Isogones d'une hyperbole, exemples

Après des exemples d'isogones d'une parabole ou d'une ellipse, voici des exemples d'isogones d'une hyperbole.

Nous désignerons par (H_u) l'hyperbole d'équation $y^2 = \frac{x^2}{u^2} + 1$ *où u est un réel strictement positif et nous allons chercher quelques unes de ses isogones.*

Il est prudent de se munir d'un logiciel de calcul formel et d'un autre de représentations graphiques.

1. Le sujet.

Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. On désigne par ($H_u$) l'hyperbole d'équation cartésienne $y^2 = \frac{x^2}{u^2} + 1$. Soit I un point du plan, de coordonnées $(a\ ;\ b)$. Pour tout réel k, on désigne par D_k la droite de coefficient directeur k passant par I.

1. Ecrire une équation cartésienne de la droite D_k.

2. Vérifier que l'abscisse d'un point d'intersection de D_k et de (H_u) est solution de l'équation :

$$\frac{\left(k^2u^2 - 1\right)}{u^2}x^2 - 2\left(k\left(k\,a - b\right)\right)x + \left(k^2\,a^2 - 2k\,a\,b + b^2 - 1\right) = 0 \quad \textbf{(1)}$$

3. Etudier l'intersection de D_k et de (H_u) lorsque $k = \frac{1}{u}$; $k = -\frac{1}{u}$

4.1. On suppose que $k^2 \neq \frac{1}{u^2}$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que D_k soit tangente à (H_u) est que $\left(a^2 + u^2\right)k^2 - 2\,a\,b + b^2 - 1 = 0$.

4.2. En déduire que l'on peut mener par I deux tangentes distinctes à l'hyperbole si et seulement si I est extérieur à l'hyperbole. Donner alors l'expression de leurs coefficients directeurs en fonction de a, b, u.

Tangentes perpendiculaires

Discuter suivant la valeur de u l'existence de points du plan d'où l'on peut mener à l'hyperbole deux tangentes perpendiculaires.

Le réel u étant fixé, déterminer lorsqu'il n'est pas vide l'ensemble (C_u) des points du plan d'où l'on peut mener à l'hyperbole deux tangentes perpendiculaires.

Tangentes faisant un angle de mesure π/4

On cherche dans cette partie l'ensemble des points du plan d'où l'on peut mener à (H_u) deux tangentes dont l'angle géométrique a pour mesure $\dfrac{\pi}{4}$.

Le réel strictement positif u étant fixé, on désignera par Γ_u cet ensemble.

1. On considère un point $I\left(a,b\right)$ extérieur à l'hyperbole. On peut mener par ce point I deux tangentes distinctes à l'hyperbole. On suppose que ces deux tangentes sont non perpendiculaires et on désigne par φ la mesure de l'angle géométrique de ces deux droites (ainsi $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ par hypothèse).

Vérifier que : $\tan\varphi = \dfrac{2\sqrt{a^2-\left(b^2-1\right)u^2}}{\left|a^2+b^2+u^2-1\right|}$.

2. Montrer que : $\varphi=\dfrac{\pi}{4} \Leftrightarrow b^4+2b^2.\left(3u^2+a^2-1\right)+u^4+2\left(a^2-3\right)u^2+a^4-6a^2+1=0$

3. On suppose dans cette question que I appartient à l'axe Oy. Discuter, suivant la valeur de u, le nombre de points I situés sur Oy qui appartiennent à Γ_u.

4. Soit les fonctions:

$x \mapsto f_1(x)=\sqrt{1-3u^2-x^2+2\sqrt{2u^4+x^2\left(u^2+1\right)}}$ et : $x \mapsto f_2(x)=\sqrt{1-3u^2-x^2-2\sqrt{2u^4+x^2\left(u^2+1\right)}}$.

Montrer que Γ_u est la réunion des courbes représentatives de ces fonctions et de leurs fonctions opposées (sous réserve que ces fonctions soient définies).

En déduire que Γ_u est soit vide, soit réduite à un point, soit réunion de deux (éventuellement augmentées d'un point) ou de quatre courbes représentatives de fonctions numériques.

