Isogones de l'hyperbole équilatère d'équation y=1/x

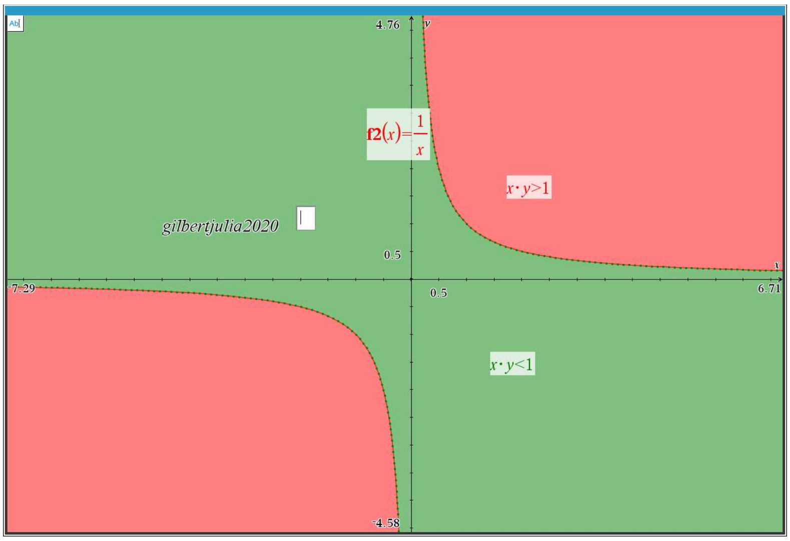
Isogones de l' hyperbole (H) d'équation $y=\dfrac{1}{x}$ *dans un repère orthonormé. L'usage d'un logiciel de représentation graphique permettant de représenter des courbes définies par une relation entre x et y est indispensable.*

1. Le sujet.

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On désigne par (*H*) l'hyperbole d'équation cartésienne $y=\dfrac{1}{x}$.

L'hyperbole (*H*) est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $\left(x\ ;\ y\right)$ sont telles que $x\,y=1$. Elle délimite deux régions :

- L'ensemble des points dont les coordonnées $\left(x\ ;\ y\right)$ sont telles que $x\,y>1$ (colorié en rose ci-contre).
- L'ensemble des points dont les coordonnées $\left(x\ ;\ y\right)$ sont telles que $x\,y<1$ (colorié en vert ci-contre).



Partie A

On cherche l'équation d'une tangente en un point de l'hyperbole puis on cherche combien de tangentes à (H) passent par un point donné du plan.

1. Soit *u* un réel non nul. On désigne par T_u la tangente à l'hyperbole (*H*) en son point d'abscisse *u*. Ecrire une équation cartésienne de la droite T_u.

2.1. Soit $I\ \left(a\,;b\right)$ un point du plan. Montrer que la droite T_u passe par le point *I* si et seulement si *u* est solution de l'équation : $b\,u^2-2\,u+a=0$.

2.2. Discuter, suivant les valeurs de *a* et de *b*, le nombre de tangentes à (*H*) qui passent par *I*.

3. Soit $I\ \left(a\,;b\right)$ un point du plan tel qu'il existe deux tangentes distinctes passant par *I*. Soit ϕ l'angle géométrique de ces deux tangentes. Montrer que : $\tan\phi=\dfrac{4\sqrt{1-a\,b}}{a^2+b^2}$

Partie B

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $\left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$. Montrer que l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes distinctes à (H) dont l'angle géométrique est égal à θ est inclus dans la quartique (courbe du quatrième degré) dont une équation est $\left(x^2+y^2\right)^2\tan^2\theta-16\left(1-x\,y\right)=0$. Quel est exactement cet ensemble ?

Avec l'aide d'un logiciel de représentation graphique, dessiner cet ensemble lorsque $\theta=\frac{\pi}{4}$ puis lorsque $\theta=\frac{\pi}{3}$.

2. Eléments de correction.

Partie A

1. L'hyperbole (*H*) est représentative de la fonction définie sur **R*** : $x \mapsto \frac{1}{x}$, fonction dérivable sur **R*** et dont la dérivée est la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

Soit u un réel non nul.

La tangente T_u à l'hyperbole (*H*) en son point d'abscisse u, le point $M\left(u\ ;\ \frac{1}{u}\right)$, est la droite passant par ce point et de coefficient directeur $-\frac{1}{u^2}$. Elle a pour équation : $y-\frac{1}{u}=-\frac{1}{u^2}(x-u)$ c'est-à-dire : $y=-\frac{x}{u^2}+\frac{2}{u}$.

2.1. Soit $I\ (a;b)$ un point du plan. La droite T_u passe par le point I si et seulement les coordonnées de I vérifient l'équation cartésienne de T_u, donc si et seulement si u est un réel non nul solution de l'équation : $b=-\frac{a}{u^2}+\frac{2}{u}$. Ou, de façon équivalente, de l'équation: $bu^2-2u+a=0$ **(1)**

2.2. Lorsque $b=0$ (point I sur l'axe Ox), cette équation **(1)** est du premier degré et a une unique solution : $u=\frac{a}{2}$. Si a n'est pas nul, cette unique solution est non nulle et il existe une seule tangente passant par I, la tangente au point d'abscisse $\frac{a}{2}$. Si $a=0$ (I est alors l'origine du repère), cette unique solution est nulle, aucune tangente ne passe par ce point.

