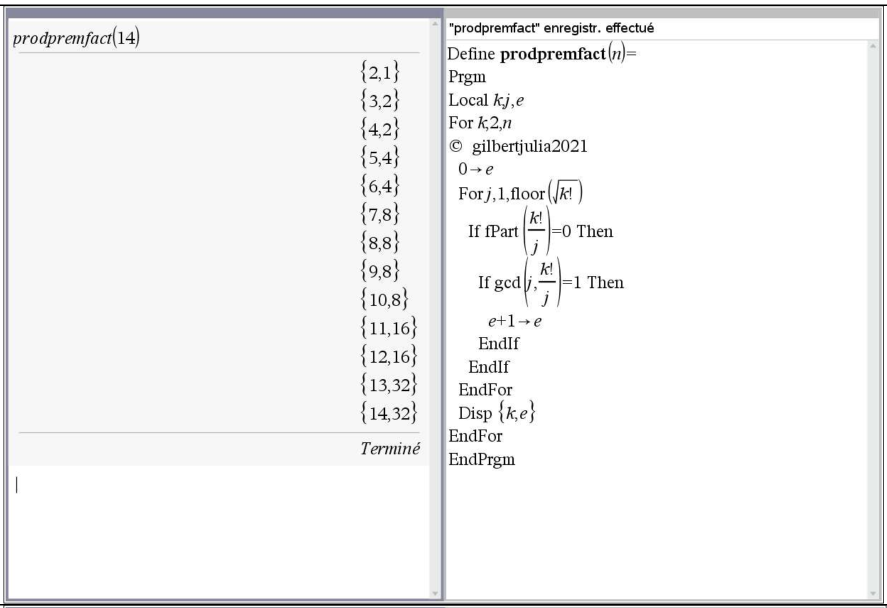
Donc il existe 2^{a_n-1} partitions de l'ensemble P_n car chaque partie A de P_n figure dans deux partitions : celle déterminée par A et celle déterminé par sa partie complémentaire.

Il y a 2^{a_n-1} paires $\{u\ ;v\}$ d'entiers strictement positifs premiers entre eux dont le produit est égal à la factorielle de n.

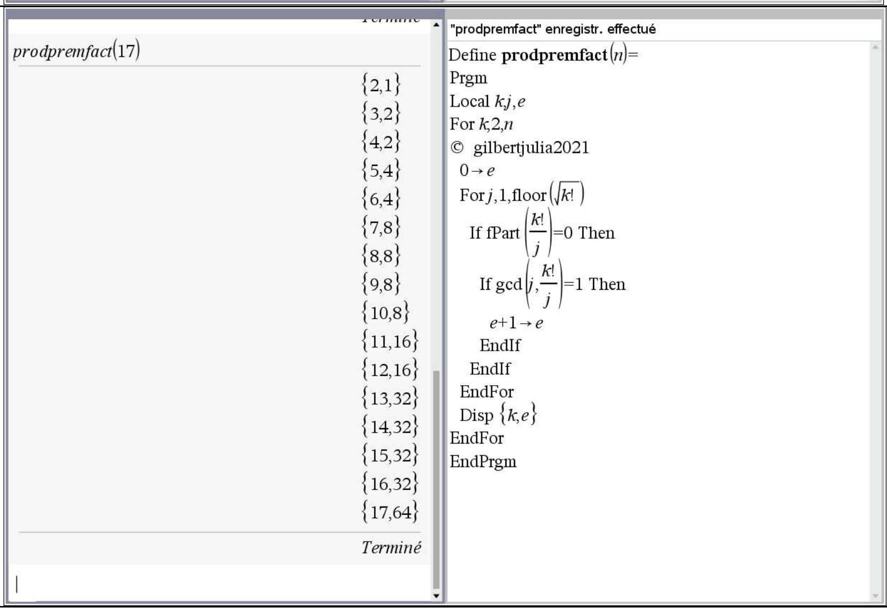
Pour $n=20$: $P_{20}=\{2\ ;3\ ;5\ ;7\ ;11\ ;13\ ;17\ ;19\}$ et $a_{20}=8$. Il y a $2^7=128$ paires $\{u\ ;v\}$ d'entiers strictement positifs premiers entre eux dont le produit est égal à la factorielle de 20.

