# Courbes isogones d'une parabole

*Voici un problème en souvenir ému de l'étude géométrique des coniques qui fut jadis au programme des classes de terminale scientifique … Sic transit gloria mundi.*

*Le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormal* $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$

*(P) est la parabole d'équation :* $y = \dfrac{x^2}{2}$.

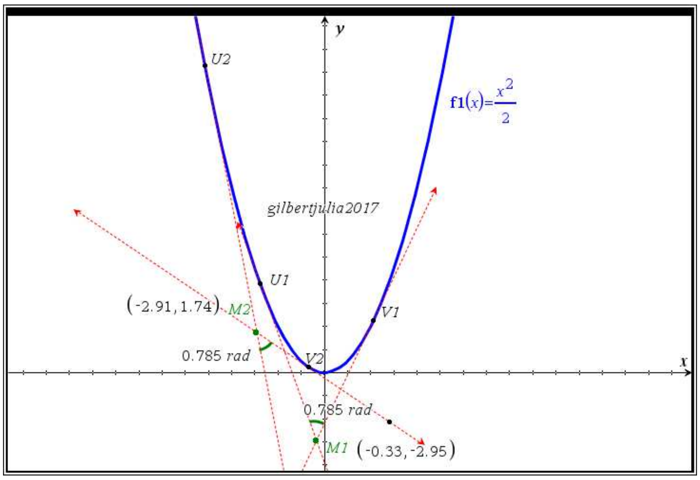
*L'objectif du problème est d'étudier les ensembles des points du plan d'où l'on peut tracer deux droites tangentes à (P) et formant un angle géométrique de droites donné.*

*Par exemple ci-contre la parabole (P) a été représentée en bleu.*

*On remarque deux points* $M_1$ *et* $M_2$ *en vert et en rouge les tangentes à (P) issues de chacun de ces deux points.*

*Il semble bien que les angles géométriques des droites* $(MU_1, MV_1)$ *et* $(MU_2, MV_2)$ *soient égaux.*

*Mais quel est l'ensemble des points M tels que l'angle géométrique* $(MU, MV)$ *des tangentes issues de M prenne cette même valeur ?*




**Rappels**

R1. Soit D une droite du plan, non parallèle à l'axe $Oy$, de coefficient directeur $a$. Alors $a$ est la tangente de l'angle polaire de D, c'est-à-dire de l'angle orienté de droites $(Ox,\ D)$ : $\tan(Ox, D) = a$

R2. Soient deux droites D et D' du plan, non parallèles à l'axe $Oy$, de coefficients directeurs respectifs $a$ et $a'$ distincts.

- Les droites D et D' sont perpendiculaires si et seulement si : $a\,a' = -1$
- Si D et D' ne sont pas perpendiculaires, la tangente de l'angle orienté de droites $(D,\ D')$ est $\dfrac{a'-a}{1+a\,a'}$.

  En effet, $(D,\ D') = (Ox, D') - (Ox, D)$ et $\tan(D,\ D') = \dfrac{\tan(Ox, D') - \tan(Ox, D)}{1 + \tan(Ox, D').\tan(Ox, D)}$.
- La tangente de l'angle géométrique de ces droites est $\left|\dfrac{a'-a}{1+a\,a'}\right|$

## Partie A. Généralités.

**1.** Soit $u$ un nombre réel et $U$ le point de $(P)$ d'abscisse $u$. Ecrire une équation cartésienne de la tangente $T_u$ en $U$ à $(P)$.

**2.** Soient $u$ et $v$ deux nombres réels distincts. $U$ et $V$ sont les points de $(P)$ d'abscisses respectives $u$ et $v$. Déterminer en fonction de $u$ et de $v$ les coordonnées du point d'intersection $I$ des tangentes à $(P)$, $T_u$ en $U$ et $T_v$ en $V$.

**3.** Soit $M$ un point du plan, de coordonnées $(x_M\ ;\ y_M)$. Montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il passe par $M$ deux tangentes à $(P)$ distinctes est : $y_M - \frac{x_M^2}{2} < 0$. Déterminer dans ce cas en fonction de $x_M$ et de $y_M$ les abscisses des points de contact avec $(P)$ de chacune des deux tangentes.

