Baccalauréat Paris C 1975

Je propose ce problème à l'intention de ceux qui doutent que le niveau du CAPES 2017 est en dessous du niveau de l'antique Terminale C, filière classe supprimée par un Jack Lang qui n'a pas eu que des bonnes idées.

Ce problème prouve également que, en 1975, on ne craignait pas de poser un sujet à thème, qui plus est à tendance probabiliste. Mais en 1975 le paysage mathématique, de l'arithmétique aux espaces vectoriels et affines en passant par les transformations, j'en passe et des meilleurs, était beaucoup plus varié que le paysage malévitchien contemporain.

Par exemple, on trouve dans ce sujet une étude structurelle d'un ensemble de suites récurrentes doubles, étude inconcevable de nos jours.

L'énoncé est tiré du Gourion / Novelli, Terminale C/E éditions Nathan *1979, 11.49 page 436 (chapitre probabilités).*

Le sujet

Partie I

On donne un entier naturel a, supérieur ou égal à 1.

1. Trouver l'ensemble J des solutions du système suivant d'inéquations où l'inconnue est le nombre réel x :

$$\begin{cases} x > 0 \\ \dfrac{-x^{3a}+2x^{a}-1}{1-x^{3a}} < 0 \end{cases}$$ (on pourra d'abord poser $x^a = X$).

2. Calcul numérique : Trouver la plus petite valeur de l'entier a pour laquelle le nombre $\dfrac{49}{51}$ appartient à J.

Partie II

On considère l'ensemble S de toutes les suites réelles u, applications de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$ $n \mapsto u_n$.

La somme $u+u'$ de deux suites u et u' de S est la suite $n \mapsto u_n + u'_n$.

Le produit γu d'une suite u par un réel γ est la suite $n \mapsto \gamma u_n$.

La suite nulle O est la suite $n \mapsto 0$ (réel nul).

L'ensemble S, muni de cette addition et de cette multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$.

1. Soit p un nombre réel donné, appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$. On désigne par E l'ensemble des suites u de S qui satisfont à la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbf{N},\ p u_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n = 0$ (1)

1.1. Montrer qu'une telle suite est définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 et par la relation (1).

1.2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de S.

1.3. Soit v et w les deux suites de E définies par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} w_0 = 0 \\ w_1 = 1 \end{cases}$.

Montrer que $\{v,\, w\}$ est un système libre.
Montrer que, si u est une suite quelconque de E, $u = u_0\, v + u_1\, w$.
Que peut-on dire alors de $\{v,\, w\}$? Quelle est la dimension de E ?

2.1. Vérifier que si $p = \frac{1}{2}$, les suites de E sont des suites arithmétiques..

2.2. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. Montrer que la suite $n \mapsto t^n$ (t réel non nul) appartient à E si et seulement si t est tel que $p\,t^2 - t + (1 - p) = 0$
Vérifier que l'on obtient ainsi deux suites formant une base de E. Écrire alors une expression générale du terme u_n d'une suite u quelconque de E, en désignant par λ et μ les coordonnées de u dans cette base.

3. Soit α un entier donné, supérieur ou égal à 1. On désigne maintenant par u une suite de E telle que
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_\alpha = 0 \end{cases}$$

3.1. On suppose que $p = \frac{1}{2}$. Exprimer alors u_n en fonction de α et de n.

3.2. On suppose que $p \neq \frac{1}{2}$. et on pose $x = \frac{1 - p}{p}$; exprimer u_n en fonction de x, α et n.

Partie III

Un jeu oppose deux joueurs A et A', auxquels on attribue respectivement, au début du jeu, un « avoir » de a jetons et un « avoir » de $2a$ jetons (a entier donné, supérieur ou égal à 1).

La rencontre comporte des parties successives et indépendantes, numérotées 1, 2, 3, ...