Lorsque $b\neq 0$, cette équation **(1)** est du second degré et a pour discriminant réduit le nombre $\Delta=1-ab$.

- Si $ab>1$ (point I dans la région coloriée en rose), ce discriminant est strictement négatif, l'équation **(1)** n'a pas de solution réelle, aucune tangente ne passe par I.
- Si $ab=1$, le point I appartient à l'hyperbole (*H*) et la tangente en I (tangente au point d'abscisse $u=\frac{1}{b}=a$, il s'agit de I) est la seule tangente qui passe par ce point.
- Si $ab<1$ (point I dans la région coloriée en vert), ce discriminant est strictement positif, l'équation **(1)** admet deux solutions distinctes. Si $a=0$, l'une de ces deux solutions est zéro, une seule tangente passe par I. Si $a\neq 0$, les deux solutions de **(1)** sont toutes deux non nulles, deux tangentes distinctes passent par I, les tangentes aux points d'abscisses : $u_1=\frac{1-\sqrt{1-ab}}{b}$ et $u_2=\frac{1+\sqrt{1-ab}}{b}$.

Nous avons donc trois parties remarquables du plan :

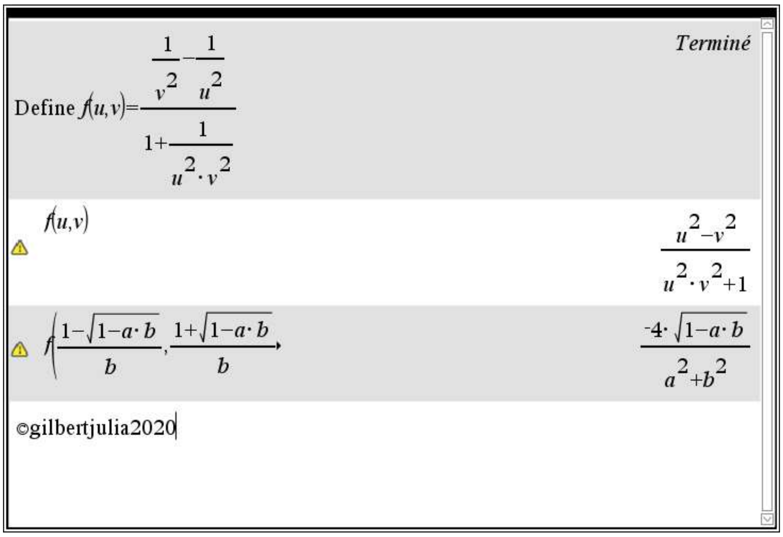
- La région coloriée en rose et l'origine du repère constituent l'ensemble des points d'où on ne peut mener aucune tangente à l'hyperbole.
- L'hyperbole elle-même et les deux axes de coordonnées privés de l'origine du repère constituent l'ensemble des points d'où on peut mener une seule tangente à l'hyperbole.
- La région coloriée en vert privée des deux axes de coordonnées constituent l'ensemble des points d'où on peut mener deux tangentes distinctes à l'hyperbole.

3. L'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes distinctes à l'hyperbole est ainsi la région coloriée en vert et privée des deux axes de coordonnées.

Lorsque I appartient à cet ensemble et que deux tangentes distinctes passent par I, à savoir les tangentes notées ici T_1 et T_2 aux points d'abscisses : $u_1=\dfrac{1-\sqrt{1-a\,b}}{b}$ et $u_2=\dfrac{1+\sqrt{1-a\,b}}{b}$, les coefficients directeurs de ces tangentes sont, respectivement, $-\dfrac{1}{u_1^{\ 2}}$ et $-\dfrac{1}{u_2^{\ 2}}$, c'est-à-dire, respectivement : $\dfrac{b^2}{2-a\,b+2\sqrt{1-a\,b}}$ et $\dfrac{b^2}{2-a\,b-2\sqrt{1-a\,b}}$

Ces coefficients sont les tangentes (au sens trigonométrique du terme) des angles polaires de ces droites. Notons θ_1 ; θ_2 ces angles polaires. L'angle orienté $\left(T_1 \hat{,}\, T_2\right)$ (le repère étant supposé direct pour l'occasion) des deux droites est alors $\theta_2-\theta_1$, et la tangente de cet angle est : $\dfrac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_1.\tan\theta_2}=\dfrac{-\dfrac{1}{u_2^{\ 2}}+\dfrac{1}{u_1^{\ 2}}}{1+\dfrac{1}{u_1^{\ 2}}\dfrac{1}{u_2^{\ 2}}}=\dfrac{u_1^{\ 2}-u_2^{\ 2}}{1+u_1^{\ 2}.u_2^{\ 2}}$

En fonction de a et de b, les calculs effectués ci-contre avec l'appui d'un logiciel de calcul formel montrent que la tangente de l'angle de droites $\left(T_1 \hat{,}\, T_2\right)$ est égal à $\dfrac{-4\sqrt{1-a\,b}}{a^2+b^2}$.