## Partie B. Courbes isogones de la parabole

**1.** *Un cas particulier*. Déterminer l'ensemble des points $M$ du plan d'où sont issues deux tangentes à ($P$) perpendiculaires.

**NB.** Désormais, soit $a$ un réel tel que : $0 < a < \frac{\pi}{2}$. On cherche quel est l'ensemble des points $M$ du plan d'où sont issues deux tangentes à ($P$) qui déterminent un angle géométrique de droites de mesure $a$.

**2.1.** Soient $u$ et $v$ deux réels et $T_u$ et $T_v$ les tangentes à ($P$) aux points de ($P$) d'abscisses $u$ et $v$ respectivement. On suppose que l'angle orienté $(T_u, T_v)$ de ces deux droites a pour mesure $a$.
Exprimer alors $v$ en fonction de $u$ et de $\tan a$, puis les coordonnées du point d'intersection $I$ des deux tangentes en fonction de $u$ et de $\tan a$.

**2.2** Montrer qu'une relation indépendante du paramètre $u$ entre les coordonnées de $I$ est :
$$\tan^2 a\left(y_I + \frac{1}{2} + \frac{1}{\tan^2 a}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2 a} =_{gj2017} x_I^{\,2}$$

**2.3.** Que se passe-t-il si l'angle orienté $(T_u, T_v)$ de ces deux droites a pour mesure $-a$ ?

**3.1.** On désigne par ($H_a$) la courbe d'équation $\tan^2 a\left(y + \frac{1}{2} +_{gj} \frac{1}{\tan^2 a}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2 a} = x^2$. Montrer que cette courbe est située strictement au dessous de l'hyperbole ($P$).

**3.2.** Montrer que, si réciproquement $M(x_M\ ;\ y_M)$ appartient à ($H_a$), alors sont issues de $M$ deux tangentes à la parabole qui déterminent un angle géométrique de droites de mesure $a$.

**4.** Préciser la nature géométrique de cette courbe ($H_a$).

**5.** Représenter ($H_a$) lorsque $a = \frac{\pi}{3}$ puis lorsque $a = \frac{\pi}{4}$

## Partie C.

Est-il possible de retrouver les résultats précédents géométriquement en utilisant les propriétés tangentielles d'une parabole et la définition géométrique des coniques par foyer et directrice ?

# Eléments de correction

## Partie A. Généralités.

**1.** La tangente $T_u$ à (P) en son point d'abscisse $u$ a pour coefficient directeur $u$ et pour équation cartésienne : $y-\dfrac{u^2}{2}=u(x-u)$ , c'est-à-dire : $y=u\,x-\dfrac{u^2}{2}$

**2.** Les coordonnées du point d'intersection des tangentes $T_u$ et $T_v$ sont solution du système : $\begin{cases} y=u\,x-\dfrac{u^2}{2} \\ y=v\,x-\dfrac{v^2}{2} \end{cases}$. On obtient : $x_I=\dfrac{u+v}{2}$ ; $y_I=\dfrac{u\,v}{2}$

**3.** Réciproquement, un point $M$ du plan de coordonnées $(x_M\,,\;y_M)$ est point d'intersection de deux tangentes à la parabole s'il existe deux réels distincts $u$ et $v$ tels que : $x_M=\dfrac{u+v}{2}$ ; $y_M=\dfrac{u\,v}{2}$ .

Connaissant la somme $u+v=2x_M$ et le produit $u\,v=2y_M$ de ces deux réels, ils sont, s'ils existent, les solutions de l'équation du deuxième degré : $U^2-(2x_M)U+(2y_M)=0$, équation dont le discriminant réduit est $\Delta'={x_M}^2-2y_M$. Une condition nécessaire et suffisante d'existence de deux solutions distinctes de cette équation est $\Delta'={x_M}^2-2y_M>0$ c'est-à-dire : $y_M<\dfrac{{x_M}^2}{2}$ (point $M$ situé sous la parabole (P)) et les abscisses des points de contact des deux tangentes avec la parabole sont dans ce cas : $u=x_M-\sqrt{{x_M}^2-2y_M}$ et $v=x_M+\sqrt{{x_M}^2-2y_M}$

## Partie B

**1.** Deux tangentes à la parabole aux points $U$ et $V$ sont perpendiculaires si et seulement si leurs coefficients directeur ont pour produit $-1$, c'est-à-dire si et seulement si leur point d'intersection $I$ a pour ordonnée $y_I=-\dfrac{1}{2}$.