La probabilité pour que le joueur A gagne une partie est supposée indépendante du rang de cette partie, et égale à p $(0 < p < 1)$

1. Après chaque partie le joueur perdant donne un jeton au gagnant.

Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur est « ruiné », c'est-à-dire ne dispose plus de jetons, et le joueur « ruiné » perd le match.

1.1. k désignant un entier naturel, on considère la variable aléatoire X_k égale à l'avoir du joueur A après la partie de rang k (si $k \neq 0$) et avant la partie de rang $k+1$ (si celle-ci a lieu).

On a ainsi $X_0 = a$ et $0 \leq X_k \leq 3a$

Quelles sont les valeurs « possibles » de X_1 ? de X_2 ? de X_{2k} ? de X_{2k+1} ?

1.2. Si $X_k = 0$, le joueur A est ruiné ; si $X_k = 3a$, le joueur A' est ruiné ; dans chacun de ces cas le match ne se poursuit pas au delà de la k-ième partie. Si X_k est différent de 0 et de $3a$ l'on admet que la probabilité de ruine ultérieure du joueur A ne dépend pas de k mais seulement de la valeur n de X_k.

On désigne par r_n la probabilité de ruine de A, connaissant n. On a ainsi $r_0 = 1$ et $r_{3a} = 0$

En considérant les deux valeurs que peut prendre X_{k+1} sachant que $X_k = n$, montrer que $r_n = (1-p)r_{n-1} + p\,r_{n+1}$ et constater que la suite $n \mapsto r_n$ vérifie la relation de récurrence (1) de la partie II.

Exprimer alors, à l'aide de **II.2.2**, le terme r_n :

- en fonction de n et de a lorsque $p = \dfrac{1}{2}$
- en fonction de n, a et de $x = \dfrac{1-p}{p}$ lorsque $p \neq \dfrac{1}{2}$

1.3. On désigne par r'_m la probabilité de ruine du joueur A', connaissant son avoir m.

Montrer qu'on obtient r'_m en remplaçant dans l'expression de r_n, n par m et p par $1-p$ (c'est-à-dire x par $\dfrac{1}{x}$). Écrire cette expression de r'_m (pour $p = \dfrac{1}{2}$ et pour $p \neq \dfrac{1}{2}$).

Vérifier la relation $r_a + r'_{2a} = 1$

2. En notant que r_a et r'_a sont les probabilités de ruine de A et de A' au début du match, on voit que le jeu est favorable au joueur A si $r_a < r'_{2a}$, c'est-à-dire,d'après la relation précédente, si $2r_a < 1$.

Que vaut r_a lorsque $p = \dfrac{1}{2}$?

On suppose $p \neq \dfrac{1}{2}$. Exprimer la différence $D_a = 2r_a - 1$ en fonction de x et de a. Pour quelles valeurs de x a-t-on $D_a < 0$? (cf. le **I.1**).

P étant fixé, supérieur à $\dfrac{1}{2}$, comment choisir a pour que le jeu soit favorable au joueur A ?

Application numérique : $p = 0{,}51$; utiliser le **I.2** pour donner la plus petite valeur convenable de l'entier a.

Eléments de correction

Partie I

1. On note que pour tout réel x de l'ensemble $]0,+\infty[-\{1\}$: $\dfrac{-x^{3a}+2x^a-1}{1-x^{3a}}=\dfrac{x^{2a}+x^a-1}{x^{2a}+x^a+1}$.