5. À titre d'illustration, représenter avec un logiciel de représentation graphique l'hyperbole (H_u) et la courbe Γ_u lorsque $u=0{,}3$ puis lorsque $u=1$

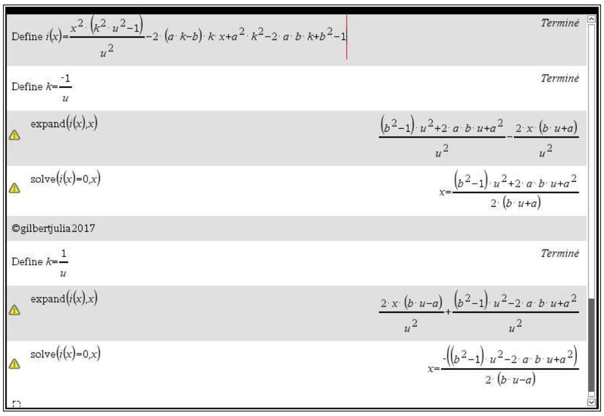
2. Eléments de correction.

1. Soit $I\ (a;b)$ un point du plan.

La droite D_k passant par I et ayant pour coefficient directeur k a pour équation : $y-b=k(x-a)$.

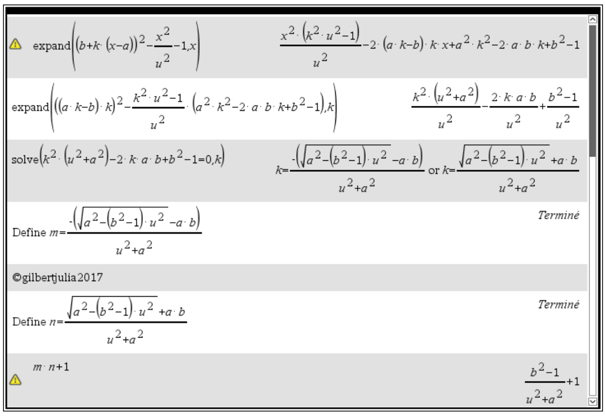
Les coordonnées d'un éventuel point d'intersection de D_k avec l'hyperbole sont solution du système d'équations :
$$\begin{cases} y-b=k(x-a) \\ y^2=\dfrac{x^2}{u^2}+1 \end{cases}$$

2. L'abscisse d'un point d'intersection avec l'hyperbole est solution de l'équation : $(k(x-a)+b)^2-x^2-1=0$ c'est-à-dire de **(1)** :
$$\frac{\left(k^2u^2-1\right)}{u^2}x^2-2(k(k\,a-b))x+\left(k^2a^2-2k\,a\,b+b^2-1\right)=0\,.$$



3. Si $k=\dfrac{1}{u}$ ou si $k=-\dfrac{1}{u}$, D_k est parallèle à une des asymptotes. **(1)** est du premier degré et a une solution simple, à moins que I ne soit sur l'asymptote à laquelle D_k est parallèle (le coefficient de x est alors nul, pas de solution).

4.1. Sinon, **(1)** est du deuxième degré. La droite D_k est tangente à l'hyperbole si et seulement si cette équation a une solution double, c'est-à-dire si et seulement si son discriminant
$$\Delta_x \underset{gjulia2017}{=} \frac{\left(a^2+u^2\right)}{u^2}k^2-\frac{2\,a\,b}{u^2}k+\frac{b^2-1}{u^2}=\frac{1}{u^2}\left(\left(a^2+u^2\right)k^2-\right.$$
est égal à zéro.



Δ_x est une expression au second degré en k de discriminant réduit :
$$\Delta_k=a^2-b^2u^2+u^2=u^2\left(\frac{a^2}{u^2}+1-b^2\right)$$

4.2. $\dfrac{a^2}{u^2}+1-b^2>0 \underset{gjulia}{\Leftrightarrow} -\sqrt{\dfrac{a^2}{u^2}+1}<b<\sqrt{\dfrac{a^2}{u^2}+1}$ c'est-à-dire si et seulement si I est strictement sur le segment joignant les deux points d'abscisse a de l'hyperbole (I extérieur à l'hyperbole).