L'abscisse d'un tel point est alors : $x_I=\dfrac{1}{2}\left(u-\dfrac{1}{u}\right)$. L'application $u\mapsto\dfrac{1}{2}\left(u-\dfrac{1}{u}\right)$ étant clairement une surjection de $]-\infty,\,0[\cup]0,\,+\infty[$ sur $]-\infty,\,+\infty[$, l'ensemble des points $M$ d'où l'on peut tracer deux tangentes perpendiculaires est la droite d'équation $y=-\dfrac{1}{2}$ en entier. Cette droite n'est autre que la directrice de la parabole.

**2.1.** Les coefficients directeurs $u$ et $v$ des tangentes $T_u$ et $T_v$ sont les tangentes des angles polaires de ces deux droites. L'angle orienté $(T_u, T_v)$ de ces deux droites est la différence de ces angles polaires.

La tangente de cet angle orienté $(T_u, T_v)$ est comme on l'a vu : $\dfrac{v-u}{1+uv}$.

Si $(T_u, T_v) = a \mod \pi$ : alors $\dfrac{v-u}{1+uv} = \tan a$ et on obtient $v$ en fonction de $u$ et de $\tan a$ : $v = \dfrac{u+\tan a}{1-u\tan a}$,

sous réserve que : $u \neq \dfrac{1}{\tan a}$ (si $u = \dfrac{1}{\tan a}$, alors l'angle polaire de $T_u$ a pour mesure $\dfrac{\pi}{2} - a$ et $(T_u, Oy) = a \mod \pi$ )

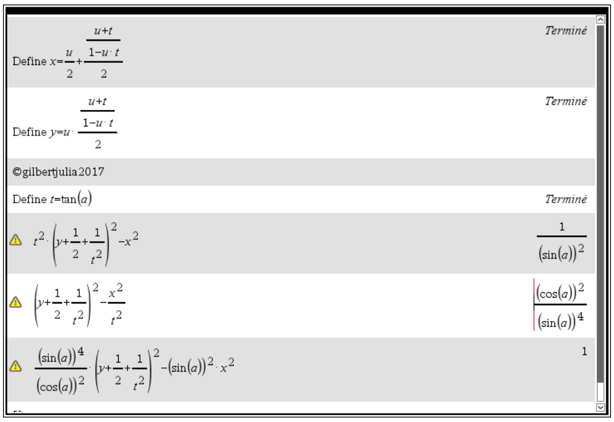
Les coordonnées du point d'intersection $I$ des deux tangentes s'expriment paramétriquement en fonction de $u$ : $x_I = \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{u+\tan a}{1-u\tan a}\right)$ ; $y_I = \dfrac{u}{2}\left(\dfrac{u+\tan a}{1-u\tan a}\right)$ ; $u \neq \dfrac{1}{\tan a}$

**2.2.** L'écran ci-contre fournit diverses relations d'élimination du paramètre $u$.

L'une d'entre elles est notamment :

$$\tan^2 a\left(y + \frac{1}{2} + \frac{1}{\tan^2 a}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2 a} = x^2 \qquad \textbf{(E1)}$$

ce qui est l'équation d'une hyperbole $(H_a)$.




**2.3.** On remarque que les lignes trigonométriques de $a$ n'interviennent que par leur carré dans ces relations d'élimination du paramètre.

Si $\dfrac{v-u}{1+uv} = -\tan a$, c'est-à-dire si l'angle orienté $(T_u, T_v)$ est égal à $-a \mod \pi$, alors $x_I = \dfrac{1}{2}\left(u + \dfrac{u-\tan a}{1+u\tan a}\right)$ ; $y_I = \dfrac{u}{2}\left(\dfrac{u-\tan a}{1+u\tan a}\right)$

mais on obtient les mêmes relations d'élimination du paramètre $u$.