Pour $n=30$: $P_{30}=\{2\ ;3\ ;5\ ;7\ ;11\ ;13\ ;17\ ;19\ ;23\ ;29\}$ et $a_{30}=10$. Il y a $2^9=512$ paires $\{u\ ;v\}$ d'entiers strictement positifs premiers entre eux dont le produit est égal à la factorielle de 30.

Un programme exhaustif permet d'obtenir le nombre de paires pour les premiers entiers : on fait afficher l'entier n et, à côté de lui, le nombre de paires, qui est comme prévu une puissance de 2. Jusqu'à l'entier 14, il n'y a pas trop de difficultés pour obtenir le résultat qui valide le précédent nôtre ; au-delà, les choses se gâtent.



Il faut beaucoup de patience pour parvenir à l'entier 17. Ouf, c'est fait. Au-delà, il faudrait peut-être réviser l'écriture de ce programme, trop glouton (?).



Partie C

1. Soit x et y deux entiers strictement positifs. $PGCD(x,\ y)=15!$ si et seulement si il existe deux entiers premiers entre eux u et v tels que : $\begin{cases} x=15!\times u \\ y=15!\times v \end{cases}$. Dans ces conditions : $PPCM\,(x,\ y)=15!\times u\times v$.

La factorielle de 20 est un multiple de la factorielle de 15 : $20\,!=(20\times19\times18\times17\times16)\times15!$.

Nous sommes amenés à rechercher, et à inventorier, quelles sont les paires d'entiers strictement positifs $\{u\ ;\ v\}$ d'entiers premiers entre eux tels que : $u\times v=20\times19\times18\times17\times16=1860480$

Il est clair d'autre part que, réciproquement, si une paire d'entiers $\{u\ ;\ v\}$ a ces propriétés, alors il s'agit bien de deux entiers premiers entre eux dont le produit est 1860480 (leurs produits par la factorielle de 15 correspondent à une solution au problème initial). L'inventaire fournira toutes les solutions au problème.

Or : $20\times19\times18\times17\times16=\left(2^2\times5\right)\times19\times\left(2\times3^2\right)\times17\times2^4=2^7\times3^2\times5\times17\times19$

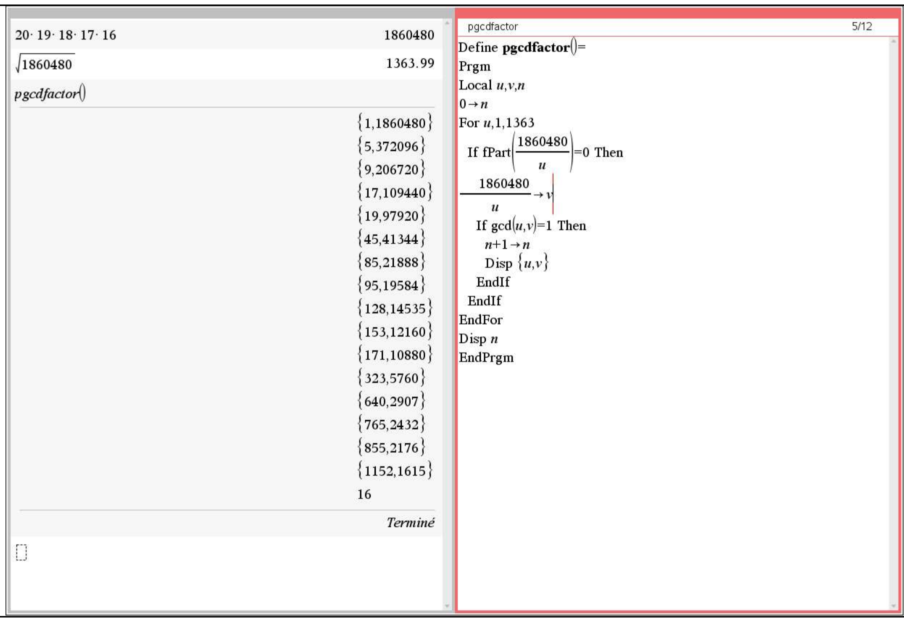
Les deux entiers u et v ayant pour produit 1860480, leurs factorisations respectives en produit de facteurs premiers sont de la forme $2^a\times3^b\times5^c\times17^d\times19^e$ où les exposants sont inférieurs ou égaux aux exposants homologues de 1860480.