- Si $\Delta_k>0$ il existe deux tangentes distinctes à l'hyperbole passant par I. Leurs coefficients directeurs sont : $k_1 \underset{gj}{=} \dfrac{a\,b-\sqrt{a^2-u^2\left(b^2-1\right)}}{a^2+u^2}$ et $k_2 \underset{gj}{=} \dfrac{a\,b+\sqrt{a^2-u^2\left(b^2-1\right)}}{a^2+u^2}$.
- Si $\Delta_k=0$ (I sur l'hyperbole) il existe une seule tangente à l'hyperbole passant par ce point I.
- Si $\Delta_k<0$ (I à l'intérieur de l'hyperbole) il n'existe aucune tangente à l'hyperbole passant par ce point I.

Tangentes perpendiculaires

1. Si les deux tangentes issues de I sont perpendiculaires, alors : $k_1 k_2 + 1 = 0$.

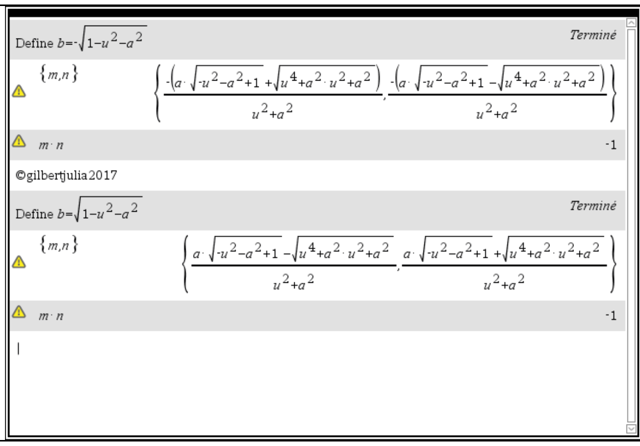
Or : $k_1 k_2 + 1 \underset{gj}{=} \dfrac{a^2 + b^2 + u^2 - 1}{a^2 + u^2}$

Si $u > 1$, il n'existe aucun point d'où il est possible de mener deux tangentes perpendiculaires.
Si $u = 1$, alors : $a = b = 0$ puis: $k_1 = -1$; $k_2 = 1$, ce qui est contradictoire avec l'hypothèse « **(1)** du deuxième degré ».
On ne peut mener non plus d'aucun point du plan deux tangentes perpendiculaires.

Si $u < 1$, alors I appartient au cercle (C_u) de centre O et de rayon $\sqrt{1-u^2}$.

Réciproquement, si I appartient à ce cercle, alors $b = \pm\sqrt{1-u^2-a^2}$. L'écran ci-contre montre que dans les deux cas les deux tangentes issues de I ont des coefficients directeurs dont le produit est égal à -1. Ces deux tangentes sont perpendiculaires.

L'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires est le cercle (C_u).



Tangentes non perpendiculaires

Supposons désormais les deux tangentes issues du point I non perpendiculaires.

1. La tangente de l'angle géométrique φ formé par ces deux droites est alors égale à : $\left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$.

$\left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| \underset{gj}{=} \dfrac{2\sqrt{a^2 - (b^2 - 1)u^2}}{|a^2 + b^2 + u^2 - 1|}$

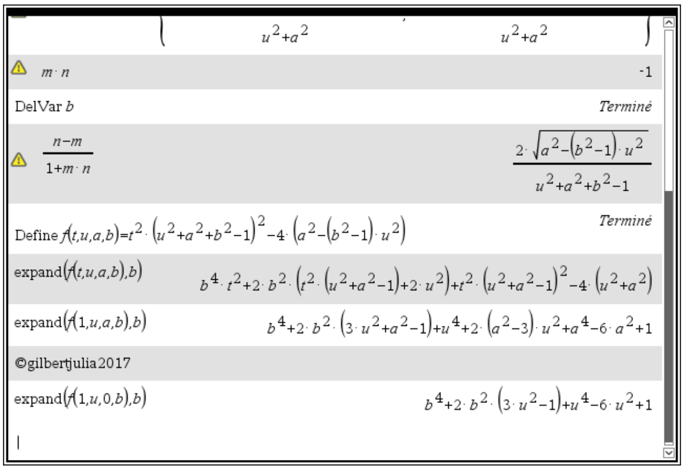
Soit θ un réel tel que : $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ et soit $t = \tan\theta$ (qui est donc un réel strictement positif).