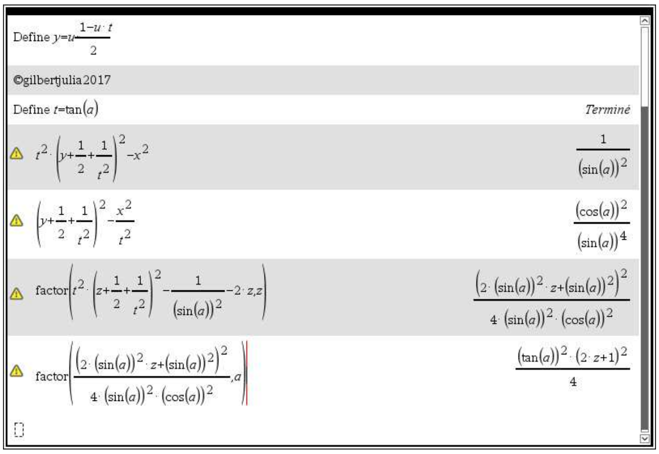
En conclusion, si l'angle géométrique des tangentes aux points d'abscisses $u$ et $v$ a pour mesure $a$, alors leur point d'intersection $I$ appartient à l'hyperbole $(H_a)$ dont l'équation réduite est :

$$\frac{\sin^4 a}{\cos^2 a}\left(y + \frac{1}{2} + \frac{1}{\tan^2 a}\right)^2 - \left(\sin^2 a\right)x^2 = 1$$

**3.1.** Soit, réciproquement, $M$ un point de cette hyperbole ($H_a$).

Compte tenu de l'équation **(E1)** :

$$x_M{}^2 - 2y_M = \left(\tan^2 a\left(y_M + \frac{1}{2} + \frac{1}{\tan^2 a}\right)^2 - \frac{1}{\sin^2 a}\right) - 2y_M .$$




Il s'agit d'une expression du second degré en $y_M$ qui se factorise en carré parfait comme en témoigne l'écran ci-contre.

On obtient : $x_M{}^2 - 2y_M = \tan^2 a \dfrac{(2y_M+1)^2}{4}$

Si $M$ appartient à ($H_a$), $y_M \neq -\dfrac{1}{2}$ car $\dfrac{1}{\tan^2 a} - \dfrac{1}{\sin^2 a} < 0$, la courbe ($H_a$) ne contient aucun point ayant cette ordonnée.

Cette expression est donc toujours strictement positive.
L'hyperbole ($H_a$) est située entièrement strictement au dessous de la parabole.

Ainsi, de tout point de ($H_a$) on peut mener deux tangentes distinctes à la parabole.

**3.2.** Les abscisses des points de contact sont comme on l'a vu : $u = x_M - \sqrt{x_M{}^2 - 2y_M}$ et $v = x_M + \sqrt{x_M{}^2 - 2y_M}$. Ces mêmes nombres sont les coefficients directeurs des deux tangentes en ces points.

L'angle géométrique des deux droites a pour tangente :

$$\left|\frac{v-u}{1+uv}\right| = \left|\frac{2\sqrt{x_M{}^2-2y_M}}{1+\left(x_M-\sqrt{x_M{}^2-2y_M}\right)\left(x_M+\sqrt{x_M{}^2-2y_M}\right)}\right| = \frac{2\sqrt{x_M{}^2-2y_M}}{|1+2y_M|} .$$

Vu la relation précédente, $\sqrt{x_M{}^2-2y_M} = \dfrac{|1+2y_M|}{2}\tan a$ et finalement $\left|\dfrac{v-u}{1+uv}\right| = \tan a$

L'angle géométrique des deux tangentes passant par $M$ a pour mesure $a$.

Ainsi, réciproquement, tout point de ($H_a$) est point de concours de deux tangentes à ($P$) dont l'angle géométrique a pour mesure $a$.