On sait que deux entiers u et v sont premiers entre eux si et seulement si dans leurs factorisations en produit de facteurs premiers il n'y a aucun facteur premier commun aux deux décompositions.

Nous sommes amenés à chercher de combien de façons la décomposition $2^7\times3^2\times5\times17\times19$ peut être répartie en deux décompositions complémentaires n'ayant en commun aucun facteur premier. Nous obtiendrons ainsi le nombre de *couples* $(u,\ v)$ dont le produit est 1860480 (chaque paire d'entiers sera comptée deux fois). Ce problème revient exactement à décomposer l'ensemble des cinq éléments $\left\{2^7\ ;\ 3^2\ ;\ 5\ ;\ 17\ ;\ 19\right\}$ en deux parties complémentaires, l'une constituant la décomposition en produit de facteurs premiers de u, l'autre celle de v (la partie vide correspondant conventionnellement à la décomposition de 1). Un ensemble de 5 éléments ayant $2^5=32$ parties distinctes, le nombre de couples d'entiers convenables est égal à 32, et le nombre de paires est égal à 16.

Ce problème peut aussi bien être résolu à l'aide d'un algorithme. Un exemple ci-contre. En prime, on a fait afficher les paires $\{u, v\}$ d'entiers possibles (le plus petit nombre de la paire est forcément inférieur à la racine carrée de 1860480, c'est pourquoi l'investigation systématique a été arrêtée à l'entier 1363).

Les paires $\{x, y\}$ s'en déduisent en multipliant par la factorielle de 15, ce qui ne présente pas un intérêt majeur.



2. Soit x et y deux entiers strictement positifs. $PGCD(x, y) = 12!$ si et seulement si il existe deux entiers premiers entre eux u et v tels que : $\begin{cases} x = 12! \times u \\ y = 12! \times v \end{cases}$. Dans ces conditions : $PPCM(x, y) = 12! \times u \times v$.

La factorielle de 17 est un multiple de la factorielle de 13 : $17\,! = (17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13) \times 12!$.

Nous sommes amenés à rechercher, et à inventorier, quelles sont les paires d'entiers strictement positifs $\{u\ ;\ v\}$ d'entiers premiers entre eux tels que : $u \times v = 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 742560$

Or : $742560 = 2^5 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 17$

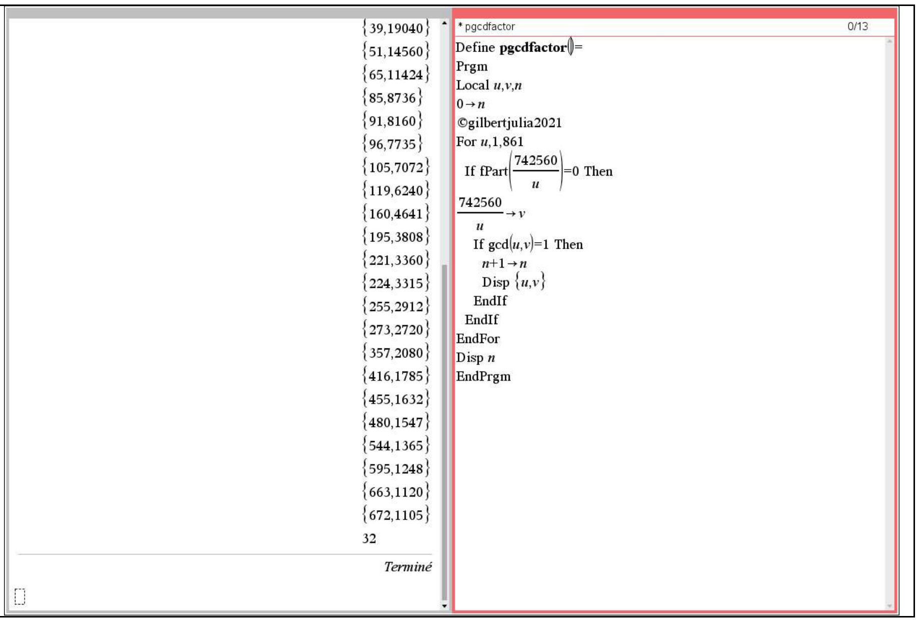
Les deux entiers u et v ayant pour produit ce nombre, leurs factorisations respectives en produit de facteurs premiers sont de la forme $2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d \times 13^e \times 17^f$ où les exposants sont inférieurs ou égaux aux exposants homologues de 1860480.