Si on considère la fraction rationnelle : $\dfrac{P(X)}{Q(X)}=\dfrac{X^2+X-1}{X^2+X+1}$, on note aussi que le polynôme $P(X)=X^2+X-1$ admet deux racines réelles : $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (située dans l'intervalle $]0,1[$) et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (strictement négative). Ce polynôme est strictement positif à l'extérieur de ces deux racines, strictement négatif entre les deux tandis que $Q(X)=X^2+X+1$ est toujours strictement positif

Il s'ensuit que pour tout réel x de l'ensemble $]0,+\infty[-\{1\}$: $\dfrac{-x^{3a}+2x^a-1}{1-x^{3a}}<0 \Leftrightarrow 0<x^a<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

On en déduit que : $\begin{cases} x>0 \\ \dfrac{-x^{3a}+2x^a-1}{1-x^{3a}}<0 \end{cases} \underset{\text{gilbertjulia 2017}}{\Leftrightarrow} x\in \left]0, \sqrt[a]{\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right[$

2. On est amené à chercher la plus petite valeur de l'entier a telle que : $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}>\left(\dfrac{49}{51}\right)^a$ c'est-à-dire telle que : $a>\dfrac{\ln 2-\ln\left(-1+\sqrt{5}\right)}{\ln 51-\ln 49}$.

Une calculatrice indique que $12<\dfrac{\ln 2-\ln\left(-1+\sqrt{5}\right)}{\ln 51-\ln 49}\underset{\text{gjulia 2017}}{}<12{,}1$ ce qui amène à : $a=13$

Partie II

1. Soit p un nombre réel donné, appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$. On désigne par E l'ensemble des suites u de S qui satisfont à la relation de récurrence : $\forall n\in\mathbf{N},\ p\,u_{n+2}-u_{n+1}+(1-p)u_n=0$ (1)

1.1. Soit u une suite de E dont on suppose donnés ses deux premiers termes u_0 et u_1.

Supposons que , pour deux rangs consécutifs n et $n+1$, les termes de rang n et $n+1$ s'expriment en fonction de u_0 et u_1, c'est-à-dire qu'il existe des réels a_n ; b_n ; a_{n+1} ; b_{n+1} ne dépendant que de p (et de n bien entendu … mais pas des termes initiaux) tels que : $\begin{cases} u_n=a_n u_0+b_n u_1 \\ u_{n+1}=a_{n+1}u_0+b_{n+1}u_1 \end{cases}$.

Alors au rang $n+2$: $u_{n+2}=\dfrac{1}{p}u_{n+1}+\dfrac{p-1}{p}u_n=\dfrac{1}{p}\left(a_n+(p-1)a_{n+1}\right)u_0+\dfrac{1}{p}\left(b_n+(p-1)b_{n+1}\right)u_1$.

Ainsi, $u_{n+2}=a_{n+2}u_0+b_{n+2}u_1$ avec $\underset{gj}{}\begin{cases} a_{n+2}=\dfrac{1}{p}\left(a_n+(p-1)a_{n+1}\right) \\ b_{n+2}=\dfrac{1}{p}\left(b_n+(p-1)b_{n+1}\right) \end{cases}$, ces réels ne dépendant que de p.

Aux deux rangs consécutifs suivants $n+1$ et $n+2$, il existe encore des réels a_{n+1} ; b_{n+1} ; a_{n+2} ; b_{n+2} tels que : $\begin{cases} u_{n+1} = a_{n+1}\,u_0 + b_{n+1}\,u_1 \\ u_{n+2} = a_{n+2}\,u_0 + b_{n+2}\,u_1 \end{cases}$

Cette propriété étant initialisée aux rangs consécutifs 0 et 1 avec $a_0 = b_1 = 1$; $a_1 = b_0 = 0$ et étant héréditaire, elle est établie pour toute valeur de *n*. Il en résulte que pour tout entier *n* il existe des réels a_n et b_n (ne dépendant que *n* et de *p*) tels que : $u_n = a_n\,u_0 + b_n\,u_1$.

Toute suite *u* de *E* est entièrement déterminée par la donnée de ses deux premiers termes.

1.2.