L'ensemble des points $M$ d'où sont issues deux tangentes d'angle géométrique de mesure $a$ est l'hyperbole ($H_a$) d'équation réduite $\dfrac{\sin^4 a}{\cos^2 a}\left(y+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\tan^2 a}\right)^2 - \left(\sin^2 a\right)x^2 = 1$.

**4.** En notant : $\dfrac{\left(y+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\tan^2 a}\right)^2}{p^2} - \dfrac{x^2}{q^2} = 1$ cette équation réduite, ses paramètres sont de la sorte :

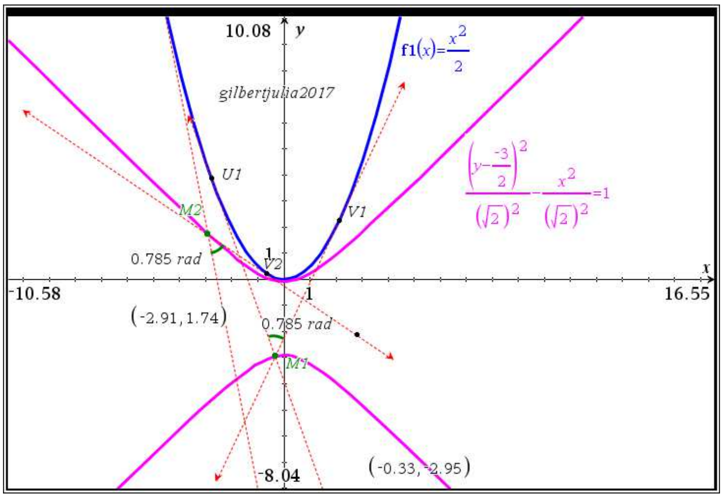
$p = \dfrac{\cos a}{\sin^2 a}$ ; $q = \dfrac{1}{\sin a}$ ; $\sqrt{p^2+q^2} = \dfrac{1}{\sin^2 a}$

Son centre est le point $\Omega\left(0\ ;-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\tan^2 a}\right)$. L'un de ses foyers est le point $F\left(0\ ;\dfrac{1}{2}\right)$, foyer de la parabole et l'une de ses directrices $_{gj}$ est la droite d'équation $y=-\dfrac{1}{2}$, directrice de la parabole.

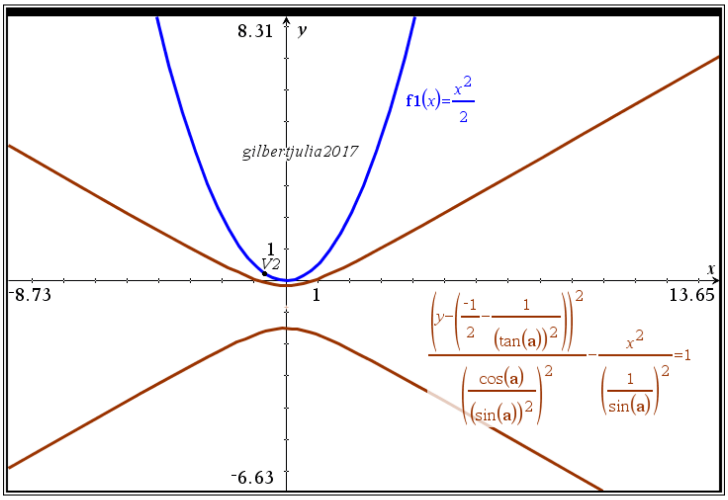
Son excentricité est $\dfrac{1}{\cos a}$. Tout ceci n'est pas dû au hasard …

Retenons cependant que l'une des deux branches de l'hyperbole est située entre la directrice et la parabole tandis que l'autre branche est dans le demi plan de frontière la directrice ne contenant pas la parabole.

Voici le cas $a=\dfrac{\pi}{4}$




Voici le cas $a=\dfrac{\pi}{3}$



## Partie C

- Soit (D) une droite du plan et $F$ un point non situé sur (D). Pour tout point $M$ du plan, soit $H$ son projeté orthogonal sur (D). Soit $e$ un réel strictement positif. L'ensemble des points du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$ est une ellipse si $e < 1$, une parabole si $e = 1$, une hyperbole si $e > 1$.