2. De façon générale :

$$\varphi = \theta \underset{gj}{\Leftrightarrow} \left(\frac{2\sqrt{a^2 - (b^2-1)u^2}}{|a^2 + b^2 + u^2 - 1|}\right)^2 = t^2 \text{ c'est-à-dire :}$$

$$\varphi = \theta \underset{gjulia}{\Leftrightarrow} t^2\left(a^2 + b^2 + u^2 - 1\right)^2 - 4\left(a^2 - (b^2 - 1)u^2\right) = 0$$

Soit $f(t,u,a,b) = t^2\left(a^2 + b^2 + u^2 - 1\right)^2 - 4\left(a^2 - (b^2-1)u^2\right)$.

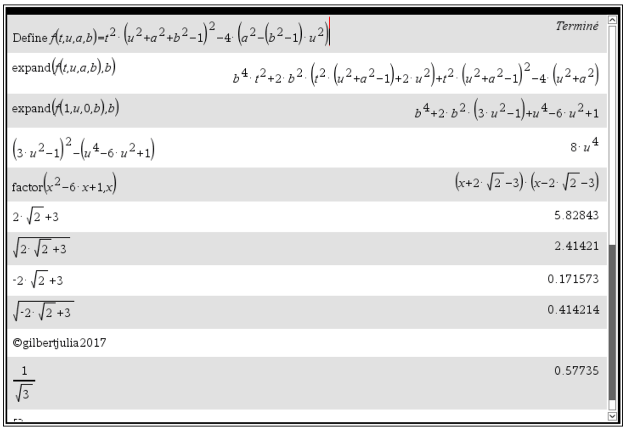


Cette expression est bicarrée en b :

$$f(t,u,a,b) = b^4 t^4 + 2b^2\left(t^2\left(a^2 + u^2 - 1\right) + 2u^2\right) + t^2\left(a^2 + u^2 - 1\right)^2 - 4\left(u^2 + a^2\right)$$

Lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, $t = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$.

$$\varphi = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f(1,u,a,b) = b^4 + 2b^2.\left(3u^2 + a^2 - 1\right) + u^4 + 2\left(a^2 - 3\right)u^2 + a^4 - 6a^2 + 1 = 0$$



3. Soit $I(0,\,b)$ un point situé sur l'axe *Oy*. Alors :
$f(1,u,0,b)=b^4+2b^2.(3u^2-1)+u^4-6u^2+1$

Ce point I appartient à Γ_u si et seulement si : $f(1,u,0,b)=b^4+2b^2.(3u^2-1)+u^4-6u^2+1=0$

$f(1,u,0,b)$ est un polynôme bicarré en *b*.

Si on pose : $P(X)=X^2+2X.(3u^2-1)+u^4-6u^2+1$, ce polynôme du second degré a un discriminant réduit strictement positif, égal à $8u^4$.

Il a toujours deux racines distinctes, de produit $p=u^4-6u^2+1$ et de somme $s=2(1-3u^2)$. Le produit des racines u^4-6u^2+1 est une expression bicarrée en *u*.

Le polynôme X^2-6X+1 ayant deux racines distinctes strictement positives, $3\pm2\sqrt{2}$, il est de signe positif à l'extérieur de ces racines et négatif à l'intérieur. Il en résulte que le polynôme u^4-6u^2+1 admet quatre racines distinctes deux à deux opposées : $\pm\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}$. Deux d'entre elles sont strictement positives : $\sqrt{3\pm2\sqrt{2}}$. Pour tout réel *u* strictement positif, u^4-6u^2+1 est strictement positif à l'extérieur et strictement négatif à l'intérieur de ces deux racines.