Il y a maintenant, par rapport au cas précédent, un facteur premier de plus, l'entier 742560 mobilise six nombres premiers et non plus cinq.

Ce problème revient maintenant à décomposer l'ensemble des six éléments $\{2^5\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 7\ ;\ 13\ ;\ 17\}$ en deux parties complémentaires, l'une constituant la décomposition en produit de facteurs premiers de u, l'autre celle de v. Un ensemble de six éléments ayant $2^6 = 64$ parties distinctes, le nombre de couples d'entiers convenables est égal à 64, et le nombre de paires est égal à 32.

Mutatis mutandi, l'algorithme précédent obtient le même résultat.

Plus généralement, le nombre de paires d'entiers strictement positifs $\{x\,;\,y\}$ tels que : $\begin{cases} PGCD(x,\,y) = a! \\ PPCM(x,\,y) = (a+5)! \end{cases}$ dépend du nombre de nombres premiers mobilisés dans la décomposition du produit $(a+1)\times(a+2)\times(a+3)\times(a+4)\times(a+5)$. Les nombres premiers 2, 3 et 5 sont mobilisés à coup sûr car sur cinq nombres consécutifs, deux au moins sont pairs, un au moins est multiple de 3 et un exactement est multiple de 5. Pour le reste, tout dépend de la valeur de a.



Plus généralement encore, étant donnés deux entiers a et b strictement positifs a et b tels que $a < b$, et un posant $b = a + \lambda$, le nombre de paires d'entiers strictement positifs $\{x\,;\,y\}$ tels que : $\begin{cases} PGCD(x,\,y) = a! \\ PPCM(x,\,y) = b! \end{cases}$ dépend du nombre de nombres premiers figurant dans la décomposition en facteurs premiers du produit $\prod_{k=1}^{\lambda}(a+k)$, c'est-à-dire finalement du nombre d'entiers premiers qui appartiennent à l'ensemble $\{a+1,\, a+2, \ldots,\, a+\lambda = b\}$.

S'il y a n nombres premiers dans cet ensemble, alors il y a 2^{n-1} paires d'entiers positifs qui sont solution.

Enoncés fermés

Partie A

Soit n un entier strictement supérieur à 1. On se propose de déterminer le nombre de paires d'entiers strictement positifs $\{u\ ;\ v\}$ *premiers entre eux* dont le produit est égal à la factorielle de n.

Pour tout entier n strictement supérieur à 1, on note P_n l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n (ainsi par exemple $P_5 = P_6 = \{2\ ;\ 3\ ;\ 5\}$) et on note a_n le nombre d'éléments de cet ensemble (ainsi : $a_2 = 1\ ;\ a_3 = a_4 = 2\ ;\ a_5 = a_6 = 3;\ldots$).

1. On s'intéresse à la décomposition en facteurs premiers de la factorielle de n. Montrer que les nombres premiers mobilisés dans cette factorisation sont, exactement, les éléments de P_n (on ne demande pas quels sont les exposants qui leur sont affectés).

2. Montrer que u et v sont deux entiers premiers entre eux si et seulement si leurs décompositions en facteurs premiers n'ont aucun facteur premier commun.

3. Soit $\{u\ ;\ v\}$ une paire d'entiers *premiers entre eux* dont le produit est égal à la factorielle de n. Montrer que les nombres premiers mobilisés dans leurs décompositions respectives en produit de facteurs premiers forment une partition de P_n en deux parties complémentaires.

4. Finir le travail.

Partie B

L'objectif est de déterminer le nombre de paires d'entiers strictement positifs $\{x\ ;\ y\}$ tels que : $\begin{cases} PGCD(x,\ y) = 15! \\ PPCM(x,\ y) = 20! \end{cases}$

1. Soit x et y deux entiers vérifiant $PGCD(x, y) = 15!$. Justifier l'existence de deux entiers u et v premiers entre eux tels que gjulia $\begin{cases} x = 15! \times u \\ y = 15! \times v \end{cases}$.

2. Montrer que si de plus $PPCM(x, y) = 20!$, alors : $u \times v = 1860480$.

3. Décomposer le nombre 1860480 en produit de facteurs premiers.

4. Déterminer de combien de façons 1860480 est le produit de deux entiers premiers entre eux. Conclure pour cet exemple.

5. Finir le travail.