- En particulier, une parabole de foyer $F$ et de directrice $(D)$ est l'ensemble des points équidistants du foyer et de la directrice.
- La tangente en un point $U$ de cette parabole est bissectrice intérieure du triangle isocèle $FUJ$ où $J$ est le projeté orthogonal de $U$ sur la directrice.

Soient $U$ et $V$ deux points distincts d'une parabole. Ce sont des points équidistants du foyer $F$ et de la directrice $(D)$ : $UF = UJ$ et $VF = VK$. De plus, les tangentes $(MU)$ et $(MV)$ sont les bissectrices intérieures des angles $F\hat{U}J$ et $F\hat{V}K$. $F$ et $J$ sont de ce fait symétriques par rapport à $(MU)$ et $F$ et $K$ sont symétriques par rapport à $(MV)$ $_{gj\,2017}$ .

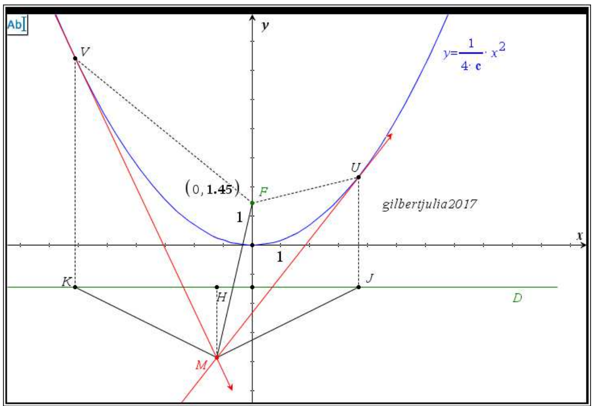
En conséquence, $M$ se trouvant sur les axes de ces deux symétries : $MF = MJ = MK$ et les droites $(MU)$ et $(MV)$ sont bissectrices intérieures de l'angle $J\hat{M}K$.

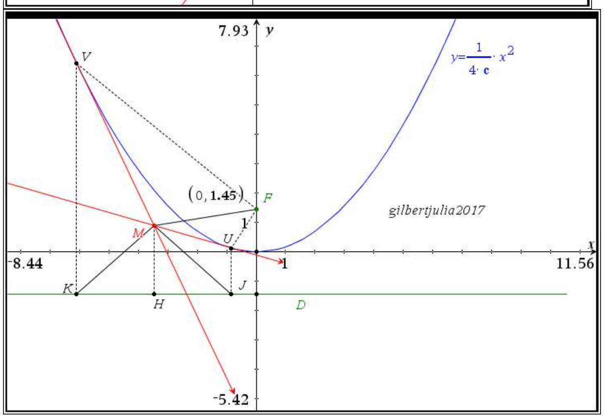
Le triangle $MJK$ est un triangle isocèle en $M$ dont l'angle de sommet $M$ est double de $U\hat{M}V$.

Soit $a$ la mesure de l'angle géométrique des deux tangentes $(MU)$ et $(MV)$

Si l'angle $U\hat{M}V$ est aigu, $U\hat{M}V = a$ et $J\hat{M}K = 2U\hat{M}V = 2a$

Si $H$ est la projection de $M$ sur la directrice $(D)$ : $H\hat{M}K = H\hat{M}J = a$




Si l'angle $U\hat{M}V$ est obtus, $U\hat{M}V = \pi - a$ et $J\hat{M}K = 2\left(\pi - U\hat{M}V\right) = 2a$

Si $H$ est la projection de $M$ sur la directrice $(D)$ : $H\hat{M}K = H\hat{M}J = a$

Quel que soit le cas de figure : $\cos H\hat{M}K = \cos a$. Or $\cos H\hat{M}K = \frac{MH}{MK} = \frac{MH}{MF}$

Si l'angle géométrique des deux tangentes a pour mesure un réel donné $a$ $\left(0 < a < \dfrac{\pi}{2}\right)$ alors

$\cos \widehat{HMK} = \cos \widehat{UMV} = \cos a$ c'est à dire $\dfrac{MF}{MH} = \dfrac{1}{\cos a}$

Le point $M$ appartient à la conique ($H_a$) de foyer $F$, directrice ($D$) et excentricité $\dfrac{1}{\cos a}$ (c'est une hyperbole puisque l'excentricité est $>1$).