- *E* est non vide car *E* contient au moins la suite nulle.
- Soient *u* et *v* deux suites de *E* :
  $$\left.\begin{array}{l} \forall n\in \mathbf{N},\ p\,u_{n+2} - u_{n+1} + (1-p)u_n = 0 \\ \forall n\in \mathbf{N},\ p\,v_{n+2} - v_{n+1} + (1-p)v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n\in \mathbf{N},\ p(u_{n+2}+v_{n+2}) - (u_{n+1}+v_{n+1}) + (1-p)(u_n+v_n) = 0$$
  C'est-à-dire : $\forall n\in \mathbf{N},\ p(u+v)_{n+2} - (u+v)_{n+1} + (1-p)(u+v)_n = 0$. La suite somme $(u+v)$ vérifie (1), elle appartient à *E*.

- Soit *u* est une suite de *E*. Pour tout réel λ :
  $\forall n\in \mathbf{N},\ \lambda\,p\,u_{n+2} - \lambda u_{n+1} + \lambda(1-p)u_n = p(\lambda u)_{n+2} - (\lambda u)_{n+1} + (1-p)(\lambda u)_n = 0$. La suite λu vérifie (1), elle appartient à *E*.

E est une partie non vide de *S* stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire, c'est un sous-espace vectoriel de *S*.

1.3. Soient λ et μ deux réels tels que : $\lambda v + \mu w = O$ (suite nulle). Alors $\forall n\in \mathbf{N},\ \lambda v_n + \mu w_n = 0$. Cette relation universelle est en particulier vérifiée pour $n=0$; $n=1$: $\begin{cases} \lambda v_0 + \mu w_0 = \lambda = 0 \\ \lambda v_1 + \mu w_1 = \mu = 0 \end{cases}$.

Ainsi : $\lambda v + \mu w = O \Rightarrow \lambda = \mu = 0$. $\{v,\ w\}$ est un système libre.

Soit *u* est une suite quelconque de *E*.
La suite $u_0\,v + u_1\,w$ est une suite de *E* en tant que combinaison linéaire de deux suites de *E* et : $\begin{cases} (u_0\,v + u_1\,w)_0 = u_0 \\ (u_0\,v + u_1\,w)_1 = u_1 \end{cases}$. Ses deux premiers termes sont égaux aux deux premiers termes respectifs de la suite *u*. Puisque ces deux suites de *E* coïncident pour leurs premiers termes, elles sont identiques : $u = u_0\,v + u_1\,w$.
La partie libre $\{v,\ w\}$ est aussi une partie génératrice de *E*, c'est une base de *E*.
E est un espace de dimension 2.

2. Si $p = \dfrac{1}{2}$ la relation de récurrence (1) devient : $\forall n\in \mathbf{N},\ \dfrac{1}{2}u_{n+2} - u_{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n = 0$, relation équivalente à la relation : $\forall n\in \mathbf{N},\ u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$. Quelle que soit la suite *u* de *E*, la différence de deux termes consécutifs de cette suite est dans ce cas une constante, la suite *u* est arithmétique.

2.2. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$. La suite $n \mapsto t^n$ (t réel non nul) appartient à E si et seulement si $\forall n \in \mathbf{N},$ gjulia2017 $p\,t^{n+2} - t^{n+1} + (1-p)\,t^n = t^n\left(p\,t^2 - t + (1-p)\right) = 0$.
Puisque t est un réel non nul, cette égalité est vérifiée pour toute valeur de n si et seulement si t est tel que $p\,t^2 - t + (1-p) = 0$
(L'hypothèse $t \neq 0$ n'était pas indispensable, l'égalité doit être vérifiée aussi au rang zéro).

On en déduit que ou bien $t = 1$ ou bien $t = \dfrac{1-p}{p}$.

On obtient ainsi deux suites de E, d'une part la suite constante égale à 1 pour tout entier n et d'autre part la suite $\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^n$. La matrice de leurs coordonnées dans la base $\{v\,;w\}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{1-p}{p} \end{pmatrix}$, matrice dont le déterminant $\dfrac{1-p}{p}$ est non nul. Ces deux suites $\left\{1\,;\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^n\right\}$ forment une partie libre de E donc une base de cet espace de dimension 2.