	0		$\sqrt{3-2\sqrt{2}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\sqrt{3+2\sqrt{2}}$	
Signe du produit *p*		positif	0	négatif		négatif	0	positif
Signe de *s*		positif		positif	0	négatif		négatif
Signes des racines de *P*		positives	Unenulle	De signes contraires		De signes contraires	Une nulle	négatives
Nombre de racines de *f*		4	3	2		2	1	0

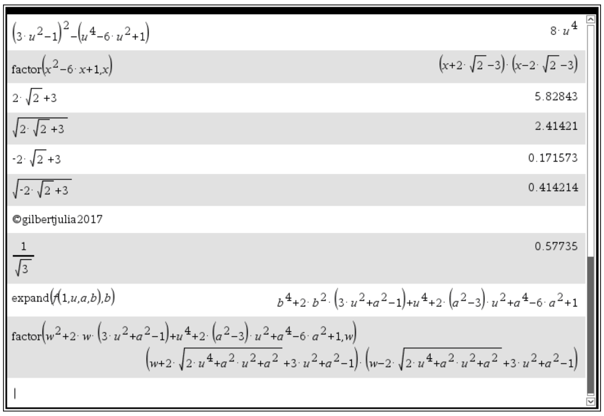
Il en résulte la discussion suivante :

- Si $0<u<\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ il existe quatre points situés sur *Oy* deux à deux symétriques par rapport à *O* d'où on peut mener deux tangentes d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- Si $u=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ il existe trois points situés sur *Oy* d'où on peut mener deux tangentes d'angle $\frac{\pi}{4}$: l'origine elle-même et deux autres points symétriques par rapport à *O*.
- Si $\sqrt{3-2\sqrt{2}}<u<\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, il existe deux points situés sur *Oy* et symétriques par rapport à *O* d'où on peut mener deux tangentes d'angle $\frac{\pi}{4}$.
- Si $u=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ il existe un seul point situé sur *Oy* d'où on peut mener deux tangentes d'angle $\frac{\pi}{4}$: l'origine elle-même.
- Si $u>\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ il n'existe aucun point de *Oy* d'où l'on peut mener deux tangentes d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Soit maintenant $I(a,\ b)$ un point du plan situé à l'extérieur de l'hyperbole (H_u).

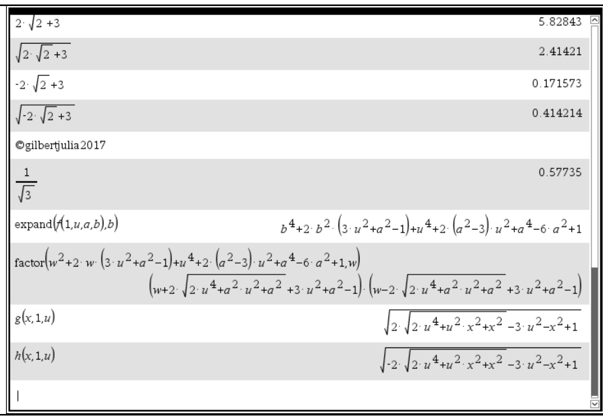
4. On peut mener deux tangentes issues d'un point $I(a,\ b)$ et faisant un angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$ lorsque :
$b^4+2b^2\left(3u^2+a^2-1\right)+u^4+2\left(a^2-3\right)u^2+a^4-6a^2+1=0$.

Le premier membre est un polynôme bicarré en b.
Il se factorise en un produit de deux expressions du second degré en b :
$b^2+3u^2+a^2-1-2\sqrt{2u^4+a^2u^2+a^2}$ et
$b^2+3u^2+a^2-1+2\sqrt{2u^4+a^2u^2+a^2}$
Un point I appartient à Γ_u si et seulement si un au moins de ces facteurs est nul, c'est-à-dire si et seulement si I appartient à la réunion des deux ensembles d'équations respectives :
$y^2+3u^2+x^2-1-2\sqrt{2u^4+x^2u^2+x^2}=0$ et
$y^2+3u^2+x^2-1+2\sqrt{2u^4+x^2u^2+x^2}=0$