L'angle géométrique ϕ de ces droites a pour tangente (au sens trigonométrique du terme) la valeur absolue de ce nombre, c'est-à-dire le nombre : $\tan\phi \underset{gjulia}{=} \dfrac{4\sqrt{1-a\,b}}{a^2+b^2}$

Partie B

Soit I un point du plan d'où l'on peut mener deux tangentes distinctes à (H), de coordonnées $(a\ ;\ b)$.

En vertu de ce qui précède, l'angle géométrique de ces deux tangentes est égal à θ appartenant à $\left]0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right[$ si et seulement si : $\dfrac{4\sqrt{1-a\,b}}{a^2+b^2}=\tan\theta$, c'est-à-dire (puisqu'il s'agit par hypothèse d'une égalité entre deux réels strictement positifs) si et seulement si : $\left(a^2+b^2\right)^2\tan^2\theta-16\left(1-a\,b\right)=0$

Les coordonnées de I vérifient l'équation : $\left(x^2+y^2\right)^2\tan^2\theta-16\left(1-x\,y\right)=0$.

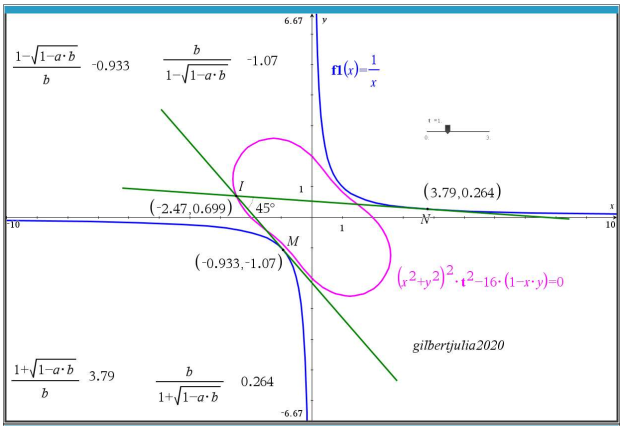
Réciproquement, si les coordonnées $(x\,;\,y)$ d'un point I du plan vérifient cette équation, alors : $\dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2\tan^2\theta}{16}=1-x\,y$, ce qui prouve que $1-x\,y>0$ puisque le premier membre de cette égalité est strictement positif. Par suite, $x\,y<1$: ce point *I* appartient à la « zone coloriée en vert ».

On peut mener par ce point deux tangentes distinctes à (*H*) à condition que ni ce point *I* ne soit ni sur *Ox* ni sur *Oy* (c'est-à-dire que ni *x* ni *y* ne soient nuls).

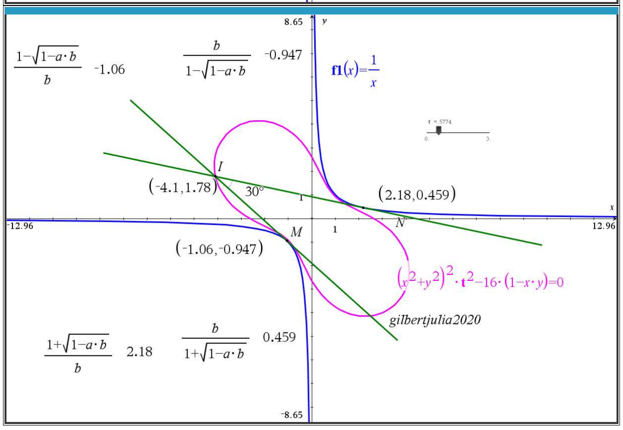
Cette condition étant vérifiée, l'étude directe montre que la tangente de l'angle géométrique de ces droites est $\dfrac{4\sqrt{1-x\,y}}{x^2+y^2}$, c'est-à-dire en l'occurrence $\tan\theta$. Donc, ce point *I* on peut mener deux tangentes distinctes dont l'angle géométrique est θ.

L'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener deux tangentes dont l'angle est égal à θ est la quartique d'équation $\left(x^2+y^2\right)^2\tan^2\theta-16\left(1-x\,y\right)=0$ privée de ses intersections avec les axes de coordonnées.

Voici ce que cela donne lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ (le logiciel est réglé en mode degré d'où l'affichage 45° ou bien 135° suivant la position de I sur la quartique). Les quatre points d'intersection de la quartique coloriée en magenta avec l'un ou l'autre des axes de coordonnées sont exclus.



Voici ce que cela donne lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ (le logiciel est réglé en mode degré d'où l'affichage 30° ou bien 150° lorsqu'on déplace I sur la quartique). Les quatre points d'intersection de la quartique coloriée en magenta avec l'un ou l'autre des axes de coordonnées sont exclus.



Voici ce que cela donne lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ (le logiciel est réglé en mode degré d'où l'affichage 60° ou 120°). Les quatre points d'intersection de la quartique coloriée en magenta avec l'un ou l'autre des axes de coordonnées sont exclus.