En désignant par λ et μ les coordonnées de u dans cette base : $u_n = \lambda + \mu\left(\dfrac{1-p}{p}\right)^n$.

λ et μ se calculent en résolvant le système d'équations : $\begin{cases} \lambda + \mu = u_0 \\ \lambda + \mu\dfrac{1-p}{p} = u_1 \end{cases}$: gilbertjulia2017 $\begin{cases} \lambda = \dfrac{p\,u_1 - (1-p)u_0}{2p-1} \\ \mu = \dfrac{p\left(u_0 - u_1\right)}{2p-1} \end{cases}$

3. Soit α un entier donné, supérieur ou égal à 1. On désigne par u une suite de E telle que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_\alpha = 0 \end{cases}$

3.1. On suppose que $p = \dfrac{1}{2}$. La suite u est une suite arithmétique de raison r . Si $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_\alpha = 0 \end{cases}$, alors la raison est $r = -\dfrac{1}{\alpha}$ et $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = 1 - \dfrac{n}{\alpha}$.

3.2. On suppose que $p \neq \dfrac{1}{2}$ et on pose $x = \dfrac{1-p}{p}$; les coordonnées λ et μ se calculent maintenant en résolvant : $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda + \mu\,x^a = 0 \end{cases}$ ce qui donne : gjulia2017 $\begin{cases} \lambda = \dfrac{x^a}{x^\alpha - 1} \\ \mu = \dfrac{-1}{x^\alpha - 1} \end{cases}$ puis : $u_n \underset{gj}{=} \dfrac{x^\alpha - x^n}{x^\alpha - 1}$

Partie III

1.1. Ou bien $X_1 = a-1$ ou bien $X_1 = a+1$.
Ou bien $X_2 = a-2$ ou bien $X_2 = a$ ou bien $X_2 = a+2$.
Si un nombre pair $2k$ de parties ont été jouées les valeurs « possibles » sont $a-2k,\ a-2k+2, ...,\ a+2k$ dans la mesure ou ces résultats sont situés entre 0 et $3a$.

Si un nombre impair $2k+1$ de parties ont été jouées les valeurs « possibles » sont $a-2k-1,\ a-2k+1, ...,\ a+2k+1$ dans la mesure ou ces résultats sont situés entre 0 et $3a$.

1.2. On est amené à supposer que $0 < n < 3a$, autrement il n'y a pas de partie suivante.
Dans ce cas, lorsque $X_k = n$, $X_{k+1} = n \pm 1$.
On est amené à supposer en outre que n est une « valeur possible » de X_k. (ou plutôt que k est tel que n est une valeur possible pour X_k , cela se pose mieux en ces termes). En effet, si on désigne par R_A l'évènement « le match se termine par la ruine de A », la probabilité r_n apparaît comme une probabilité conditionnelle sous condition que $X_k = n$. Le conditionnement n'a de sens que si la condition est distincte de l'évènement impossible et dans ce cas : $r_n = P_{X_k=n}(R_A)$. Ces réserves étant faites :
Les deux évènements $([X_k = n] \cap [X_{k+1} = n+1])$ et $([X_k = n] \cap [X_{k+1} = n-1])$ forment une partition de l'évènement $[X_k = n]$. D'après la formule des probabilités totales :
$P_{X_k=n}(R_A) = P_{X_k=n}(X_{k+1} = n+1) \times P_{X_{k+1}=n+1}(R_A) + P_{X_k=n}(X_{k+1} = n-1) \times P_{X_{k+1}=n-1}(R_A)$

Puisque la probabilité pour que le joueur A gagne une partie est supposée indépendante du rang de cette partie, la probabilité de ruine de A sachant que A dispose d'un nombre donné de jetons à un moment du jeu ne dépend pas de ce moment. Aussi bien : $r_{n+1} = P_{X_{k+1}=n+1}(R_A)$; $r_{n-1} = P_{X_{k+1}=n-1}(R_A)$.
On obtient la relation de récurrence : $r_n = p \times r_{n+1} + (1-p) \times r_{n-1}$
La suite (r_n) vérifie la relation de récurrence (1) et elle est déterminée par le fait que : $\begin{cases} r_0 = 1 \\ r_{3a} = 0 \end{cases}$, conformément aux conditions de **II.2.2**.