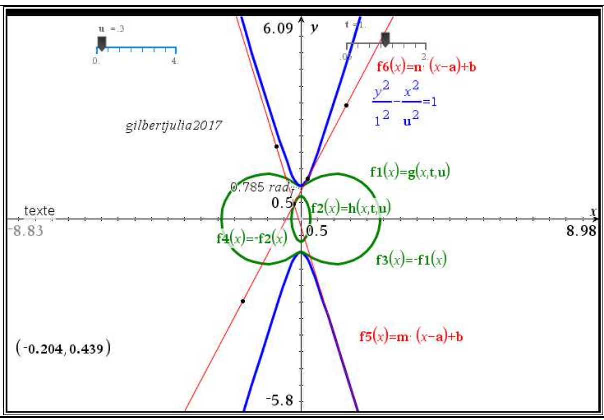
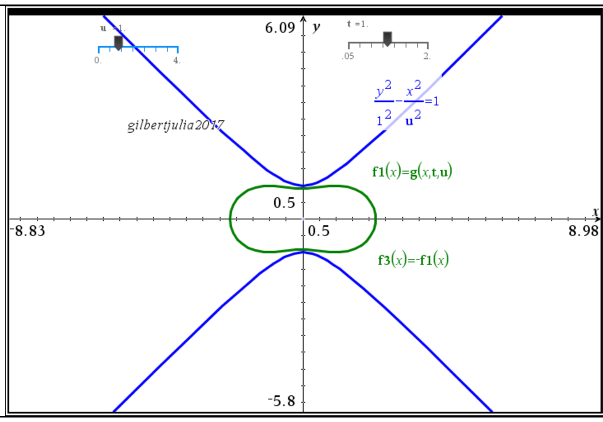
$$M(x,\ y)\in\Gamma_u \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=-3u^2-x^2+1+2\sqrt{2u^4+x^2u^2+x^2} \\ ou \\ y^2=-3u^2-x^2+1-2\sqrt{2u^4+x^2u^2+x^2} \end{cases}$$

Tout dépend du signe des expressions du second membre. Il peut y avoir un intervalle auquel x appartient dans lequel elles sont positives ou il peut ne pas y en avoir …



Dans les intervalles où les expressions ci-dessus sont positives on définit les fonctions :
$x\mapsto f_1(x)=\sqrt{1-3u^2-x^2+2\sqrt{2u^4+x^2\left(u^2+1\right)}}$ et : $x\mapsto f_2(x)=\sqrt{1-3u^2-x^2-2\sqrt{2u^4+x^2\left(u^2+1\right)}}$.
La discussion de la question **3** permet de distinguer, suivant les valeurs de u, s'il existe ou non des intervalles dans lesquels les expressions sous radical sont positives et les fonctions définies.

- Si $0<u<\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, alors les deux fonctions f_1, f_2 ont un ensemble de définition non vide. L'ensemble Γ_u est la réunion des quatre courbes représentatives des fonctions f_1, f_2 et de leurs fonctions opposées.
- Si $u=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$, alors l'ensemble Γ_u est la réunion des deux courbes représentatives des fonctions f_1 et sa fonction opposée ainsi que de l'origine du repère.
- Si $\sqrt{3-2\sqrt{2}}<u<\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, alors seule la fonction f_1 a un ensemble de définition non vide. L'ensemble Γ_u est la réunion des deux courbes représentatives des fonctions f_1 et sa fonction opposée.
- Si $u=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $\Gamma_u=\{O\}$
- Si $u>\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, $\Gamma_u=\varnothing$ car ni f_1 ni f_2 ne sont définies.

Le cas $u = 0{,}3$	Le cas $u = 1$
	

De façon plus générale (θ quelconque) les conclusions sont analogues. On considère alors les fonctions :

$$x \mapsto f_1(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2-u^2)t^2 - 2u^2 - 2\sqrt{t^2(u^2+x^2u^2+x^2)+u^4}}}{t}$$ où $t = \tan\theta$ et :

$$x \mapsto f_2(x) = \frac{\sqrt{(1-x^2-u^2)t^2 - 2u^2 + 2\sqrt{t^2(u^2+x^2u^2+x^2)+u^4}}}{t}$$ sous réserve que ces fonctions soient définies.

L'ensemble Γ_u est réunion des deux courbes représentatives de ces fonctions, lorsqu'elles sont définies, et de celles représentatives des fonctions opposées. L'allure de l'ensemble obtenu est assez variable suivant les valeurs de u et de t choisies. Ci-dessous, on a attribué à deux curseurs les rôles des paramètres u et t :