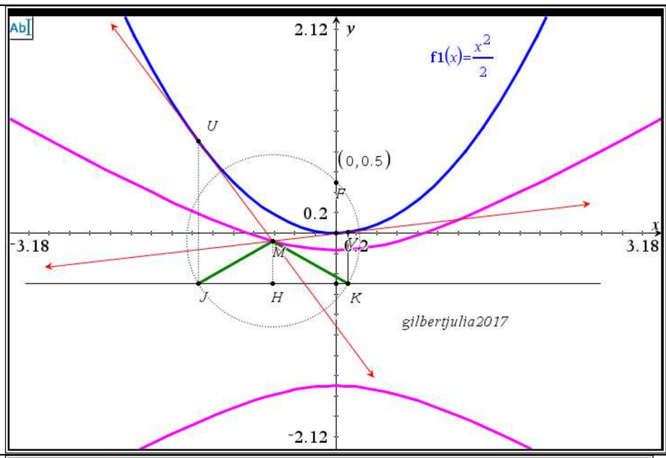
Il s'agit effectivement des résultats obtenus précédemment.

Réciproquement, si $M$ appartient à ($H_a$) alors : $\dfrac{MH}{MJ} = \dfrac{MH}{MK} = \dfrac{MH}{MF} = \cos a$ et par conséquent

$\cos \widehat{HMK} = \cos \widehat{HMJ} = \cos a$ et par suite $\widehat{JMK} = 2\,\widehat{HMK} = 2\widehat{HMJ} = 2a$

Si $M$ appartient à la branche de ($H_a$) située entre la directrice et la parabole, l'angle $\widehat{UMV}$ est obtus et $\widehat{JMK} = 2a = 2\left(\pi - \widehat{UMV}\right)$.

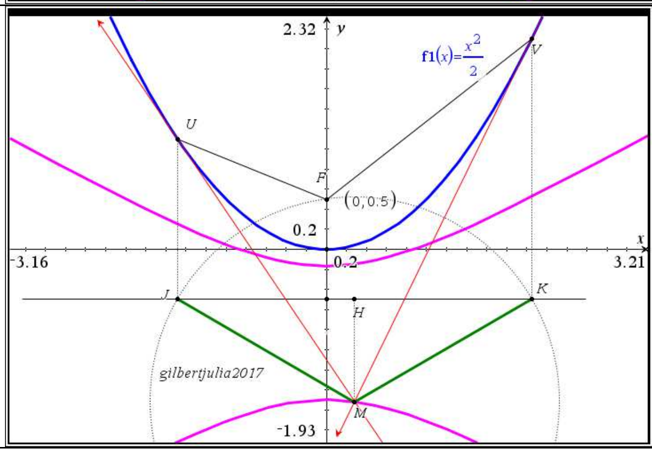
Alors $\widehat{UMV} = \pi - a$




Si $M$ appartient à la branche de ($H_a$) située de l'autre côté de la directrice par rapport à la parabole, l'angle $\widehat{UMV}$ est aigu,

$\widehat{JMK} = 2a = 2\widehat{UMV}$

Alors $\widehat{UMV} = a$




Quel que soit le cas de figure, l'angle géométrique des deux tangentes issues de $M$ est égal à $a$.

Cet angle géométrique est soit $\widehat{UMV}$ soit $\pi - \widehat{UMV}$ selon la branche d'hyperbole sur laquelle se trouve $M$.

L'hyperbole ($H_a$) est l'ensemble des points du plan d'où sont issues deux tangentes déterminant un angle géométrique égal à $a$. Sur une branche de l'hyperbole, on « voit » la parabole sous l'angle $\pi - a$, et sur l'autre branche, on « voit » la parabole sous l'angle $a$.