- Lorsque $p = \frac{1}{2}$: $\forall n,\ 0 \le n \le 3a$: $r_n = 1 - \frac{n}{3a}$
- Lorsque $p \ne \frac{1}{2}$: $\forall n,\ 0 \le n \le 3a$, $r_n = \frac{x^{3a} - x^n}{x^{3a} - 1}$

1.3. On désigne par r'_m la probabilité de ruine du joueur A', connaissant son avoir m. Le déroulement du jeu étant symétrique en A et en A' (mis à part le fait que les avoirs initiaux sont différents, ce qui n'influe pas sur le déroulement mais seulement sur l'issue), le résultat en découle.

- Lorsque $p = \frac{1}{2}$: $\forall m,\ 0 \le m \le 3a$: $r'_m = 1 - \frac{m}{3a}$
- Lorsque $p \ne \frac{1}{2}$: $\forall m,\ 0 \le m \le 3a$, $r'_m = \frac{1 - x^{3a-m}}{1 - x^{3a}}$

Dans le premier cas, $r_a + r'_{2a} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$. Dans le deuxième, $r_a + r'_{2a} = \frac{x^{3a} - x^a}{x^{3a} - 1} + \frac{1 - x^a}{1 - x^{3a}} = 1$.

On en conclue que le match se termine inexorablement par la ruine de l'un ou l'autre des deux joueurs.

2. On suppose $p \neq \frac{1}{2}$. Alors $D_a = 2r_a - 1 \underset{gjulia2017}{=} \frac{x^{2a} + x^a - 1}{x^{2a} + x^a + 1}$, fonction étudiée dans la partie I.

$D_a < 0$ lorsque $x \in \left]0, \sqrt[a]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}\right[$

p étant fixé et supérieur à $\frac{1}{2}$, le nombre x est situé dans l'intervalle $]0, 1[$.

L'entier a doit être choisi de façon que $\sqrt[a]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} > x$ pour que le jeu soit favorable au joueur A.

Puisque $\lim\limits_{a \to +\infty} \left(\sqrt[a]{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} \right) = 1$, aussi voisin que soit p de $\frac{1}{2}$ (mais strictement supérieur à ce nombre), on peut toujours choisir a assez grand $_{gj}$ pour que ce soit le cas.

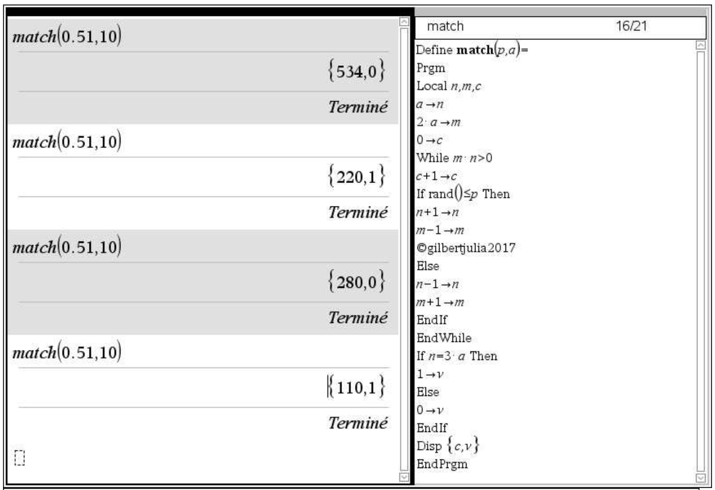
Application numérique : $p = 0{,}51$. Dans ce cas : $x = \frac{49}{51}$; la plus petite valeur convenable de l'entier a est $a = 13$ comme il a été vu dans la partie I.

Simulations

Voici deux programmes illustrant cette situation par une simulation.

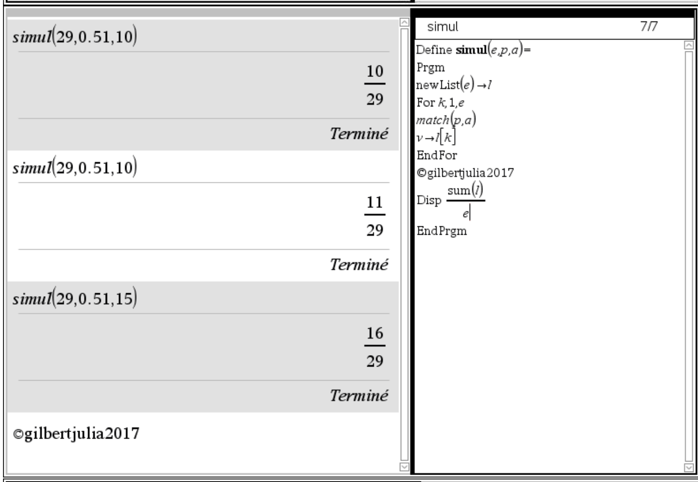
Le programme **match** est affecté de deux arguments : p est la probabilité que A gagne une partie et a définit les avoirs initiaux des joueurs A et A'.
Ce programme renvoie (juste par curiosité) le nombre **c** de parties jouées avant la ruine d'un joueur, et désigne par 1 la victoire de A et par 0 celle de A'. La variable **v** n'est pas déclarée variable locale pour un usage ultérieur.

L'affichage de **c** et de **v** sera maintenant supprimé. De même, on pourra effacer la recherche de **c** inutile pour ce qui suit.



Le programme **simul** a pour objectif de simuler une série de matches et de lister leur issue, 1 si favorable à A et 0 si favorable à A'.
La fréquence des issues où A gagne le match est affichée en fin de programme. La liste **l** peut elle aussi être utilisée si besoin est.

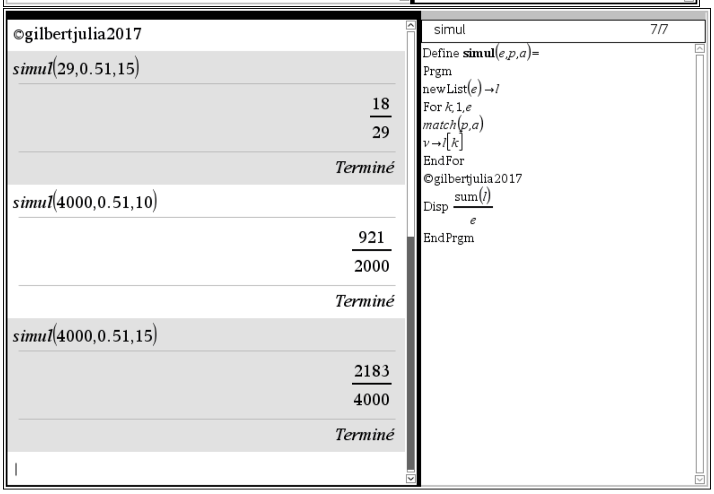
On ne peut rien conclure de significatif lorsqu'on effectue un petit nombre d'essais.



Maintenant, on effectue 4000 essais avec d'abord $a = 10$ puis avec $a = 15$

Je laisse le lecteur tirer ses conclusions et/ou effectuer des investigations complémentaires.

Il s'agirait mettre en évidence, à un seuil donné, que pour $a = 10$ le jeu est défavorable au joueur A tandis que pour $a = 15$ il lui est favorable.



Commentaire

Voici peut-être un canevas de problème pour le CAPES 2018 (?).